



INSTITUTO TECNOLÓGICO DE PACHUCA

MÉTODOS DE SOLUCIÓN ANALÍTICA DE LA ECUACIÓN DE LA LUBRICACIÓN REYNOLDS PARA CHUMACERAS FINITAS

TESIS PARA OBTENER EL GRADO DE
MAESTRO EN INGENIERÍA MECÁNICA

PRESENTA

ING. JAVIER ROLDÁN CRUZ

DIRECTOR:

DR. IGNACIO RAMÍREZ VARGAS

SINODALES:

DR. LUIS MANUEL PALACIOS PINEDA

DR. MARIO EMIGDIO RODRÍGUEZ CASTILLO

Pachuca de Soto, Hidalgo agosto de 2021



EDUCACIÓN

SECRETARÍA DE EDUCACIÓN PÚBLICA



TECNOLÓGICO
NACIONAL DE MÉXICO

Instituto Tecnológico de Pachuca
División de Estudios de Posgrado e Investigación

Pachuca, Hidalgo, **24/Agosto/2021**
OFICIO No. DEPI-80-21

C. ING. JAVIER ROLDÁN CRUZ PRESENTE

La que suscribe, jefa de la División de Estudios de Posgrado e Investigación, le comunica que los miembros de la Comisión Revisora, designada por el Consejo de Posgrado de la Maestría en Ingeniería Mecánica para examinar su Tesis:

Métodos de solución analítica de la ecuación
de la lubricación de Reynolds para chumaceras
finitas

se han reunido, y después de intercambiar opiniones manifiestan su aprobación de la Tesis, en virtud que satisface los requisitos señalados por las disposiciones reglamentarias vigentes y, en consecuencia, se autoriza su impresión.

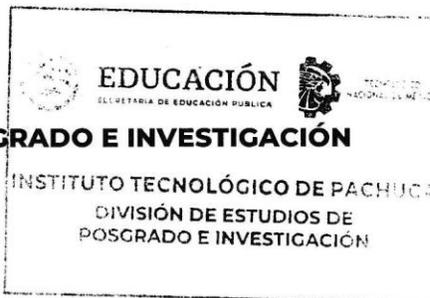
Sin otro particular por el momento, quedo de Usted.

ATENTAMENTE

El Hombre Alimenta el Ingenio en Contacto con la Ciencia


M. A. C. ELODIA CLAUDIA GUERRERO ORTIZ
JEFA DE LA DIVISIÓN DE ESTUDIOS DE POSGRADO E INVESTIGACIÓN

C.p. Archivo
ECGO/LMPP





Consejo de Posgrado de la Maestría en Ingeniería Mecánica

ACTA

Siendo las 13:00 horas del 19 de febrero de 2020, reunidos a distancia, el Consejo de Posgrado de la Maestría en Ingeniería Mecánica manifiesta la APROBACIÓN del tema de Tesis: *Métodos de solución analítica de la ecuación de la lubricación de Reynolds para chumaceras finitas*, con el siguiente contenido:

- Resumen/Abstract
- Nomenclatura
- Contenido
- Índice de cuadros, gráficas y figuras.
- 1- Introducción
- 2- Estado del arte
- 3- Marco teórico
- 4- Materiales y métodos
- 5- Resultados
- Conclusiones
- Bibliografía
- Apéndices

Para cubrir el requisito correspondiente a la Tesis para que el Ing. Javier Roldán Cruz obtenga el grado de Maestro en Ingeniería Mecánica, bajo la dirección del Dr. Ignacio Ramírez Vargas.

ATENTAMENTE

El Hombre Alimenta el Ingenio en Contacto con la Ciencia

EL CONSEJO DE POSGRADO

Dr. Hugo Francisco Abundis
Fong

Dr. Armando Irvin Martínez
Pérez

Dr. Luis Manuel Palacios
Pineda

Dra. Erika Osiris Ávila Dávila

Dr. Ignacio Ramírez Vargas

Dr. Edgar Ernesto Vera
Cárdenas

Dra. Marisá Moreno Ríos

Dr. Juan Serrano Arellano

Dr. Valente Hernández Pérez

Dedicatorias

Dedico esta tesis a mis padres Javier Roldán y Elena Cruz quienes han estado a mi lado en cada momento apoyándome de forma incondicional, enseñándome que con esfuerzo, trabajo y constancia todo es posible

Dedico esta a mi hermano César A. Roldán por ser un buen guía en mi desarrollo personal y motivarme a estar en una preparación académica constante siendo un gran ejemplo para seguir

Dedico esta tesis a mi novia Selene Juárez por ser mi cómplice en cada una de mis ambiciones durante todo este tiempo siendo una constante motivación para continuar con este proyecto de vida.

Dedico esta tesis familiares y amigos por el apoyo brindado durante esta gran experiencia para obtener el grado de maestro.

Agradecimientos

A mi asesor Dr. Ignacio Ramírez el apoyo brindado para el desarrollo de este trabajo, así como el conocimiento compartido durante la maestría.

Al Instituto Tecnológico de Pachuca por permitirme estudiar la Maestría en Ingeniería Mecánica en esta gran institución.

Al cuerpo docente de la Maestría en Ingeniería Mecánica por los conocimientos compartidos durante el periodo de la maestría.

A CONACyT por otorgar la beca económica durante mi formación profesional para poder desarrollar la tesis que se presenta para obtener el grado de Maestro en ingeniería Mecánica.

MÉTODOS DE SOLUCIÓN ANALÍTICA DE LA ECUACIÓN DE LA LUBRICACIÓN REYNOLDS PARA CHUMACERAS FINITAS

DEDICATORIAS	IV
AGRADECIMIENTOS	V
NOMENCLATURA	IX
LISTA DE TABLAS	XI
LISTA DE FIGURAS	XII
RESUMEN	XV
ABSTRACT	XVII
HIPÓTESIS	XVIII
OBJETIVOS GENERALES	XVIII
OBJETIVOS ESPECÍFICOS	XVIII

CAPÍTULO I

ESTADO DEL ARTE	1
1.1.Introducción.	1
1.2.Antecedentes de la rotodinámica.	2
1.3.Inicio del estudio de las chumaceras hidrodinámicas.	3
1.4.Chumaceras Hidrodinámicas.	5

CAPÍTULO II

MARCO TEÓRICO	6
2.1. Rotodinámica.	6
2.2. Ecuaciones de Navier-Stokes.	7
2.3. La ecuación de la lubricación de Reynolds.	10
2.4. Deducción de la ecuación de Reynolds.	16
2.5. Ecuación de Reynolds en coordenadas cilíndricas.	22
2.6. Modelo de una chumacera corta.	29
2.7. Modelo de una chumacera infinitamente larga.	29

2.8. Capacidad de carga en soportes hidrodinámicas.	30
2.9. Capacidad de carga basada en las condiciones de Sommerfeld.	32
2.10. Número de Sommerfeld.	34

CAPITULO III

CAMPOS DE PRESIÓN EN CHUMACERAS HIDRODINÁMICAS CLÁSICAS DE LONGITUD FINITA	36
3.1. Adimensionalización de la ecuación de Reynolds para chumaceras de longitud finita.	36
3.2. Determinación de campos de presión para casos especiales.	38
3.2.1. Determinación de campos de presión para chumaceras cortas con solución analítica $\frac{L}{D} \leq \frac{1}{4}$.	38
3.2.2. Determinación de campos de presión para chumaceras largas con solución analítica $\frac{L}{D} \geq 2$.	40

CAPÍTULO IV

PROPUESTAS DE SOLUCIÓN PARA LA ECUACIÓN DE LA LUBRICACIÓN DE REYNOLDS EN CHUMACERAS DE LONGITUD FINITA	42
4.1. Propuesta 1: Solución híbrida, a partir del funcional de la Ecuación de Reynolds.	42
4.1.1. Método de residuos ponderados (MRP).	43
4.2. Propuesta 2: Perturbación de la posición estacionaria del sistema.	49
4.2.1. Incrementos del campo de presión obtenidos a partir de la ecuación de Reynolds.	50
4.2.2. Coeficientes rotodinámicos para chumaceras cortas por medio de los cambios lineales del campo de presión.	54
4.3 Propuesta 3: Propuesta de solución analítica mediante funciones producto, a partir de consideraciones específicas.	62
4.3.1. Ejemplo 1	65
Caso plano	65
4.3.2. Ejemplo 2	70
Caso exponencial	70
4.3.3. Ejemplo 3	74
Caso cilíndrico	74

CONCLUSIONES	78
REFERENCIAS	79
APÉNDICES	81
Apéndice 1.- Métodos de solución analítica de la ecuación de la lubricación de Reynolds para chumaceras finitas.	81

Nomenclatura

- σ_x : Esfuerzo normal en el eje x.
- σ_y : Esfuerzo normal en el eje y.
- σ_z : Esfuerzo normal en el eje z.
- φ : Ángulo de equilibrio (attitud).
- β : Función del espesor de la película lubricante.
- C_r : Claro radial.
- θ : Coordenada angular.
- $\tilde{\theta}$: Coordenada circunferencial adimensional.
- \bar{z} : Coordenada axial adimensional de la chumacera.
- z : Coordenada axial de la chumacera.
- D : Diámetro de la chumacera.
- H : Espesor dimensional de la película lubricante.
- h : Espesor adimensional de la película de lubricante.
- ε_{Ocv} : Excentricidad en una chumacera tipo Ocvirk.
- ε : Excentricidad.
- e : Excentricidad dimensional.
- f : Fuerza.
- F_x : Componente horizontal de la fuerza.
- F_y : Componente vertical de la fuerza.
- F_{dim} : Fuerza ficticia característica.
- L : Longitud axial de la chumacera.
- m : Masa del disco.
- N : Número de revoluciones por segundo del eje.
- S : Número de Sommerfeld.
- W : Peso Total del sistema.
- \bar{p}_{Ocv} : Presión adimensional de Ocvirk.
- \bar{p} : Presión adimensional.
- p_{dim} : Presión ficticia característica.
- p : Presión.

- p_0 : Presión en estado estacionario.
- p_x : Cambio de presión en el desplazamiento del eje x .
- p_y : Cambio de presión en el desplazamiento del eje y .
- $p_{\dot{x}}$: Cambio de presión en la velocidad del eje \dot{x} .
- $p_{\dot{y}}$: Cambio de presión en la velocidad del eje \dot{y} .
- R : Radio de la chumacera.
- ω_j : Velocidad angular de rotación del eje.
- ω : Velocidad angular en radianes por segundo.
- \bar{V} : Velocidad lineal adimensional.
- V_s : Velocidad lineal.
- x_m : Punto crítico de la función $f(x_1)$
- μ : Viscosidad absoluta del lubricante.
- λ : Valor propio.
- \bar{C}_{ij} : Coeficientes adimensionales de amortiguamiento, directos y acoplados en las direcciones horizontales y verticales $i = x, y, j = x, y$.
- \bar{K}_{ij} : Coeficientes adimensionales de rigidez directos y acoplados en las direcciones horizontales y verticales. $i = x, y, j = x, y$.
- C_{ij} : Coeficientes de amortiguamiento directos y acoplados en las direcciones radiales y tangenciales. $i = x, y, j = x, y$.
- K_{ij} : Coeficientes de rigidez directos y acoplados en las direcciones radiales y tangenciales.
 $i = R, T, j = R, T$

Lista de Tablas

Tabla 2. 1 Coeficientes rotodinámicos para chumaceras cortas

61

Lista de Figuras

Figura 1.1 Presión hidrodinámica generada por la rotación del muñón en chumaceras cilíndrica	5
Figura 2.1 Tipos de chumaceras según la carga que soportan.	6
Figura 2. 2 Componentes de tensión que actúan sobre un elemento fluido rectangular.	7
Figura 2.3 Direcciones de los componentes de velocidad de los límites fluido-película en la ecuación de Reynolds.	13
Figura 2.4 Acciones de película viscosa que resultan en una onda de presión positiva. 1. Acción de cuña viscosa. 2. Compresión elástica en el límite. 3. Acción de película de compresión.	14
Figura 2.5 Nomenclatura de una chumacera Hidrodinámica en reposo.	16
Figura 2.6 Frontera de una chumacera hidrodinámica.	20
Figura 2.7 Espesor de la película lubricante en la chumacera.	22
Figura 2.8 Posición arbitraria del muñón en una chumacera.	23
Figura 2.9 Posición arbitraria del muñón en una chumacera.	24
Figura 2.10 Vectores unitarios en las direcciones radial y transversal del punto arbitrario S de la película de lubricante, y el centro del muñón J.	25
Figura 2.11. Vector junto con trazos adicionales que permiten un análisis más sencillo.	26
Figura 2.12 Ondas de presión en un rodamiento infinitamente largo y completo según la solución de Sommerfeld.	30
Figura 2.13 Componentes hidrodinámicos de fuerza de rodamiento.	31
Figura 3.1 Vista transversal de una chumacera hidrodinámica.	36
Figura 3.2 Campo de presión clásico (no presurizado) en una chumacera corta como función de las coordenadas axial y circunferencial respectivamente, para $\varepsilon = 0.3$ y $L/D = 1/4$	39
Figura 3.3 Campo de presión condición de frontera de Sommerfeld, chumacera larga, para una excentricidad $\varepsilon = 0.1$	41
Figura 4.1 Grafica de solución numérica de (4.13) para valores de $\frac{L}{D} = .25$, $f(\theta) = 0$, $f'(\theta) = 1.8$, con excentricidades de 1) $\varepsilon_1 = 0.1$, 2) $\varepsilon_2 = 0.5$, 3) $\varepsilon_3 = 0.8$	45
Figura 4.2 Grafica de solución numérica de (4.13) para valores de $\frac{L}{D} = .5$, $f(\theta) = 0$, $f'(\theta) = 1.8$, con excentricidades de 1) $\varepsilon_1 = 0.1$, 2) $\varepsilon_2 = 0.5$, 3) $\varepsilon_3 = 0.8$	45

- Figura 4.3 Grafica de solución numérica de (4.13) para valores de $\frac{L}{D} = 1.5, f(\theta) = 0, f'(\theta) = 1.8$, con excentricidades de 1) $\varepsilon_1 = 0.1$, 2) $\varepsilon_2 = 0.5$, 3) $\varepsilon_3 = 0.8$ 46
- Figura 4.4 Grafica de solución numérica de (4.13) para valores de $\frac{L}{D} = 1.5, f(\theta) = 0, f'(\theta) = 1.8$, con excentricidades de 1) $\varepsilon_1 = 0.1$, 2) $\varepsilon_2 = 0.5$, 3) $\varepsilon_3 = 0.8$ 46
- Figura 4.5 Grafica de solución numérica de (4.13) para valores de $\frac{L}{D} = 2, f(\theta) = 0, f'(\theta) = 1.8$, con excentricidades de 1) $\varepsilon_1 = 0.1$, 2) $\varepsilon_2 = 0.5$, 3) $\varepsilon_3 = 0.8$ 47
- Figura 4.6 Grafica de solución numérica de (4.13) para valores de $\frac{L}{D} = 2.5, f(\theta) = 0, f'(\theta) = 1.8$, con excentricidades de 1) $\varepsilon_1 = 0.1$, 2) $\varepsilon_2 = 0.5$, 3) $\varepsilon_3 = 0.8$ 47
- Figura 4.7 Grafica de solución numérica de (4.13) para valores de $\frac{L}{D} = 3, f(\theta) = 0, f'(\theta) = 1.8$, con excentricidades de 1) $\varepsilon_1 = 0.1$, 2) $\varepsilon_2 = 0.5$, 3) $\varepsilon_3 = 0.8$ 48
- Figura 4.8 Grafica de solución numérica de (4.13) para valores de $\frac{L}{D} = 4, f(\theta) = 0, f'(\theta) = 1.8$, con excentricidades de 1) $\varepsilon_1 = 0.1$, 2) $\varepsilon_2 = 0.5$, 3) $\varepsilon_3 = 0.8$ 48
- Figura 4.9 Efecto del cambio de la carga en el muñón 50
- Figura 4.10 Campo de presión total aproximado para $\bar{p}_0; \frac{L}{D} = \frac{1}{4}; \varepsilon = 0.1$ 56
- Figura 4.11 Campo de presión total aproximado para $\bar{p}_x; \frac{L}{D} = \frac{1}{4}; \varepsilon = 0.1$ 57
- Figura 4.12 Campo de presión total aproximado para $\bar{p}_y; \frac{L}{D} = \frac{1}{4}; \varepsilon = 0.1$ 57
- Figura 4.13 Campo de presión total aproximado para $\bar{p}_x; \frac{L}{D} = \frac{1}{4}; \varepsilon = 0.1$ 58
- Figura 4.14 Campo de presión total aproximado para $\bar{p}_y; \frac{L}{D} = \frac{1}{4}; \varepsilon = 0.1$ 58
- Figura 4.15 Grafica de máximos en $f(z)$ y $f(x)$. 62
- Figura 4.16 Comportamiento de la función $f(z_1)$ con respecto de θ . 68
- Figura 4.17 Comportamiento de la función $f(x_1)$ con respecto de θ . 68
- Figura 4.18 Grafica del campo de presión en una chumacera de longitud finita, obtenida mediante el producto de funciones $P = Af(x_1) \cdot f(z_1)$. 69
- Figura 4.19 Grafica de las curvas de contorno de la presión en una chumacera de longitud finita, obtenida mediante el producto de funciones $P = Af(x_1) \cdot f(z_1)$. 69
- Figura 4.20 Comportamiento de la función $f(z_1)$ con respecto de θ . 72
- Figura 4.21 Comportamiento de la función $f(x_1)$ con respecto de θ . 73

- Figura 4.22 Grafica del campo de presión en una chumacera de longitud finita, obtenida mediante el producto de funciones $P = Af(x_1) \cdot f(z_1)$ para $\varepsilon = 0.5$, $f(z)$ y $f(x)$ y $\beta = (2.5)^{x_1}$ 73
- Figura 4.23 Curvas de nivel de presión en máximos para $\varepsilon = 0.5$, $f(z)$ y $f(x)$ y $\beta = (2.5)^{x_1}$ 74
- Figura 4.24 Campo de presión obtenido en máximos para $f(z)$ y $f(x)$ para $\beta = 1 + \varepsilon \cos\theta$ 76
- Figura 4.25 Curvas de nivel de presión en máximos para $\varepsilon = 0.5$, $f(z)$ y $f(x)$ para $\beta = 1 + \varepsilon \cos\theta$ 77

Resumen

En este trabajo se presentan tres propuestas de solución analítica y semi analítica para la ecuación de la lubricación de Reynolds en chumaceras hidrodinámicas finitas, con la finalidad de determinar los campos de presión, posteriormente en un trabajo adicional se podrán determinar los coeficientes rotodinámicos de rigidez y amortiguamiento, características empleadas para pronosticar el comportamiento de un sistema rotor chumacera.

En el capítulo I se presenta una reseña histórica de la rotodinámica, considerando la evolución de su estudio, también se considera el inicio del estudio de las chumaceras hidrodinámicas y se dan a conocer diversos resultados reportados en la literatura.

En el capítulo II se presentan las deducciones de las ecuaciones de Navier-Stokes y la ecuación de la lubricación de Reynolds elaboradas por el Doctor Ignacio Ramírez Vargas en su tesis doctoral “*Teoría de chumaceras presurizadas con puertos puntuales: caso de la chumacera corta*”, además se hacen presentes las consideraciones para poder clasificar a una chumacera hidrodinámica y se describe el número de Sommerfeld.

En el capítulo III se determinan los campos de presión para chumaceras hidrodinámicas cortas y chumaceras hidrodinámicas largas, siguiendo un proceso de adimensionalización con la finalidad de tener un mejor manejo de la ecuación de la lubricación de Reynolds, posteriormente se consideran diferentes variables adimensionales. Considerando la solución de Ocvirk para las chumaceras cortas y la sustitución de Sommerfeld para las chumaceras largas se logra obtener los campos de presión y son representados gráficamente mediante el programa computacional Wolfram Mathematica para cada situación.

En el capítulo IV se presentan tres propuestas semi analíticas y analíticas para dar solución a la ecuación de la lubricación de Reynolds en soportes hidrodinámicos de longitud finita, primero se propone una solución híbrida (numérico-analítica), a partir de una propuesta parabólica de presión, validando los resultados con los existentes en la literatura. De la misma forma, se propone una solución en serie de potencias para la presión en la película de lubricante, se genera un algoritmo para chumaceras de longitud finita y se valida el método en el caso de una chumacera corta determinando su campo de presión y sus coeficientes de rigidez y amortiguamiento. Posteriormente, se propone una solución alternativa a partir de una función producto de funciones

independientes, las cuales se determinan por separado y se encuentra una expresión cerrada para el campo de presión para chumaceras con relación L/D finitas, se analizan tres ejemplos en donde la película de lubricante tiene variaciones en su geometría (plana, exponencial y cilíndrica), se describe claramente la metodología y se verifica su validez.

Abstract

This paper presents three analytical and semi-analytical solution proposals for the Reynolds lubrication equation in finite hydrodynamic journal bearing, in order to determine the pressure fields, as well as the rotodynamic coefficients of rigidity and damping, used to forecast the behavior of a chumacera rotor system.

Chapter I presents a historical review of rotodynamic, considering the evolution of its study, it is also considered the beginning of the study of hydrodynamic journal bearing and various studies reported in the literature are announced.

Chapter II presents the deductions of the Navier-Stokes equations and the Reynolds lubrication equation elaborated by Dr. Ignacio Ramírez Vargas in his doctoral thesis "*Theory of pressurized journal bearing with punctual ports: case of the short chumacera*", the considerations to be able to classify a rubble are also present and the Sommerfeld number is described.

Chapter III determines the pressure fields for short hydrodynamic journal bearing and long hydrodynamic journal bearing, following a dimensionalization process to have a better management of the Reynolds lubrication equation, later different dimensionless variables are considered. Considering Ocvirk's solution for short journal bearing and Sommerfeld's substitution for long journal bearing it is possible to obtain the pressure fields and they are represented graphically by the Wolfram Mathematica computer program for each situation.

Chapter IV presents three semi-analytical and analytical proposals to solve the Reynolds lubrication equation in hydrodynamic supports of finite length, first a hybrid solution (numerical-analytical) is proposed, from a parabolic pressure proposal, validating the results with those existing in the literature. In the same way, a power series solution is proposed for the pressure in the lubricant film, an algorithm is generated for finite length journal bearing and the method is validated in the case of a short chumacera by determining its pressure field and its coefficients of rigidity and damping. Subsequently, an alternative solution is proposed from a product function of independent functions, which are determined separately, and a closed expression is found for the pressure field for journal bearing with finite L/D ratio, three examples are analyzed where the lubricant film has variations in its geometry (plane, exponential and cylindrical), the methodology is clearly described, and its validity is verified.

Hipótesis

La solución de la ecuación de la lubricación de Reynolds para chumaceras hidrodinámicas finitas mediante las propuestas de: Distribución parabólica de presión, Perturbación de la posición estacionaria y Producto de funciones a partir de condiciones específicas, permitirán encontrar la presión en la película lubricante, por lo tanto, se logrará calcular los campos de presión, determinar las fuerzas en la película lubricante y determinar los coeficientes rotodinámicos. De esta forma se podrán atenuar los problemas ocasionados en relación con las vibraciones a las que están sometidos de manera constante los equipos soportados por chumaceras hidrodinámicas, ya que la estabilidad de estos sistemas depende de los coeficientes de rigidez y amortiguamiento en el lubricante.

Objetivos generales

Obtener tres propuestas de solución semi-analíticas y analíticas de la ecuación de la lubricación hidrodinámica de Reynolds, mediante una propuesta de solución híbrida, perturbación de posición estacionaria y producto de funciones, que permitan la caracterización de chumaceras de longitud finita $\left(0.25 < \frac{L}{D} < 2.5\right)$.

Objetivos específicos

- 1.- Obtener el funcional asociado con la ecuación de la lubricación de Reynolds, por medio del cálculo integral con la finalidad de tener la energía mínima en el sistema.
- 2.- Minimizar el funcional asociado con la propuesta de presión para obtener un modelo diferencial (no lineal).
- 3.- Determinar la presión de la película lubricante para distintos valores $\left(\frac{L}{D}\right)$.

- 4.- Generar una expresión para conocer los incrementos del campo de presión a partir de una serie de potencias.
- 5.- Crear un algoritmo que permita obtener p_0 y los cambios de presión en chumaceras finitas.
- 6.- Proponer una solución alternativa para la ecuación de Reynolds a partir de una función producto de funciones independientes.
- 7.- Validar la propuesta de producto de funciones con geometrías diversas para el espesor de la película lubricante.

Capítulo I

Estado del arte

1.1.Introducción.

El progreso de la industria se ha incrementado notablemente en los últimos años de forma general y particularmente de la industria petrolera y de generación de energía eléctrica, de tal forma que la demanda de maquinaria de alta eficiencia en términos de velocidades de operación y capacidades de carga se ha visto en la necesidad de implementar nuevas especialidades necesarias para su desarrollo tecnológico, por estos motivos se ha hecho énfasis en la rotodinámica.

La rotodinámica es una disciplina que desempeña el análisis de la conducta dinámica de equipos rotatorios, esta disciplina se estructura con diversas áreas de investigación en donde toman importancia áreas como vibraciones, dinámica, hidrodinámica, mecánica de fluidos, entre otras.

Las turbomaquinas se conforman generalmente por un rotor, una alabe, un eje, un soporte hidrodinámico (chumacera). En donde de forma cotidiana las chumaceras fluidas son manipuladas para operaciones industriales de maquinaria rotatoria de gran peso. En el funcionamiento de estos soportes la película del fluido lubricante separa las superficies en movimiento, presentando propiedades de amortiguamiento y rigidez, estas propiedades pueden alterar de forma significativa el comportamiento de la maquinaria en sus velocidades críticas, teniendo como consecuencia desbalance, con la posibilidad de inducir inestabilidades y vibraciones, siendo una de las causas principales de la reducción de la vida útil y la falta de disponibilidad de la maquinaria rotatoria, de esta forma se presentan desgastes prematuros así como daños mecánicos severos a los equipos, una forma de poder atenuar y controlar la amplitud vibracional, radica en modelar correctamente la conducta dinámica de los soportes hidrodinámicos y junto con ello caracterizar correctamente la película de lubricante. La capacidad para soportar carga se debe a la generación de un campo de presión en la película del lubricante, debido al movimiento relativo entre el muñón y la chumacera. El campo de presión se genera por la formación de una cuña de lubricante,

arrastrando hacia el claro entre dos superficies convergentes. Esta cuña convergente se crea porque el eje no gira en forma concéntrica con respecto a la chumacera, sino que existe un desplazamiento relativo del centro del eje con respecto al centro de la chumacera y que se conoce como excentricidad.

Por lo anterior se genera la importancia de considerar las características propias de las chumaceras en el diseño y aplicación de la turbomaquinaria. La rigidez del sistema rotor chumacera está determinado por la rigidez de la chumacera actuando en serie con la del rotor, y el amortiguamiento del sistema, siendo determinado casi en su totalidad por las propiedades de amortiguamiento de la película lubricante en la chumacera, siendo este el punto de investigación del trabajo.

A continuación, se muestra un recorrido histórico de los principales acontecimientos que elaboraron diversos investigadores para formar lo que hoy se conoce como rotodinámica.

1.2. Antecedentes de la rotodinámica.

El área general de la rotodinámica históricamente ha involucrado una combinación de áreas separadas de vibraciones y análisis de chumaceras hidrodinámicas [1]. Mencionado lo anterior la rotodinámica estudia el comportamiento de los rotores, pero al igual que toda investigación ha pasado por un proceso para alcanzar un mejor conocimiento de los fenómenos que se presentan al trabajar con turbomaquinaria. Diversos investigadores han publicado análisis y conclusiones con relación a la rotodinámica siendo así que a principios de la revolución industrial se identificaron los principales problemas que se encuentran en la maquinaria rotatoria, que han llegado a representar mayores retos con forme se requieren máquinas más rápidas y potentes [2]. Rankine realizó el primer análisis de un eje giratorio en 1869 sobre el fenómeno de la primera frecuencia natural y predijo erróneamente que las máquinas no podían operar por encima de ésta [3]. DeLaval en la década de 1890 mostró la posibilidad de operar las máquinas a velocidades superiores de la primera frecuencia natural. la publicación, *On the centrifugal force on rotation shafts*, es considerada la primera publicación completamente dedicada a al rotodinámica [4]. La explicación de la teoría de velocidades críticas fue dada primero por Föppl en 1895, Belluzzo en 1905 y Stodola en 1927 [5]. Un avance significativo fue a finales del siglo XIX con las contribuciones de DeLaval y

otros investigadores. En 1883 DeLaval construyó la primera etapa de una turbina de vapor de reacción. Él fue el primero en utilizar un rotor rígido y posteriormente usó un rotor flexible y observó que era posible operar por encima de la velocidad crítica, operando a una velocidad de siete veces la velocidad crítica [6]. En un artículo relacionado con la teoría fundamental en rotodinámica, es acreditado como el desarrollador de las ecuaciones modernas en un rotor dinámico, que es mejor conocido como “modelo de Jeffcott” usado en el análisis de vibraciones de ejes rotatorios. El modelo consiste en un eje uniforme y simétrico soportado por chumaceras rígidas en cada extremo, con una masa concentrada en el centro [7].

1.3. Inicio del estudio de las chumaceras hidrodinámicas.

Los primeros estudios de un eje y una chumacera operando bajo condiciones hidrodinámicas fueron realizados por f. A. Von Pauli en 1849 y por G.A. Hirn en 1854. En 1883 el célebre ruso N. Petroff concluyó que la fricción en chumaceras se debía a un fenómeno hidrodinámico. Tower un inventor e ingeniero de ferrocarriles inglés demostró experimentalmente que la superficie de la chumacera y la del eje estaba separada por una película de aceite continua de fluido lubricante la cual soportaba la carga en la chumacera y reportó por primera vez a través de mediciones un campo de presión en el perfil de la chumacera [8]. Reynolds O. en 1886 desarrolló una expresión matemática a través de simplificar las ecuaciones de Navier-Stokes que fue capaz de demostrar los resultados experimentales obtenidos por Tower, Reynolds obtuvo la ecuación clásica de lubricación o ecuación de Reynolds, la cual describe la distribución de presiones del lubricante en la chumacera. La solución de la ecuación diferencial de Reynolds fue difícil y Arnold Sommerfeld en 1904 desarrolló una integración directa que permitió el análisis de chumaceras infinitamente largas, donde asumió que el gradiente de la presión axial es cero. Harrison en 1919, presentó un artículo donde se destaca que la fuerza generada por la presión en el fluido puede ser lo suficientemente grande para soportar la carga y prevenir el contacto entre la chumacera y el eje [9].

Ocvirk F. en 1952 presentó la solución de la ecuación de lubricación para una chumacera infinitamente corta, también llamada solución de Ocvirk, en la cual se asume que el gradiente

de presión en la dirección circunferencial es despreciable en comparación con el gradiente de presión en la dirección axial [10].

En 2001 y 2002 J.C. Gómez mancilla y V. Nosov desarrollaron expresiones analíticas que caracterizan el campo de presión del lubricante en estado estable en un rotor chumacera corta teniendo ejes desalineados angularmente. Esta solución analítica para el campo de presión usa una expresión mejorada de la película de lubricante, desarrollada en series de Taylor como función de los parámetros que geoméricamente caracterizan el no paralelismo de los ejes entre la chumacera y el muñón. Muestran que pequeños ángulos de desalineamiento son capaces de distorsionar los campos de presión significativamente reduciendo la capacidad de carga.

Por otra parte, en el 2006 el Dr. Alberto Antonio García; presento la tesis, “Investigación analítica y numérica de las propiedades dinámicas de chumaceras hidrodinámicas con y sin desalineamiento” para obtener el grado de doctor en ciencias. Desarrollando una serie de estudios basándose en métodos analíticos para poder obtener los coeficientes de amortiguamiento y rigidez de la película del lubricante de las chumaceras hidrodinámicas, exponiendo diferentes configuraciones y/o condiciones de estas. A la par efectuó la solución finita de la ecuación de Reynolds mediante algunos métodos numéricos, para encontrar los coeficientes rotodinámicos. Redactó y presentó los resultados que obtuvo a la serie de análisis y estudios que realizó; exponiendo las diferencias entre los métodos que implemento y argumentando progresos que puede llegar a tener. [11]

Para el 2007 el Dr. Ignacio Ramírez Vargas, mostraba su tesis, denominada “Teoría de Chumaceras Presurizadas con Puertos Puntuales: Caso de la Chumacera Corta”. En este trabajo, explica una modelo de chumacera presurizada, derivada y aproximada de la función Delta de Dirac; para representar el puerto de inyección de lubricante. Al conocer los campos de presión, pudo obtener las posiciones de equilibrio, fuerzas de presión, coeficientes rotodinámicos; para el caso clásico y el presurizado. [12]

En la actualidad diversas compañías, se dedican a la fabricación e investigación experimental, la que se menciona a continuación es la compañía Bently-Nevada en E.U.A.; la cual realizó experimentos con rotores, donde presurizaba externamente la chumacera; en un puerto simétrico de inyección. [13]

1.4. Chumaceras Hidrodinámicas.

Una chumacera hidrodinámica es el término más común para una chumacera de presión interna, siendo ésta en la que el eje de rotación “arrastra” el fluido en la dirección de giro para producir una película fluida. Este tipo de chumaceras a menudo tiene un sistema de suministro del lubricante a baja presión que no sobre pasa de 15 a 20 psi (103-138 KPa). La presión de suministro no está diseñada para contribuir a las propiedades roto-dinámicas de la chumacera de ninguna forma; si no que simplemente para un adecuado flujo a través de ella que el provee una película de refrigerante [14], y también es utilizado en gran parte, de maquinaria rotativa para soportar cargas axiales o simplemente una guía de transmisión de torque con un mínimo de pérdida de energía y desgaste entre las superficies de contacto.

La capacidad de carga es obtenida a través del campo de presión del lubricante dentro de la chumacera figura 1.1. El campo de presión es generado por la formación de una zona de presión del lubricante comúnmente llamada cuña, el cual es arrastrado hacia un claro de superficies convergentes. Esta zona se crea por que el muñón no gira concéntricamente (excentricidad) con respecto al centro de la chumacera, debido al transitorio se llega a un autoajuste cuando la carga del rotor se iguala a la fuerza causada por la cuña generada por el campo de presión del fluido [15].

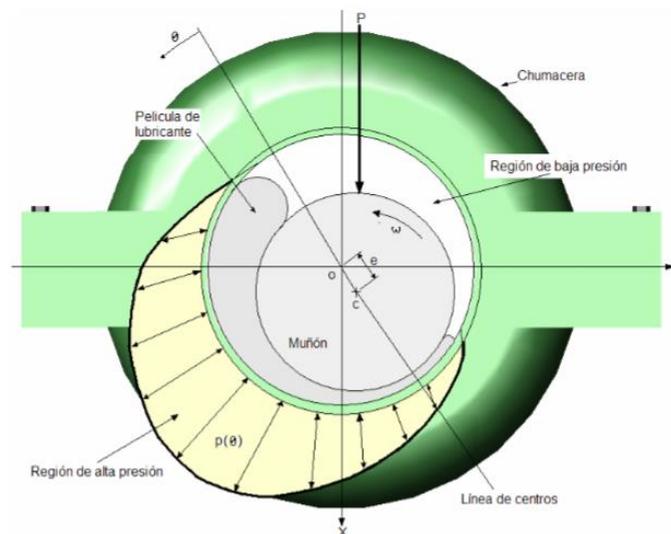


Figura 1.1 Presión hidrodinámica generada por la rotación del muñón en chumaceras cilíndrica [16].

Capítulo II

Marco Teórico

2.1. Rotodinámica.

La Rotodinámica analiza y predice el comportamiento dinámico de la maquinaria rotatoria, que implica una combinación de áreas separadas como: vibraciones, dinámica estructural e hidrodinámica. El comportamiento de estas máquinas incluye fenómenos físicos, los cuales pueden interferir con el funcionamiento adecuado de las máquinas y pueden incluso llevar a catastróficas fallas si no se identifican y corrigen debidamente [12].

La estructura que se encuentra en contacto y donde se apoya el eje de la maquinaria a través de las cuales se transmite una carga se le conoce como chumacera; existen diversos tipos de chumaceras correspondientes a la figura.2.1.

- 1.- Chumaceras radiales, que soportan cargas radiales por ejes rotantes o gorrónes.
- 2.- Chumaceras axiales o de empuje, que soportan cargas axiales transmitidas por ejes verticales rotantes o pivotes.
- 3.- Cojinetes de guías, que soportan cargas de distintos tipos, guiando los elementos móviles con trayectoria rectilínea, como son los patines de deslizamiento.

En este trabajo solo se estudiará la física y el comportamiento del primer tipo de chumacera (chumaceras radiales). Las porciones cilíndricas de la flecha que están en contacto con los cojinetes se conocen como muñones.

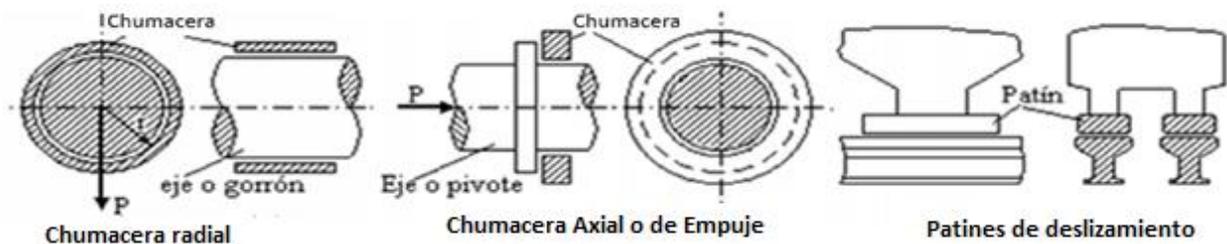


Figura 2.1 Tipos de chumaceras según la carga que soportan [17].

Dependiendo de la película lubricante se pueden clasificar en hidrodinámicas, hidrostáticas o híbridas; esta película lubricante presenta propiedades de amortiguamiento y rigidez cuyo comportamiento se rige mediante las ecuaciones de continuidad, las ecuaciones de Navier –

Stokes y las ecuaciones de energía, dichas ecuaciones forman un sistema de ecuaciones diferenciales parciales acopladas. A causa de los términos no lineales en estas ecuaciones, se vuelven muy complejas de resolver y por tal motivo los métodos analíticos dan muy pocas soluciones y requieren de métodos numéricos y de programación especializada para su resolución.

2.2.Ecuaciones de Navier-Stokes.

La distribución de presión y la capacidad de carga en un rodamiento hidrodinámico son analizadas y resueltas usando ecuaciones dinámicas de fluido clásicas. En una película delgada de fluido, la viscosidad es la propiedad más importante determina la magnitud de la curva presión, mientras el efecto de inercia del fluido es relativamente pequeño o insignificante [18]. Gran parte de la investigación posterior se ha dedicado a la ecuación de Reynolds debido a que forma la base de la mayoría de las investigaciones analíticas en lubricación hidrodinámica. La ecuación de Reynolds puede derivarse de las ecuaciones de Navier - Stokes, que son las ecuaciones fundamentales del movimiento fluido. La derivación de las ecuaciones de Navier-Stokes se basa en varios supuestos, que se incluyen en la lista de supuestos que forman la base de la teoría de la lubricación hidrodinámica. Una suposición importante para la derivación de las ecuaciones de Navier-Stokes es que existe una relación lineal entre los componentes respectivos del esfuerzo y la tasa de deformación en el fluido. En el caso general del flujo tridimensional, hay nueve componentes de esfuerzo normal. Las direcciones de los componentes de los esfuerzos se muestran en la figura 2.2 [17].

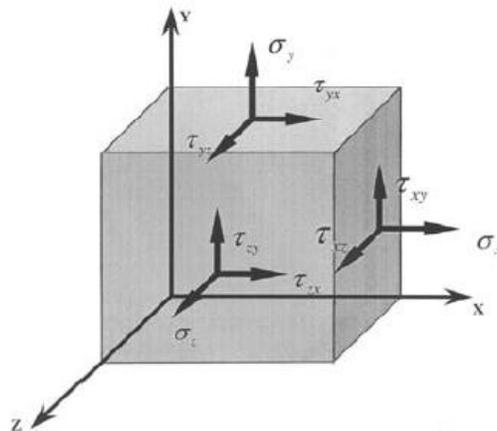


Figura 2.2 Componentes de esfuerzos que actúan sobre un elemento fluido rectangular [17].

Los componentes $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ son los esfuerzos de tensión o compresión (si el signo es negativo), como se muestra en la figura 2.2. Sin embargo, los componentes $\tau_{xy}, \tau_{zy}, \tau_{xz}$ son esfuerzos de cizalla paralelas a las superficies. Es posible demostrar por consideraciones de equilibrio que los componentes de cizallado son simétricos:

$$\tau_{xy} = \tau_{yx}, \quad \tau_{zy} = \tau_{yz}, \quad \tau_{xz} = \tau_{zx} \quad (2.1)$$

Debido a la simetría, el número de componentes en los esfuerzos se reduce de nueve a seis. En coordenadas rectangulares los seis componentes de esfuerzo son:

$$\sigma_x = -p + 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} \quad (2.2a)$$

$$\sigma_y = -p + 2\mu \frac{\partial v}{\partial y} \quad (2.2b)$$

$$\sigma_z = -p + 2\mu \frac{\partial w}{\partial z} \quad (2.2c)$$

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = \mu \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \quad (2.2d)$$

$$\tau_{yz} = \tau_{zy} = \mu \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) \quad (2.2e)$$

$$\tau_{zx} = \tau_{xz} = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \quad (2.2f)$$

Un fluido que puede ser descrito por Eq. (2.2 a-f) se conoce como fluido newtoniano. Esta ecuación asume una relación lineal entre los componentes de esfuerzo y velocidad de deformación. Para la mayoría de los lubricantes, tal relación lineal es una aproximación adecuada. Sin embargo, en condiciones extremas, por ejemplo, una presión muy alta de contactos puntuales o de línea, esta suposición ya no es válida. Una suposición que se hace por conveniencia es que la viscosidad, μ , del lubricante es constante. Además, los aceites de lubricación son prácticamente incompresibles, y esta propiedad simplifica las ecuaciones de Navier-Stokes porque se puede suponer que la densidad, ρ , es constante. Sin embargo, esta suposición no se puede aplicar a los rodamientos de aire [17].

En películas delgadas la componente de velocidad v es pequeña en comparación con u y w , y dos componentes de cizallamiento se pueden aproximar de la siguiente manera:

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = \mu \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \approx \mu \frac{\partial u}{\partial y} \quad (2.3a)$$

$$\tau_{yz} = \tau_{zy} = \mu \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) \approx \mu \frac{\partial w}{\partial y} \quad (2.3b)$$

Las ecuaciones de Navier-Stokes se basan en el equilibrio de fuerzas que actúa sobre un elemento fluido pequeño e infinitesimal que tiene la forma de un paralelogramo rectangular con dimensiones dx , dy y dz , como se muestra en la figura 2.2; sin embargo, el equilibrio general de fuerzas es de tres dimensiones, en las direcciones x , y y z . Las fuerzas superficiales son el producto de los esfuerzos o presiones y las áreas correspondientes.

Cuando el fluido está en reposo hay una presión hidrostática uniforme. Sin embargo, cuando hay movimiento del fluido, hay esfuerzos σ'_x , σ'_y , σ'_z que están por encima de la presión hidrostática (promedio), p . Cada uno de los tres esfuerzos es la suma de la presión media y el esfuerzo normal (por encima de la presión media), de la siguiente manera:

$$\sigma_x = -p + \sigma'_x, \quad \sigma_y = -p + \sigma'_y, \quad \sigma_z = -p + \sigma'_z \quad (2.4)$$

De acuerdo con la segunda ley de Newton, la suma de todas las fuerzas que actúan sobre un elemento fluido, incluidas las fuerzas de la superficie en forma de esfuerzo y fuerzas corporales como la fuerza gravitacional, es igual al producto de la masa y la aceleración (ma) del elemento fluido. Después de dividir por el volumen del elemento fluido, las ecuaciones del equilibrio de fuerza se convierten en:

$$\rho \frac{du}{dt} = X - \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial \sigma'_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} \quad (2.5a)$$

$$\rho \frac{dv}{dt} = Y - \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma'_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} \quad (2.5b)$$

$$\rho \frac{dw}{dt} = Z - \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma'_z}{\partial z} \quad (2.5c)$$

Aquí, p es la presión, u , v y w son los componentes de velocidad en las direcciones x , y y z , respectivamente. Las tres fuerzas X , Y , Z son los componentes de una fuerza corporal, por unidad de volumen, como la fuerza de gravedad que está actuando sobre el fluido. De acuerdo con los supuestos, la densidad del fluido, y la viscosidad, se consideran constantes.

Para un flujo incompresible, la ecuación de continuidad, que se deriva de la conservación de la masa, es:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (2.6)$$

Después de sustituir los componentes de tensión de Eq. (2.2) en Eq. (2.5), utilizando la ecuación de continuidad (2.6) y escribiendo en su totalidad la derivada de tiempo convectiva de los componentes de aceleración, se obtienen las siguientes ecuaciones de Navier-Stokes en coordenadas cartesianas para un fluido newtoniano incompresible y de viscosidad constante:

$$\rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) = X - \frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \quad (2.7a)$$

$$\rho \left(\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} \right) = Y - \frac{\partial p}{\partial y} + \mu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) \quad (2.7b)$$

$$\rho \left(\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right) = Z - \frac{\partial p}{\partial z} + \mu \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) \quad (2.7c)$$

Las ecuaciones de Navier-Stokes se pueden resolver para la distribución de velocidad. La velocidad se describe por sus tres componentes, u , v y w , que son funciones de la ubicación (x, y, z) y el tiempo. En general, los problemas de flujo de fluidos tienen cuatro incógnitas: u , v y w y la distribución de presión, p . Se requieren cuatro ecuaciones para resolver las cuatro funciones desconocidas. Las ecuaciones son las tres ecuaciones de Navier-Stokes, la cuarta ecuación es la ecuación de continuidad (2.6) [13].

2.3. La ecuación de la lubricación de Reynolds.

La lubricación hidrodinámica implica un flujo de película delgada, y en la mayoría de los casos la inercia del fluido y las fuerzas del cuerpo son muy pequeñas e insignificantes en comparación con las fuerzas viscosas. Por lo tanto, en un flujo de película delgada, los términos inerciales [todos los términos en el lado izquierdo de Eqs. (2.7 a-c) puede ser ignorado, así como las fuerzas del cuerpo X, Y, Z . Es bien sabido en dinámica de fluidos que la relación de la magnitud de los términos inerciales en relación con los términos de

viscosidad en Eqs. (2.7 a-c) es del orden de magnitud del número de Reynolds, Re . Para un flujo de lubricación (flujo de película delgada), $Re \ll 1$, las ecuaciones de Navier-Stokes se reducen a la siguiente forma simple:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \quad (2.8a)$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = \mu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) \quad (2.8b)$$

$$\frac{\partial p}{\partial z} = \mu \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) \quad (2.8c)$$

Estas ecuaciones indican que la viscosidad es el efecto dominante en la determinación de la distribución de presión en un rodamiento de película fluida. Los componentes de velocidad del flujo en una película delgada son principalmente u y w en las direcciones x y z , respectivamente. Estas direcciones están a lo largo de la capa de película fluida. Al mismo tiempo, hay un componente de velocidad relativamente muy lenta, v , en la dirección y a través de la capa de película fluida. Por lo tanto, el gradiente de presión en la dirección y de la Eq. (2.8b) es muy pequeño y puede ser ignorado. Además, Eqs. (2.8a y c) pueden simplificarse aún más porque el orden de magnitud de las dimensiones de la película fluida delgada en las direcciones x y z es mucho mayor que en la dirección y y a través del espesor de la película. Los órdenes de magnitud son:

$$x = O(B) \quad (2.9a)$$

$$y = O(h) \quad (2.9b)$$

$$z = O(L) \quad (2.9c)$$

Aquí, el símbolo O representa el orden de magnitud. La dimensión B es la longitud del rodamiento a lo largo de la dirección del movimiento (dirección x), y h es un espesor medio de la película fluida. El ancho L está en la dirección z de un control deslizante inclinado. En un soporte hidrodinámico, L está en la dirección z axial y se conoce como la *longitud* del rodamiento.

En rodamientos hidrodinámicos, el espesor de la película fluida es muy pequeño en comparación con las dimensiones del rodamiento, $h \ll B$ y $h \ll L$. Mediante el uso de

Eqs. (5-8b), se puede hacer una comparación entre los órdenes de magnitud de las segundas derivadas de los diversos términos en el lado derecho de Eq. (5-7a), que son los siguientes:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = O\left(\frac{U}{h^2}\right) \quad (2.10a)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = O\left(\frac{U}{B^2}\right) \quad (2.10b)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = O\left(\frac{U}{L^2}\right) \quad (2.10c)$$

En los rodamientos convencionales de longitud finita, las relaciones de dimensiones son de los siguientes órdenes:

$$\frac{L}{B} = O(1) \quad (2.11a)$$

$$\frac{h}{B} = O(10^{-3}) \quad (2.11b)$$

Las ecuaciones (2.9 a-c), (2.10 a-c) y (2.11 a, b) indican que el orden del término $\partial^2 u / \partial y^2$ es mayor por 10^6 , en comparación con el orden de los otros dos términos, $\partial^2 u / \partial x^2$ y $\partial^2 u / \partial z^2$. Por lo tanto, los dos últimos términos pueden ser descuidados en comparación con el primero en Eq. (2.8a). De la misma manera, solo el término $\partial^2 w / \partial y^2$ se conserva en Eq. (2.8c). De acuerdo con los supuestos, el gradiente de presión a través del espesor de la película, $\frac{\partial p}{\partial y}$, es insignificante, y las ecuaciones de Navier-Stokes se reducen a las siguientes dos ecuaciones simplificadas:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad \text{and} \quad \frac{\partial p}{\partial z} = \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \quad (2.12)$$

En un rodamiento largo, hay un gradiente de presión significativo solo en la dirección x ; sin embargo, para un rodamiento de longitud finita, hay un gradiente de presión en las direcciones x y z , y las dos Eqs. (2.12) son necesarias para resolver las distribuciones de flujo y presión. Las dos Eqs. (2.12) junto con la continuidad Eq. (2.6) y la condición límite del flujo se utilizan para derivar la ecuación de Reynolds. La derivación de la ecuación de

Reynolds se incluye en varios libros dedicados al análisis de la lubricación hidrodinámica ver Pinkus (1966) y Szeri (1980) [19]. La ecuación de Reynolds es ampliamente utilizada para resolver la distribución de presión de rodamientos hidrodinámicos de longitud finita. La ecuación de Reynolds para el fluido newtoniano incompresible y de viscosidad constante en un espacio libre delgado entre dos superficies rígidas de movimiento relativo está dada por:

$$\frac{\partial p}{\partial x} \left(\frac{h^3}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{h^3}{\mu} \frac{\partial p}{\partial z} \right) = 6(U_1 - U_2) \frac{\partial h}{\partial x} + 6 \frac{\partial}{\partial x} (U_1 + U_2) + 12(V_2 - V_1) \quad (2.13)$$

Los componentes de velocidad de las dos superficies que forman los límites de la película se muestran en la figura 2.3. Los componentes de velocidad tangencial, U_1 y U_2 , en la dirección x son de las superficies deslizantes inferior y superior, respectivamente (dos límites de película fluida). Los componentes de velocidad normal, en la dirección y , V_1 y V_2 , son de los límites inferior y superior, respectivamente.

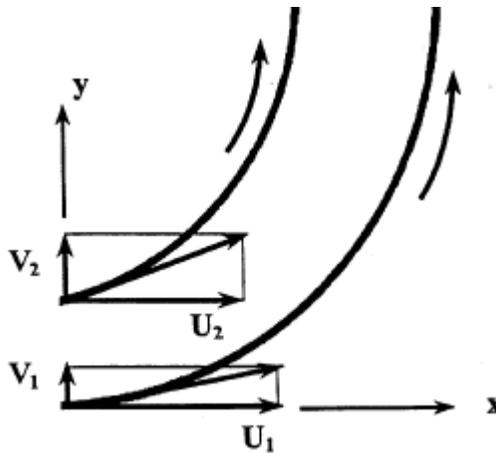


Figura 2.3 Direcciones de los componentes de velocidad de los límites fluido-película en la ecuación de Reynolds. [17]

En un rodamiento hidrodinámico, estos componentes son funciones de x (o ángulo θ) alrededor del rodamiento. El lado derecho de Eq. (2.13) debe ser negativo para dar como resultado una onda de presión positiva y capacidad de carga. Cada uno de los tres términos en el lado derecho de Eq. (2.13) tiene un significado físico con respecto a la generación de la onda de presión. Cada término es una acción que representa un tipo específico de movimiento relativo de las superficies. Cada acción da como resultado una presión positiva en la película

fluida. Las diversas acciones se muestran en la figura 2.4. Estas tres acciones pueden estar presentes en un rodamiento simultáneamente, una a la vez o en cualquier otra combinación.

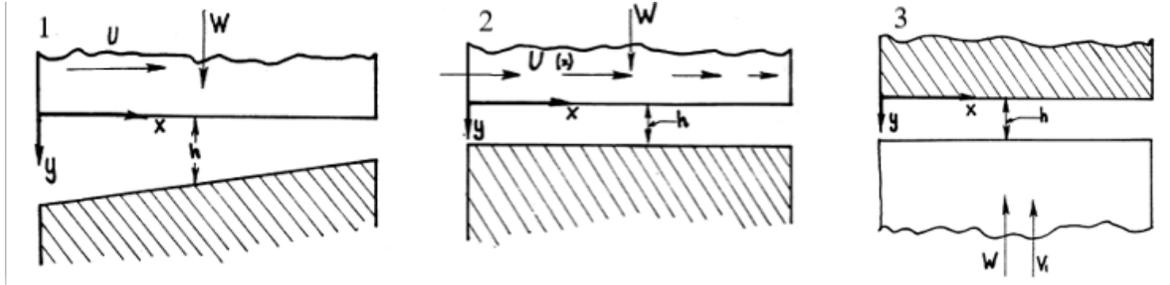


Figura 2.4 Acciones de película viscosa que resultan en una onda de presión positiva. 1. Acción de cuña viscosa. 2. Compresión elástica en el límite. 3. Acción de película de compresión [17].

Las siguientes son las diversas acciones.

Acción de cuña viscosa: Esta acción genera una onda de presión positiva arrastrando el fluido viscoso a una cuña convergente.

Estiramiento elástico o compresión de la superficie límite: Esta acción genera una presión positiva por compresión del límite. La compresión de la superficie reduce el volumen de holgura y el fluido viscoso se exprime, lo que resulta en un aumento de la presión. Esta acción es insignificante en rodamientos rígidos prácticos. El estiramiento continuo o la compresión de los límites no existen en la operación de estado estacionario. Puede actuar solo como un efecto transitorio, en condiciones dinámicas, para un material portador de elastómero. Esta acción generalmente no se considera para materiales de rodamientos rígidos.

Acción de squeeze-film: La acción de compresión genera una presión positiva por reducción del volumen de la película fluida. El fluido viscoso incompresible se exprime a través del espacio delgado. El espacio libre delgado tiene resistencia al flujo de la película de compresión, lo que resulta en una acumulación de presión para superar la resistencia del flujo. En la mayoría de los rodamientos prácticos, las superficies son rígidas y no hay acción de estiramiento o compresión. En ese caso, la ecuación de Reynolds para un fluido incompresible y una viscosidad constante se reduce a:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{h^3}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{h^3}{\mu} \frac{\partial p}{\partial z} \right) = 6(U_1 - U_2) \frac{\partial h}{\partial x} + 12(V_2 - V_1) \tag{2.14}$$

Como se indicó anteriormente, los dos términos de la derecha deben ser negativos para dar lugar a una onda de presión positiva. En el lado derecho de la ecuación de Reynolds, el primer término de movimiento deslizante relativo ($U_1 - U_2$) describe un efecto de cuña viscosa. Requiere superficies inclinadas, $\partial h / \partial x$, para generar una acción de cuña de película fluida que resulte en una onda de presión. La presión positiva se genera si el espesor de la película se reduce en la dirección x (*negativo* $\partial h / \partial x$).

El segundo término en el lado derecho de la ecuación de Reynolds describe una acción de película de compresión. La diferencia en la velocidad normal ($V_2 - V_1$) representa el movimiento de las superficies entre sí, lo que se conoce como acción de película de compresión. Una presión positiva se acumula si ($V_2 - V_1$) es negativo y las superficies se acercan entre sí. La ecuación de Reynolds indica que un efecto de película de compresión es un efecto viscoso que puede generar una onda de presión en la película fluida, incluso en el caso de límites paralelos.

Es importante mencionar que la ecuación de Reynolds es objetiva, en el sentido de que la distribución de presión debe ser independiente de la selección del sistema de coordenadas. En la figura 2.3 las coordenadas son estacionarias y las dos superficies se mueven en relación con el sistema de coordenadas. Sin embargo, la misma distribución de presión debe resultar si las coordenadas están unidas a una superficie y se mueven y giran con ella. Para mayor comodidad, en la mayoría de los problemas seleccionamos un sistema de coordenadas estacionarias donde la coordenada x está a lo largo de la superficie del rodamiento y la coordenada y es normal a esta superficie. En ese caso, la superficie inferior tiene solo una velocidad tangencial, U_1 , y no hay un componente normal, $V_1 = 0$.

El valor de cada uno de los componentes de velocidad del límite del fluido, U_1, U_2, V_1, V_2 , depende de la selección del sistema de coordenadas. Las velocidades de superficie en un sistema de coordenadas estacionarias no serían las mismas que en un sistema de coordenadas en movimiento. Sin embargo, las diferencias de velocidad en el lado derecho de la ecuación de Reynolds, que representan el movimiento relativo, son independientes de la selección del sistema de coordenadas. La velocidad del centro debe considerarse para la derivación de los términos del lado derecho de la ecuación de Reynolds. [17].

2.4. Deducción de la ecuación de Reynolds.

Para comprender mejor cada término que aparecerá en la ecuación de Reynolds, es importante mostrar la ubicación de las variables que intervienen en una chumacera hidrodinámica. En la figura 2.5 se muestra una chumacera junto con el muñón en reposo.

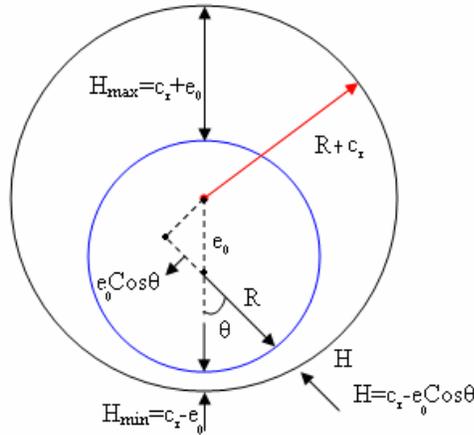


Figura 2.5 Nomenclatura de una chumacera Hidrodinámica en reposo.

En donde R es el radio del muñón, C_r representa el claro radial (diferencia entre el radio de la chumacera y del muñón), e_0 es la excentricidad medida del centro de la chumacera al centro del muñón, H es el espesor de lubricante. Para comenzar es necesario adimensionalizar las ecuaciones de Navier-Stokes para poder trabajar en forma general; éstas se repiten a continuación:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + v \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + w \cdot \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \gamma \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \quad (2.15)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \cdot \frac{\partial v}{\partial x} + v \cdot \frac{\partial v}{\partial y} + w \cdot \frac{\partial v}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \gamma \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) \quad (2.16)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + u \cdot \frac{\partial w}{\partial x} + v \cdot \frac{\partial w}{\partial y} + w \cdot \frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \gamma \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) \quad (2.17)$$

Introduciendo los siguientes parámetros adimensionales:

$$\bar{x} = \frac{x}{R}, \quad \bar{y} = \frac{y}{c_r}, \quad \bar{z} = \frac{z}{R} \quad (2.18)$$

$$\bar{u} = \frac{u}{\omega R}, \quad \bar{v} = \frac{v}{\omega C_r}, \quad \bar{w} = \frac{w}{\omega R}, \quad \tau = \omega t \quad (2.19)$$

Ahora es necesario sustituir (2.18) y (2.19) en las ecuaciones de Navier-Stokes, para mostrarlo se calcularán todos los términos del primer y segundo miembro de (2.15) como se muestra a continuación:

Para el primer miembro:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial(\omega R \bar{u})}{\partial\left(\frac{\tau}{\omega}\right)} = \omega^2 R \frac{\partial \bar{u}}{\partial \tau} \quad (2.21)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial(\omega R \bar{u})}{\partial(R \bar{x})} = \omega \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} \quad (2.22)$$

$$u \frac{\partial u}{\partial x} = \omega^2 R \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} \quad (2.23)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial(\omega R \bar{u})}{\partial(C_r \bar{y})} = \omega \left(\frac{R}{C_r}\right) \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} \quad (2.24)$$

$$v \frac{\partial u}{\partial y} = \omega^2 R \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} \quad (2.25)$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial(\omega R \bar{u})}{\partial(R \bar{z})} = \omega \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{z}} \quad (2.26)$$

$$w \frac{\partial u}{\partial z} = \omega^2 R \bar{w} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{z}} \quad (2.27)$$

Para el segundo miembro:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2(\omega R \bar{u})}{\partial(R \bar{x})^2} = \frac{\omega}{R} \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{x}^2} \quad (2.28)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2(\omega R \bar{u})}{\partial(C_r \bar{y})^2} = \frac{\omega}{R} \left(\frac{R}{C_r}\right)^2 \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{y}^2} \quad (2.29)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{\partial^2(\omega R \bar{u})}{\partial(R \bar{z})^2} = \frac{\omega}{R} \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{z}^2} \quad (2.30)$$

Haciendo que:

$$\bar{p} = \frac{p}{P_{dim}}; \quad \text{en donde:} \quad P_{dim} = \rho \gamma \omega \left(\frac{R}{C_r}\right)^2 \quad (2.31)$$

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = \left(\frac{1}{\rho}\right) \rho \gamma \omega \left(\frac{R}{C_r}\right)^2 \frac{\partial \bar{p}}{\partial(R \bar{x})} = \gamma \frac{\omega}{R} \left(\frac{R}{C_r}\right)^2 \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}} \quad (2.32)$$

Sustituyendo en la primera ecuación de Navier-Stokes (2.15) se tendrá:

$$\omega^2 R \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial \tau} + \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} + \bar{w} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{z}} \right) = -\gamma \frac{\omega}{R} \left[\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{x}^2} + \left(\frac{R}{C_r} \right)^2 \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{y}^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{z}^2} \right] \quad (2.33)$$

Procediendo de igual forma, se tendrá para la segunda ecuación de Navier-Stokes (2.16):

Para el primer miembro:

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial(\omega C_r \bar{v})}{\partial \left(\frac{\tau}{\omega} \right)} = \omega^2 C_r \frac{\partial \bar{v}}{\partial \tau} \quad (2.34)$$

$$u \frac{\partial v}{\partial x} = \omega^2 C_r \bar{u} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{x}} \quad (2.35)$$

$$v \frac{\partial v}{\partial y} = \omega^2 C_r \bar{v} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} \quad (2.36)$$

$$w \frac{\partial v}{\partial z} = \omega^2 C_r \bar{w} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{z}} \quad (2.37)$$

Para el segundo miembro:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \frac{\partial^2(\omega C_r \bar{v})}{\partial (R \bar{x})^2} = \frac{C_r \omega}{R^2} \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \bar{x}^2} \quad (2.38)$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = \frac{\partial^2(\omega C_r \bar{v})}{\partial (C_r \bar{y})^2} = \frac{\omega}{C_r} \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \bar{y}^2} \quad (2.39)$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = \frac{\partial^2(\omega C_r \bar{v})}{\partial (R \bar{z})^2} = \frac{\omega C_r}{R^2} \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \bar{z}^2} \quad (2.40)$$

Haciendo que:

$$\bar{p} = \frac{p}{P_{dim}}; \quad \text{en donde:} \quad P_{dim} = \rho \gamma \omega \left(\frac{R}{C_r} \right)^2$$

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = \left(\frac{1}{\rho} \right) \rho \gamma \omega \left(\frac{R}{C_r} \right)^2 \frac{\partial \bar{p}}{\partial (C \bar{y})} = \gamma \frac{\omega}{C_r} \left(\frac{R}{C_r} \right)^2 \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{y}} \quad (2.41)$$

Sustituyendo en la segunda ecuación de Navier-Stokes (2.16)

$$\omega^2 C_r \left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial \tau} + \bar{u} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} + \bar{w} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{z}} \right) = -\gamma \frac{\omega}{C_r} \left(\frac{R}{C_r} \right)^2 \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{y}} + \gamma \frac{C_r \omega}{R^2} \left[\frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \bar{z}^2} \right] + \gamma \frac{\omega}{C_r} \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \bar{y}^2} \quad (2.42)$$

Análogamente para la tercera ecuación se tendrá:

$$\omega^2 R \left(\frac{\partial \bar{w}}{\partial \tau} + \bar{u} \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{y}} + \bar{w} \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{z}} \right) = -\gamma \frac{\omega}{R} \left(\frac{R}{C_r} \right)^2 \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{z}} + \gamma \frac{\omega}{R} \left[\frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \bar{x}^2} + \left(\frac{R}{C_r} \right)^2 \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \bar{y}^2} + \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \bar{z}^2} \right] \quad (2.43)$$

Multiplicando a las ecuaciones resultantes por el factor:

$$\frac{1}{\frac{\gamma\omega(R)}{R}\left(\frac{R}{C_r}\right)^2}, \text{ y recordando que: } Re = \frac{\rho u L}{\mu} = \frac{\omega}{\gamma}, \text{ y además: } Re_* = Re \left(\frac{C_r}{R}\right)^2 R^2$$

Se puede escribir:

$$Re_* \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial \tau} + \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} + \bar{w} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{z}} \right) = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}} + \left(\frac{C_r}{R}\right)^2 \left[\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{z}^2} \right] + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{y}^2} \quad (2.44)$$

$$Re_* \left(\frac{C_r}{R}\right)^2 \left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial \tau} + \bar{u} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} + \bar{w} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{z}} \right) = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{y}} + \left(\frac{C_r}{R}\right)^2 \left[\frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \bar{z}^2} \right] + \left(\frac{C_r}{R}\right)^2 \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \bar{y}^2} \quad (2.45)$$

$$Re_* \left(\frac{\partial \bar{w}}{\partial \tau} + \bar{u} \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{y}} + \bar{w} \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{z}} \right) = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{z}} + \left(\frac{C_r}{R}\right)^2 \left[\frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \bar{z}^2} \right] + \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \bar{y}^2} \quad (2.46)$$

Notando que para una chumacera debe cumplirse que:

$$\frac{C_r}{R} \cong 10^{-3}, \quad Re_* < 1 \quad (2.47)$$

Entonces las ecuaciones (2.44), (2.45) y (2.46) toman la forma:

$$\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}} = \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{y}^2} \quad (2.48)$$

$$\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{y}} = 0 \quad (2.49)$$

$$\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{z}} = \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \bar{y}^2} \quad (2.50)$$

De la segunda ecuación se puede notar que:

$$\bar{p}(\bar{y}) = \text{constante}, \text{ o bien } \bar{p} = \bar{p}(\bar{x}, \bar{z}).$$

Regresando a las variables adimensionales de las ecuaciones restantes, se tendrá:

$$\frac{1}{u} \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (2.51)$$

$$\frac{1}{u} \frac{\partial p}{\partial z} = \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \quad (2.52)$$

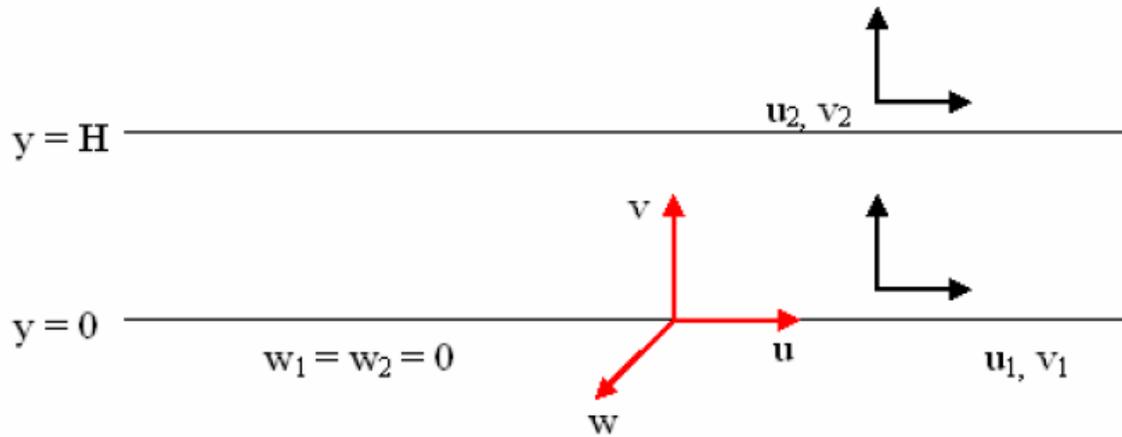


Figura 2.6 Frontera de una chumacera hidrodinámica [12].

Integrando dos veces a (2.51) y usando los valores de la frontera en la chumacera (figura 2.6), se puede escribir:

$$u(y) = \frac{1}{2\mu} \frac{\partial p(x,z)}{\partial x} y(y - H) + c_1 y + c_2, \quad u(0) = u_1, \quad u(H) = u_2 \quad (2.53)$$

Donde:

$$u(y) = \frac{1}{2\mu} \frac{\partial p(x,z)}{\partial x} y(y - H) + \frac{u_2 - u_1}{H} y + u_1 \quad (2.53)$$

Integrando dos veces a (2.52) se tendrá:

$$w(y) = \frac{1}{2\mu} \frac{\partial p(x,z)}{\partial x} y(y - H), \quad w(0) = w(H) = 0, \quad c_1 = c_2 = 0 \quad (2.54)$$

De la ecuación de continuidad:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (2.55)$$

O bien:

$$-\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} \quad (2.56)$$

Notar que:

$$u_1 = u_1(x, z)$$

$$u_2 = u_2(x, z)$$

$$H = H(x, z)$$

Sustituyendo en la ecuación continuidad

$$-\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left[\underbrace{\frac{1}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial x} y(y-H) + \frac{u_2 - u_1}{H} y + u_1}_{u(y)} \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[\underbrace{\frac{1}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial z} y(y-H)}_{w(y)} \right] \quad (2.57)$$

Integrando a (2.57) con respecto de “y”:

$$-\int \frac{\partial v}{\partial y} dy = \int_0^{H(x,z)} \frac{\partial}{\partial x} [u(y)] dy + \int_0^{H(x,z)} \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{1}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial z} y(y-H) \right] dy \quad (2.58)$$

O bien:

$$\int_0^{r(\alpha)} \frac{\partial f(x, \alpha)}{\partial \alpha} dx = \frac{\partial}{\partial \alpha} \int_0^{r(\alpha)} f(x, \alpha) dx - f(r(\alpha), \alpha) \frac{\partial r}{\partial \alpha} \quad (2.59)$$

Identificando las variables:

$$x \rightarrow y$$

$$r(\alpha) \rightarrow H(x, z)$$

$$\alpha \rightarrow x, z$$

Aplicando (2.59) al primer término del segundo miembro de (2.58):

$$\int_0^H \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{1}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial x} y(y-H) + \frac{u_2 - u_1}{H} y + u_1 \right] dy = \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{1}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial x} \int_0^H y(y-H) dy + \frac{u_2 - u_1}{H} \int_0^H y dy + u_1 \int_0^H dy \right] - u_2 \frac{\partial H}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{1}{2\mu} \cdot \frac{H^3}{6} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{u_1 + u_2}{2} H \right] - u_2 \frac{\partial H}{\partial x} \quad (2.60)$$

De manera similar, aplicando (2.59) al segundo término del segundo miembro de (2.58):

$$\int_0^{H(x,z)} \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{1}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial z} y(y-H) \right] dy = -\frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{1}{2\mu} \cdot \frac{H^3}{6} \frac{\partial p}{\partial z} \right] \quad (2.61)$$

Finalmente, sustituyendo en (2.58):

$$v_1 - v_2 = -\frac{1}{2\mu} \frac{\partial}{\partial x} \left[H^3(x, z) \cdot \frac{\partial p}{\partial x} \right] - \frac{1}{2\mu} \frac{\partial}{\partial z} \left[H^3(x, z) \cdot \frac{\partial p}{\partial z} \right] + H \left[\frac{u_1 + u_2}{2} H \right] +$$

$$\frac{u_1+u_2}{2} \frac{\partial H}{\partial x} - u_2 \frac{\partial H}{\partial x} \tag{2.52}$$

Reordenando se obtiene la ecuación de Reynolds:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(H^3 \cdot \frac{\partial p}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(H^3 \cdot \frac{\partial p}{\partial z} \right) = \overbrace{12\mu(v_2 - v_1)}^{(estrechamiento)} + \overbrace{6\mu(u_1 - u_2)}^{(cuña)} \frac{\partial H}{\partial x} + \overbrace{6\mu H \frac{\partial}{\partial x} (u_1 + u_2)}^{(extensión)} \tag{2.63}$$

Ecuación de Reynolds $H=f(x,z)$

2.5.Ecuación de Reynolds en coordenadas cilíndricas.

En esta sección se mostrará el desarrollo completo elaborado por el Dr. Ignacio Ramírez Vargas en el desarrollo de su tesis doctoral “*Teoría de chumaceras presurizadas con puertos puntuales: Caso de la chumacera corta*” para transformar la ecuación de Reynolds a coordenadas cilíndricas, recordar que la chumacera tiene la forma de un cilindro y esto hará que los análisis y desarrollos posteriores sean más fáciles de realizar. En la figura 2.7 se muestra el espesor de la película de lubricante H en el sistema de coordenadas cartesiano, el eje x. coincide con la superficie en reposo de la chumacera, por lo que ahí las velocidades son iguales a cero [12].

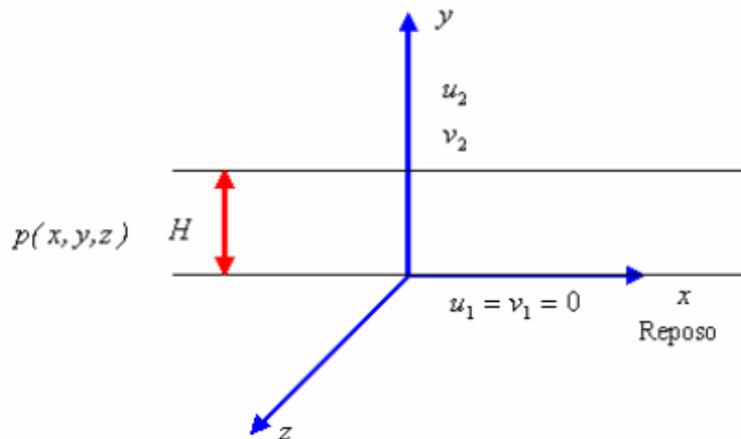


Figura 2.7 Espesor de la película lubricante en la chumacera [12].

Por lo anterior, la ecuación de Reynolds (A.58) puede escribirse como:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{H^3}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{H^3}{\mu} \frac{\partial p}{\partial z} \right) = 12v_2 - 6u_2 \frac{\partial H}{\partial x} + 6H \frac{\partial u_2}{\partial x} \tag{2.64}$$

El espesor de la película del lubricante va cambiando a lo largo de la circunferencia de la chumacera, dando como resultado que existan posiciones para las cuales toma un valor máximo y mínimo respectivamente. En la figura 2.7 aparece una chumacera junto con el muñón para una posición arbitraria, en donde O representa el centro de la chumacera y J es el centro del muñón, S es un punto arbitrario en la película de lubricante y φ es el ángulo de equilibrio.

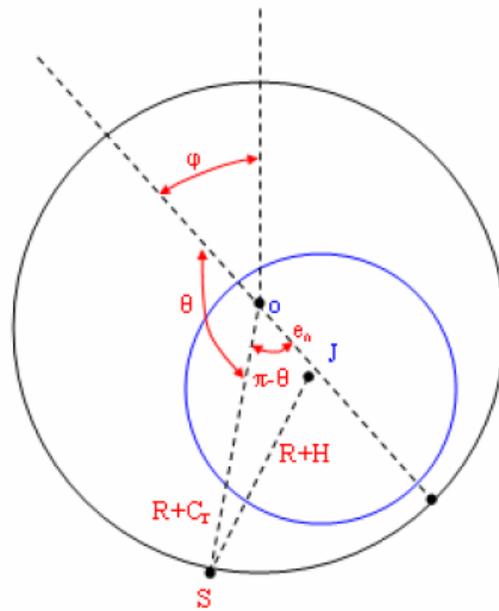


Figura 2.8 Posición arbitraria del muñón en una chumacera [12].

Es posible encontrar una expresión para el espesor del lubricante a partir de un análisis geométrico como sigue:

Aplicando el teorema de cosenos al triángulo SOJ, se tendrá:

$$(R + H)^2 = (R + C_r)^2 + e_0^2 - 2(R + C_r)e_0^2 \cos(\pi - \theta) \tag{2.65}$$

Simplificando y notando que algunos términos son pequeños:

$$2RH + H^2 = 2RC_r + C_r^2 + e_0^2 R \cos\theta + 2C_r e_0^2 \cos\theta \tag{2.65}$$

$$H = C_r + e_0 \cos\theta \tag{2.66}$$

Haciendo:

$$\varepsilon = \frac{e_0}{c_r}, \quad h = \frac{H}{c_r} \quad (2.67)$$

En forma adimensional

$$h(\theta) = 1 + \varepsilon \cos \theta \quad (2.68)$$

En la figura 2.9 aparece la gráfica de (2.68), en donde se aprecia la variación del espesor de la película del lubricante.

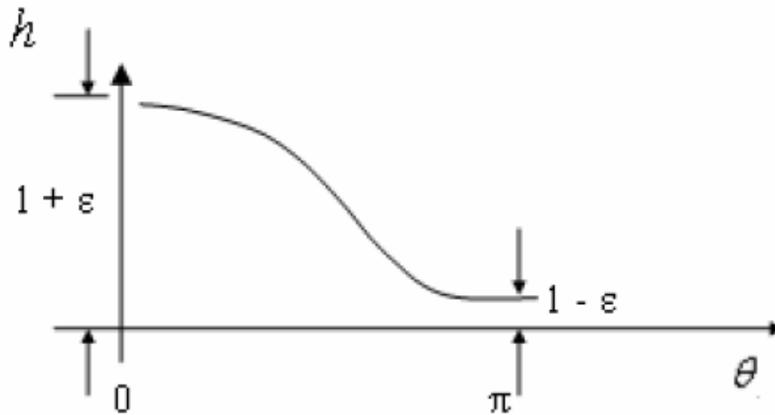


Figura 2.9 Posición arbitraria del muñón en una chumacera [17].

Notar que:

$$0 < \varepsilon < 1, \quad h_{\min}(\theta = \pi) \leq h(\theta) \leq h_{\max}(\theta = 0)$$

Para transformar la ecuación de Reynolds, es necesario calcular cada término de (2.64), observar que aparecen las componentes de velocidad en la película del lubricante u_2, v_2 ; para encontrarlos partiremos de la velocidad del muñón en el punto J.

En la figura 2.9 aparecen los vectores unitarios en las direcciones radial y transversal del punto S para una posición arbitraria, así como los vectores en el centro del muñón (medidos desde la línea de carga).

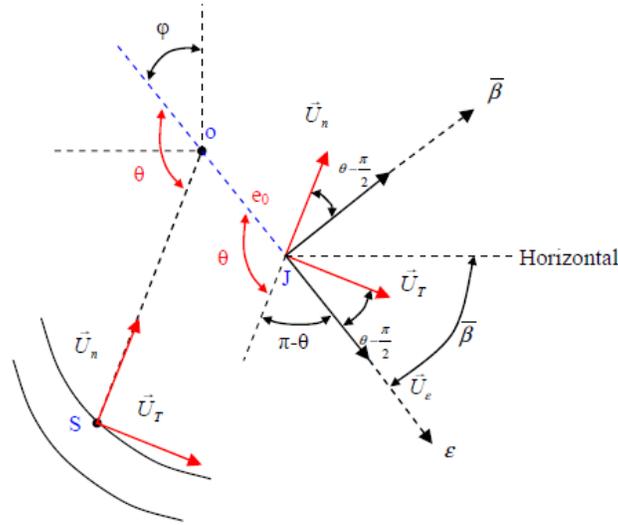


Figura 2.10 Vectores unitarios en las direcciones radial y transversal del punto arbitrario S de la película de lubricante, y el centro del muñón J [12].

De la figura 2.10 se puede ver que la relación entre los vectores unitarios en el centro del muñón y el punto S está dada por:

$$\vec{U}_{\bar{B}} = \vec{U}_n \underbrace{\text{Cos}\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right)}_{\text{Sen}\theta} + \vec{U}_T \underbrace{\text{Sen}\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right)}_{-\text{Cos}\theta} \tag{2.69}$$

$$\vec{U}_{\bar{\epsilon}} = -\vec{U}_n \text{Sen}\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) + \vec{U}_T \text{Cos}\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) \tag{2.70}$$

$$\vec{U}_{\bar{B}} = \vec{U}_n \text{Sen}\theta - \vec{U}_T \text{Cos}\theta \tag{2.71}$$

$$\vec{U}_{\bar{\epsilon}} = -\vec{U}_n \text{Cos}\theta + \vec{U}_T \text{Sen}\theta \tag{2.72}$$

Nota: $\varphi + \beta = \frac{\pi}{2}$

Por lo tanto, la velocidad del punto “J” se puede escribir como:

$$\vec{V}_j = C_r \dot{\epsilon} \vec{U}_{\bar{\epsilon}} + C_r \dot{\beta} \vec{U}_{\bar{B}} \tag{2.73}$$

O bien usando (2.71) y (2.72), en las direcciones transversal y normal

$$\vec{V}_j = \vec{U}_n \left(-C_r \dot{\epsilon} \text{Cos}\theta + C_r \dot{\beta} \text{Sen}\theta \right) + \vec{U}_T \left(C_r \dot{\epsilon} \text{Sen}\theta - C_r \dot{\beta} \text{Cos}\theta \right) \tag{2.72}$$

La velocidad del punto móvil S se puede encontrar a partir de las velocidades relativas siguientes:

$$\vec{v}_{S/J} = \vec{v}_S - \vec{v}_J \tag{2.73}$$

O bien:

$$\vec{v}_S = \vec{v}_J + \underbrace{\vec{v}_{S/J}}_{\omega \vec{k} \times \vec{r}_{JS}} \tag{2.74}$$

Observar que en (2.74) es necesario encontrar el vector \vec{r}_{JS} para poder realizar el producto vectorial. En la figura 2.11 se muestra este vector junto con unos trazos adicionales que permiten un análisis más sencillo.

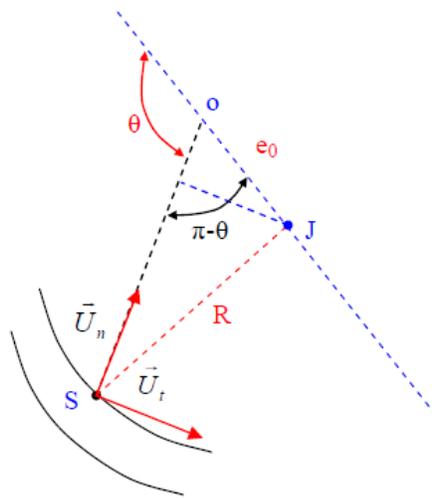


Figura 2.11. Vector junto con trazos adicionales que permiten un análisis más sencillo [12].

De la figura anterior se puede ver que:

$$\vec{r}_{JS} = - \left[r_{OS} - e_0 \frac{\text{Cos}(\pi - \theta)}{-\text{Cos}\theta} \right] \vec{U}_n - \left[e_0 \frac{\text{Sen}(\pi - \theta)}{+\text{Sen}\theta} \right] \vec{U}_t \tag{2.75}$$

O bien:

$$\vec{r}_{JS} = -(r_{OS} + e_0 \text{Cos}\theta) \vec{U}_n - (e_0 \text{Sen}\theta) \vec{U}_t \tag{2.76}$$

Aplicando el teorema de cosenos al triángulo SOJ:

$$R^2 = r_{OS}^2 + e_0^2 - 2r_{OS}e_0 \text{Cos}(\pi - \theta) \tag{2.77}$$

$$R^2 = r_{OS}^2 + \left(\underbrace{C_r \varepsilon}_0 \right)^2 + 2r_{OS} C_r \underbrace{\varepsilon}_0 \text{Cos}\theta \tag{2.78}$$

$$R \approx r_{OS} \quad (2.79)$$

Entonces se tiene:

$$\vec{r}_{JS} = -R\vec{U}_n - C_r \varepsilon \text{Sen} \theta \vec{U}_t \quad (2.80)$$

De (2.74), el producto vectorial será:

$$\vec{v}_{S/J} = \omega \hat{k} \times \vec{r}_{JS} = \begin{bmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 0 & 0 & \omega \\ -C_r \varepsilon \text{Sen} \theta & -R & 0 \end{bmatrix} \quad (2.81)$$

Notar que: $\vec{U}_n = \hat{j}$ y $\vec{U}_t = \hat{i}$, después de desarrollar el determinante se tiene:

$$\vec{v}_{S/J} = \omega \hat{k} \times \vec{r}_{JS} = R\omega \vec{U}_t - C_r \varepsilon \omega \text{Sen} \theta \vec{U}_n \quad (2.82)$$

Finalmente, sustituyendo las ecuaciones (2.72) y (2.82) en (2.74) se obtiene la velocidad del punto móvil S:

$$\hat{v}_S = (C_r \dot{\varepsilon} \text{Cos} \theta + C_r \varepsilon \dot{\beta} \text{Sen} \theta - C_r \varepsilon \omega \text{Sen} \theta) \vec{U}_n + (C_r \dot{\varepsilon} \text{Sen} \theta + R\omega - C_r \varepsilon \dot{\beta} \text{Cos} \theta) \vec{U}_t \quad (2.83)$$

De la ecuación anterior se puede reconocer:

$$v_2 = C_r \dot{\varepsilon} \text{Cos} \theta + C_r \varepsilon \dot{\beta} \text{Sen} \theta - C_r \dot{\varepsilon} \omega \text{Sen} \theta \quad (2.84)$$

$$u_2 = C_r \dot{\varepsilon} \text{Sen} \theta + R\omega - C_r \varepsilon \dot{\beta} \text{Cos} \theta \quad (2.85)$$

Las componentes encontradas deberán ser sustituidas en el segundo miembro de la ecuación de Reynolds que se repite a continuación:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{H^3}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{H^3}{\mu} \frac{\partial p}{\partial z} \right) = 12v_2 - 6u_2 \frac{\partial H}{\partial x} + 6H \frac{\partial u_2}{\partial x} \quad (2.86)$$

Para continuar con la transformación a coordenadas cilíndricas, se calculará cada término por separado de la ecuación de Reynolds como sigue:

Haciendo:

$$x = R\theta \quad (2.87)$$

$$dx = R d\theta \quad (2.88)$$

Y reconoce que el espesor de la película de lubricante se define como:

$$H = C_r (1 + \varepsilon \text{Cos} \theta) \quad (2.89)$$

De la ecuación de Reynolds, para cada termino (primer miembro):

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{H^3}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x} \right) = \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{H^3}{R\mu} \frac{\partial p}{\partial \theta} \right) \cdot \frac{C_r^3}{C_r^3} = \frac{C_r^3}{R^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{h^3(\theta)}{\mu} \frac{\partial p}{\partial \theta} \right) \quad (2.90)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{H^3}{\mu} \frac{\partial p}{\partial z} \right) = C_r^3 \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{h^3(\theta)}{\mu} \frac{\partial p}{\partial z} \right) \quad (2.91)$$

De forma similar al caso anterior, usando (2.84) y (2.85) se tiene para cada término en la ecuación de Reynolds (segundo miembro):

$$\frac{\partial H}{\partial x} = \frac{\partial H(\theta)}{R \partial \theta} = -\frac{1}{R} C_r \varepsilon \text{Sen} \theta \quad (2.92)$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial x} = \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial \theta} (C_r \dot{\varepsilon} \text{Sen} \theta + R\omega - C_r \dot{\varepsilon} \dot{\beta} \text{Cos} \theta) = \frac{1}{R} (C_r \dot{\varepsilon} \text{Cos} \theta + C_r \dot{\varepsilon} \dot{\beta} \text{Sen} \theta) \quad (2.93)$$

$$u_2 \frac{\partial H}{\partial x} = (C_r \dot{\varepsilon} \text{Sen} \theta + R\omega - C_r \dot{\varepsilon} \dot{\beta} \text{Cos} \theta) \left(-\frac{1}{R} C_r \varepsilon \text{Sen} \theta \right) \quad (2.94)$$

Simplificando la ecuación anterior y eliminando los términos pequeños:

$$u_2 \frac{\partial H}{\partial x} = -\frac{C_r^2 \varepsilon \dot{\varepsilon}}{R_0} \text{Sen}^2 \theta - \omega C_r \varepsilon \text{Sen} \theta + \frac{C_r^2 \varepsilon^2}{R_0} \dot{\beta} \text{Sen} \theta \text{Cos} \theta \quad (2.95)$$

$$u_2 \frac{\partial H}{\partial x} = -\omega C_r \varepsilon \text{Sen} \theta \quad (2.96)$$

El último término del segundo miembro de (2.86) se puede escribir como:

$$H \frac{\partial u_2}{\partial x} = -\frac{C_r}{R_0} (1 + \varepsilon \text{Cos} \theta) (C_r \dot{\varepsilon} \text{Cos} \theta + C_r \dot{\varepsilon} \dot{\beta} \text{Sen} \theta) \approx 0 \quad (2.97)$$

Sustituyendo las ecuaciones (2.90) a la (2.97) en la ecuación (2.86), y después de simplificar y agrupar se obtiene la ecuación de la lubricación de Reynolds en coordenadas cilíndricas:

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \left(h^3(\theta) \frac{\partial p}{\partial \theta} \right) + R^2 \frac{\partial}{\partial z} \left(h^3(\theta) \frac{\partial p}{\partial z} \right) = 12 \frac{\mu R^2}{C_r^3} \left[C_r \dot{\varepsilon} \text{Cos} \theta + C_r \varepsilon \left(\dot{\beta} - \frac{\omega}{2} \right) \text{Sen} \theta \right] \quad (2.98)$$

Es posible simplificar aún más a la ecuación anterior, haciendo las siguientes sustituciones en el segundo miembro:

$$v_S^2 = (C_r \dot{\varepsilon})^2 + \left[C_r \varepsilon \left(\dot{\beta} - \frac{\omega}{2} \right) \right]^2 \quad (2.99)$$

En donde:

$$\text{Cosa} = \frac{c_r \dot{\varepsilon}}{v_s}, \quad \text{Sen}\alpha = \frac{c_r \varepsilon \left(\dot{\beta} - \frac{\omega}{2} \right)}{v_s}, \quad \text{Tana}\alpha = \frac{-c_r \varepsilon \left(\dot{\beta} - \frac{\omega}{2} \right)}{c_r \varepsilon} \quad (2.100)$$

La ecuación de Reynolds toma la forma:

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \left(h^3(\theta) \frac{\partial p}{\partial \theta} \right) + R^2 \frac{\partial}{\partial z} \left(h^3(\theta) \frac{\partial p}{\partial z} \right) = 12 \frac{\mu R^2 v_s}{c_r^3} \text{Cos}(\theta + \alpha) \quad (2.101)$$

En estado estacionario (posición de equilibrio) se tiene que $\dot{\beta} = 0$, y $\dot{\varepsilon} = 0$, lo que implica de (2.100) que: $\alpha = \pi/2$; entonces la ecuación de Reynolds en estado estacionario se escribe como:

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \left(h^3(\theta) \frac{\partial p}{\partial \theta} \right) + R^2 \frac{\partial}{\partial z} \left(h^3(\theta) \frac{\partial p}{\partial z} \right) = 12 \frac{\mu R^2}{c_r^2} \left(-\varepsilon \frac{\omega}{2} \text{Sen}\theta \right) \quad (2.102)$$

2.6. Modelo de una chumacera corta.

Una chumacera será considerada corta si la longitud axial L es muy pequeña en comparación con el diámetro D, en términos matemáticos: $\frac{L}{D}$, en términos numéricos una buena consideración será: $\frac{L}{D} \leq \frac{1}{4}$ [14]. Estas chumaceras son ampliamente usadas y por lo consiguiente estudiadas y analizadas siendo el caso por Dubois y Ocvirk quienes asumieron que el gradiente de presión radial de la chumacera es mucho menor que el gradiente de presión en la dirección axial. Por lo consiguiente recordando la ecuación de Reynolds (2.5) y despreciando el término donde corresponde la presión angular se tiene el modelo clásico de una chumacera corta [8].

$$\left(\frac{D}{L} \right)^2 \frac{\partial}{\partial z} \left(h^3(\theta) \frac{\partial p}{\partial z} \right) = 12\pi(-\varepsilon \sin\theta) \quad (2.103)$$

2.7. Modelo de una chumacera infinitamente larga.

Una chumacera será considerada larga si la longitud axial “L” es muy grande en comparación con el diámetro “D”, en términos matemáticos: $L > D$, en términos numéricos una buena consideración será: $\frac{L}{D} \geq 2$, para la chumacera infinitamente larga donde el gradiente de presión radial de la chumacera es mucho mayor que el gradiente de presión en la dirección axial. Por lo consiguiente recordando la ecuación de Reynolds (2.5) y despreciando el término donde corresponde la variación de presión axial se tiene el modelo clásico de una chumacera infinitamente larga [19].

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \left(h^3(\theta) \frac{\partial p}{\partial \theta} \right) = 12\pi(-\varepsilon \sin \theta) \tag{2.104}$$

2.8. Capacidad de carga en soportes hidrodinámicas.

La figura 2.11 muestra la capacidad de carga, W , de un rodamiento y sus dos componentes, W_x y W_y . La dirección de W_x es a lo largo de la línea de simetría del rodamiento $O - O_1$. Esta dirección está inclinada en un ángulo de actitud, f , desde la dirección de la fuerza externa y la capacidad de carga, W . En la figura 2.11 la fuerza externa está en una dirección vertical. La dirección del segundo componente, W_y es normal a la dirección W_x .

La capacidad de carga elemental, dW , actúa en la dirección normal a la superficie del soporte. Es el producto de la presión del fluido, p , y un área elemental,

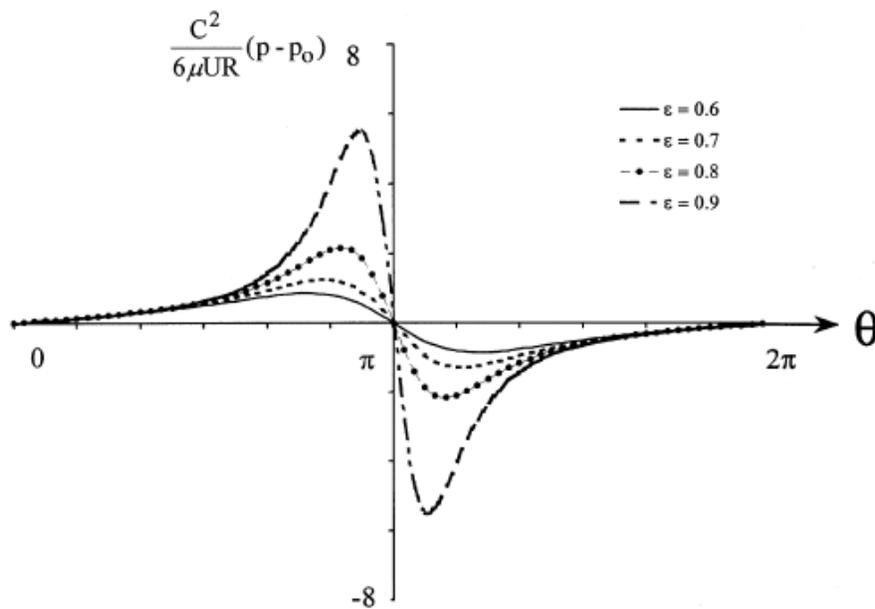


Figura 2.12 Ondas de presión en un rodamiento infinitamente largo y completo según la solución de Sommerfeld [17].

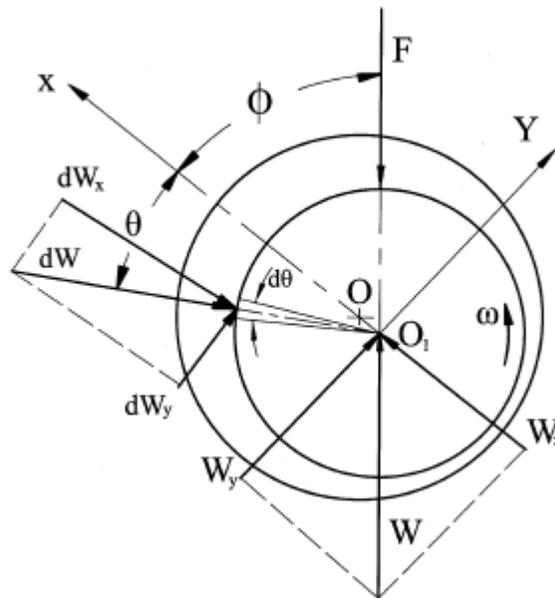


Figura 2.13 Componentes hidrodinámicos de fuerza de rodamiento [17].

La superficie del soporte es delimitada por un pequeño ángulo, $d\theta$. Una fuerza del fluido ($dW = p dA$) está dada por:

$$dW = pLRd\theta \tag{2.105}$$

La presión actúa en la dirección normal a la superficie del soporte, y dW es un vector de fuerza elemental radial dirigido hacia el centro del soporte, como se muestra en la figura 2.11. En un plano deslizante, la presión actúa en una dirección y la capacidad de carga se ha derivado mediante la integración de la onda de presión. Sin embargo, en un soporte hidrodinámico, la dirección de la presión varía alrededor del rodamiento, y la simple suma de las fuerzas elementales, dW , no producirá la fuerza resultante. Para permitir la suma, la fuerza elemental, dW , se divide en dos componentes, dW_x y dW_y , en las direcciones de W_x y W_y , respectivamente. Mediante el uso de componentes de fuerza, es posible tener una suma (por integración) de cada componente alrededor del rodamiento. Los componentes elementales de la fuerza son:

$$dW_x = -pLR \cos\theta d\theta \tag{2.106}$$

$$dW_y = pLR \sin\theta d\theta \tag{2.107}$$

Los dos componentes de la capacidad de carga, W_x y W_y , están en las direcciones X e Y , respectivamente, como se indica en la figura 2.11. Nótese el signo negativo en Eq. (6-40), ya que dW_x es opuesto a la dirección W_x . Los componentes de carga son:

$$\bar{W}_x = -LR \int_0^{2\pi} p \cos \theta d\theta \quad (2.108)$$

$$W_y = LR \int_0^{2\pi} p \sin \theta d\theta \quad (2.109)$$

El ángulo de actitud ϕ en la figura 2.11 está determinado por la relación de los componentes de fuerza:

$$\tan \phi = \frac{W_y}{W_x} \quad (2.110)$$

2.9. Capacidad de carga basada en las condiciones de Sommerfeld.

Los componentes de capacidad de carga se pueden resolver mediante la integración de Eqs. (2.108) y (2.109), donde p , puede simplificarse si los componentes de la capacidad de carga se derivan directamente del Eq. básico (2.111) del gradiente de presión:

$$\frac{dp}{dx} = 6U\mu \frac{h-h_0}{h^3} \quad (2.111)$$

Esto se puede lograr empleando la siguiente identidad para la derivación del producto:

$$(uv)' = uv' + vu' \quad (2.112)$$

La integración y reorganización de Eq. (2.112) da como resultado

$$\int uv' = uv - \int u'v \quad (2.113)$$

Con el fin de simplificar la integración de Eq. (2.108) para el componente de capacidad de carga W_x , se realizan las sustituciones $u = p$ y $v' = \cos \theta$. Esta sustitución permite el uso de la regla del producto en Eq. (2.113), y la integral en Eq. (2.108) da como resultado los siguientes términos:

$$\int p \cos \theta d\theta = p \sin \theta - \int \frac{dp}{d\theta} \sin \theta d\theta \quad (2.114)$$

De manera similar, para el componente de capacidad de carga, W_y , en Eq. (2.109), las sustituciones $u = p$ y $v' = \sin \theta$ resultan en:

$$\int p \sin \theta d\theta = -p \cos \theta + \int \frac{dp}{d\theta} \cos \theta d\theta \quad (2.115)$$

Las ecuaciones (2.114) y (2.115) indican que los componentes de capacidad de carga en Eqs. (2.108) y (2.109) se pueden resolver directamente desde el gradiente de presión. Mediante el uso de este método, no es necesario resolver la onda de presión para encontrar los componentes de capacidad de carga (ofrece la simplificación considerable de una integración simple en lugar de una integración doble compleja). El primer término, en el lado derecho en Eqs. (2.114) y (2.115) es cero, cuando se integra alrededor de un rodamiento completo, porque la presión, p , es la misma en $\theta = 0$ y $\theta = 2\pi$.

La integración del último término en Eq. (2.114), en los límites $\theta = 0$ y $\theta = 2\pi$, indica que el componente de carga, W_x , es cero. Esto se debe a que es una integración de la función antisimétrica alrededor del rodamiento (la función es antisimétrica en los dos lados de la línea central $O - O_1$, que se cancelan entre sí). Por lo tanto:

$$W_x = 0 \quad (2.116)$$

La integración de Eq. (2.109) con la ayuda de la identidad (2.115), y utilizando el valor de h_0 en da como resultado:

$$W_y = \frac{6\mu UR^2 L}{c^2} \left(I_2 - \frac{J_2}{J_3} I_3 \right) \quad (2.117)$$

Sustituyendo los valores de I_n y J_n en función de e se obtiene la siguiente expresión para el componente de capacidad de carga, W_y . El otro componente es $W_x = 0$; por lo tanto, para las condiciones de Sommerfeld, W_y es igual a la capacidad de carga total, $W_x = W_y$

$$W = \frac{12\pi\mu UR^2 L}{c^2} \frac{\varepsilon}{(2+\varepsilon^2)(1-\varepsilon^2)^{1/2}} \quad (2.118)$$

El ángulo de actitud, ϕ , se deriva de Eq. (2.110). Para las condiciones de Sommerfeld, $W_x = 0$ y $Tan\phi \rightarrow \infty$; por lo tanto

$$\phi = \frac{\pi}{2} \quad (2.119)$$

La ecuación (2.119) indica que, en este caso, la línea de simetría $O - O_1$ es normal a la dirección de la capacidad de carga W .

2.10. Número de Sommerfeld.

La ecuación (2.118) es la expresión de la capacidad de carga del rodamiento en un rodamiento largo que opera en condiciones estables con las condiciones de contorno de Sommerfeld para la onda de presión. Este resultado se obtuvo para un rodamiento de película completa sin ninguna cavitación alrededor del rodamiento. En la mayoría de los casos prácticos, esta no es una expresión realista para la capacidad de carga, ya que hay cavitación de fluido en la región de aclaramiento divergente de la presión negativa. La solución de Sommerfeld para la capacidad de carga se ha mejorado mediante la aplicación de un análisis más preciso con condiciones de contorno realistas de la onda de presión. Esta solución requiere iteraciones realizadas con la ayuda de una computadora.

Con el fin de simplificar el diseño de los rodamientos de diario hidrodinámicos, los resultados realistas para la capacidad de carga se proporcionan en forma adimensional en tablas o gráficos. Para este propósito, un número adimensional es ampliamente utilizado, siendo el número de Sommerfeld, S .

La ecuación (2.118) se puede convertir a forma adimensionales si todas las variables con dimensiones se colocan en el lado izquierdo de las ecuaciones y la función adimensionales de e en el lado derecho. Además, es tradición en esta disciplina tener el grupo adimensionales de Sommerfeld en función de la velocidad del soporte, n , en revoluciones por segundo, y la presión media del rodamiento, P , de acuerdo con las siguientes sustituciones:

$$U = 2\pi Rn \quad (2.220)$$

$$W = 2RLP \quad (2.221)$$

Sustituyendo Eqs. (2.220) y (2.221) en Eq. (2.118), obtenemos la siguiente forma adimensional del número de Sommerfeld para un soporte hidrodinámico infinitamente largo donde no se tiene en cuenta la cavitación:

$$S = \frac{\mu n}{P} \left(\frac{R}{C_r} \right)^2 = \frac{(2+\varepsilon^2)(1-\varepsilon^2)^{1/2}}{12\pi^2 \varepsilon} \quad (2.222)$$

El número de Sommerfeld adimensional es una función de ε solamente. Para un rodamiento infinitamente largo y las condiciones de contorno de Sommerfeld, el número S se puede calcular a través de Eq. (2.222). Sin embargo, para fines de diseño, utilizamos las condiciones realistas para la onda de presión. Se han calculado los valores de S para varias relaciones de longitud y diámetro, $\frac{L}{D}$. Este parámetro es conocido como el número de Sommerfeld o carga adimensional, se usa para caracterizar el funcionamiento de las chumaceras y se puede decir que, si el número de Sommerfeld aumenta, la capacidad de soportar carga disminuye y viceversa [17].

Capítulo III

Campos de presión en chumaceras hidrodinámicas clásicas de longitud finita

Conocer los campos de presión que se generan es de suma importancia considerando que se puede llegar a determinar las regiones donde la película de lubricante puede romperse (cavitación), encontrando el umbral entre una condición hambrienta (starved) o inundada (fully flooded), y el lugar donde se encuentra el valor de máxima de presión. Al conocer el campo de presión, se puede realizar la caracterización de una chumacera hidrodinámica [20].

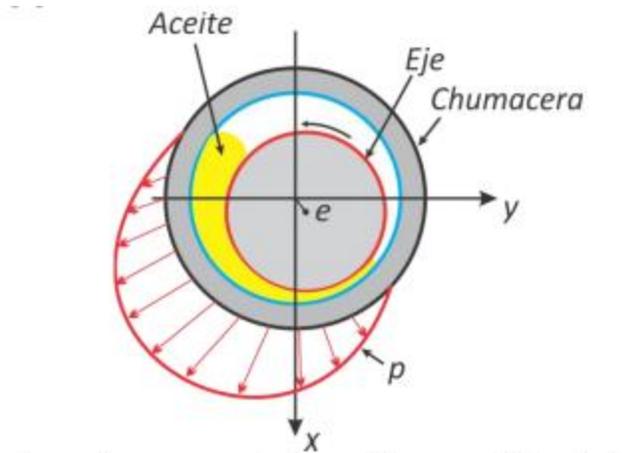


Figura 3.1 Vista transversal de una chumacera hidrodinámica [21].

3.1. Adimensionalización de la ecuación de Reynolds para chumaceras de longitud finita.

Considerando las ecuaciones de Navier – Stokes para el caso de lubricación hidrodinámica en el modelo clásico, éstas se reducen a la ecuación de Reynolds, la cual permite hacer un análisis que permite determinar el campo de presión en función de $p(z, \theta)$, por lo tanto, al

dar solución se logra predecir el comportamiento de una chumacera hidrodinámica. Recordado que la ecuación de la lubricación de Reynolds se puede escribir como [14]:

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \left(h^3 \frac{\partial p}{\partial \theta} \right) + R^2 \frac{\partial}{\partial z} \left(h^3 \frac{\partial p}{\partial z} \right) = 12 \frac{\mu R^2}{c_r^3} \left[C_r \varepsilon \cos \theta + \varepsilon \left(\dot{\varphi} - \frac{\omega}{2} \right) \text{Sen} \theta \right] \quad (3.1)$$

Para la ecuación (3.1) se consideran las siguientes condiciones frontera:

$$-\frac{L}{2} \leq z \leq \frac{L}{2}, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi, \quad h(\theta) = 1 + \varepsilon \cos \theta \quad (3.2)$$

$$p \left(\frac{L}{2} \right) = 0, \quad p \left(-\frac{L}{2} \right) = 0, \quad p(\theta + 2\pi) = p(\theta) \quad (3.3)$$

Donde p es la presión, θ es la coordenada circunferencial medida a partir de la línea de centros, z es la coordenada axial a lo largo de la chumacera, φ es el ángulo de actitud (o ángulo de equilibrio), C_r es el claro radial, ε es la excentricidad adimensional, R es el radio de la chumacera, μ es la viscosidad dinámica, h es el espesor de la película lubricante en forma adimensional y ω es la velocidad angular del muñón.

De forma general $\dot{\varepsilon}$ y $\dot{\varphi}$ son diferentes de cero, pero en la posición de equilibrio estas cantidades tienen respuesta vibratoria del sistema considerando cargas, entonces $\dot{\varepsilon}$ y $\dot{\varphi}$ deberán considerarse. Para trabajar de forma general es necesario presentar la ecuación de Reynolds en forma adimensional, es necesario recordar que esta ecuación es representada por (3.1), en donde se puede definir [4]:

$$V_s^2 = (C_r \dot{\varepsilon})^2 + \left[C_r \varepsilon \left(\dot{\varphi} - \frac{\omega}{2} \right) \right]^2 \quad \text{Cos} \alpha = \frac{C_r \dot{\varepsilon}}{V_s}, \quad \text{Sen} \theta = \frac{C_r \varepsilon \left(\dot{\varphi} - \frac{\omega}{2} \right)}{V_s} \quad (3.4)$$

Entonces la ecuación de la lubricación de Reynolds puede escribirse como:

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \left(h^3 \frac{\partial p}{\partial \theta} \right) + R^2 \frac{\partial}{\partial z} \left(h^3 \frac{\partial p}{\partial z} \right) = 12 \frac{\mu R^2}{c_r^3} V_s (\theta + \alpha) \quad (3.5)$$

En la posición de equilibrio se tiene: $\dot{\varphi} = \varepsilon \dot{\varepsilon} = 0$, entonces (3.4) puede escribirse como:

$$\alpha = \frac{\pi}{2}, \quad \text{Cos} \left(\theta + \frac{\pi}{2} \right) = -\text{Sen} \theta, \quad V_s = \frac{C_r \varepsilon \omega}{2} \quad (3.6)$$

Sustituyendo las relaciones (3.6) en la ecuación de la lubricación de Reynolds (3.5) en estado estacionario (equilibrio) queda como:

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \left(h^3 \frac{\partial p}{\partial \theta} \right) + R^2 \frac{\partial}{\partial z} \left(h^3 \frac{\partial p}{\partial z} \right) = 6 \frac{\mu R^2 \omega}{c_r^2} (-\varepsilon \text{Sen} \theta) \quad (3.7)$$

Para tener mayor generalidad, se usan las siguientes sustituciones para adimensionalizar a (3.7).

$$\bar{p} = \frac{p}{p_{dim}}; \quad p_{dim} = \mu N \left(\frac{R}{c_r} \right)^2 = \mu \left(\frac{\omega}{2\pi} \right) \left(\frac{R}{c_r} \right)^2; \quad z = \frac{L}{2} \bar{z} \quad (3.8)$$

Realizando la sustitución de (3.8) en (3.7) se obtiene:

$$\mu N \left(\frac{R}{c_r} \right)^2 \left[\frac{\partial}{\partial \theta} \left(h^3(\theta) \frac{\partial \bar{p}}{\partial \theta} \right) + R^2 \cdot \frac{1}{\left(\frac{L}{2} \right)^2} \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \left(h^3(\theta) \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{z}} \right) \right] = 6 \frac{\mu R^2 (2\pi N)}{c_r^2} (-\varepsilon \text{Sen} \theta) \quad (3.9)$$

Simplificando (3.9) se obtiene:

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \left(h^3(\theta) \frac{\partial \bar{p}}{\partial \theta} \right) + \left(\frac{D}{L} \right)^2 \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \left(h^3(\theta) \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{z}} \right) = 12\pi (-\varepsilon \text{Sen} \theta) \quad (3.10)$$

3.2. Determinación de campos de presión para casos especiales.

La ecuación de Reynolds es una ecuación diferencial parcial elíptica de segundo orden, por lo que su solución con condiciones de contorno realistas, no se ha podido expresar analíticamente. Por lo que se han empleado casos especiales: chumaceras con solución analítica $\frac{L}{D} \leq \frac{1}{4}$ y chumaceras largas con solución analítica $\frac{L}{D} \geq 2$ de forma exitosa [10].

3.2.1. Determinación de campos de presión para chumaceras cortas

con solución analítica $\frac{L}{D} \leq \frac{1}{4}$.

En esta sección se resolverá el modelo clásico de una chumacera corta, esta es conocida como solución de Orvick [1]. Hay que recordar que la ecuación general de Reynolds se puede escribir como:

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \left(h^3 \frac{\partial p}{\partial \theta} \right) + R^2 \frac{\partial}{\partial z} \left(h^3 \frac{\partial p}{\partial z} \right) = 12 \frac{\mu R^2}{c_r^3} \left[C_r \varepsilon \cos \theta + \varepsilon \left(\dot{\phi} - \frac{\omega}{2} \right) \text{Sen} \theta \right] \quad (3.11)$$

$$-\frac{L}{2} \leq z \leq \frac{L}{2}, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi, \quad h(\theta) = 1 + \varepsilon \cos \theta \quad (3.12)$$

$$p \left(\frac{L}{2} \right) = 0, \quad p \left(-\frac{L}{2} \right) = 0, \quad p(\theta + 2\pi) = p(\theta) \quad (3.13)$$

Para el caso de chumacera corta, se analiza la solución de la ecuación de Reynolds, conforme a [22] se puede determinar si una chumacera puede ser considerada corta.

$$R^2 \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \left(h^3 \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{z}} \right) = 12 \frac{\mu R^2}{c_r^2} \left[-\varepsilon \frac{\omega}{2} \text{Sen} \theta \right] \quad (3.14)$$

Sustituyendo las variables adimensionales (3.8) se obtiene la ecuación de Reynolds para chumaceras cortas [10]

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}} \left(h^3 \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{z}} \right) = -12\pi \left(\frac{L}{D} \right)^2 \varepsilon \text{Sen} \theta \quad (3.15)$$

$$-1 < \bar{z} < 1, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi, \quad \bar{p}(\bar{z} = \pm 1) = 0 \quad (3.16)$$

Resolviendo (3.15) e implementando las condiciones frontera (3.16) se obtiene el campo de presión en una chumacera corta.

$$\bar{P}_{Ocv} = -6\pi \left(\frac{L}{D} \right)^2 \frac{\varepsilon_{Ocv} \text{Sen} \theta}{(1 + \varepsilon_{Ocv} \cos \theta)^3} (\bar{z}^2 - 1) \quad (3.17)$$

El subíndice *Ocv* de la presión y la excentricidad que se muestra en (3.17), hace referencia al resultado de la solución de Ocvirk. En la figura 3.1 se muestra el campo de presión en una chumacera hidrodinámica corta del modelo clásico para $\left(\frac{L}{D} \right) = \frac{1}{4}$.

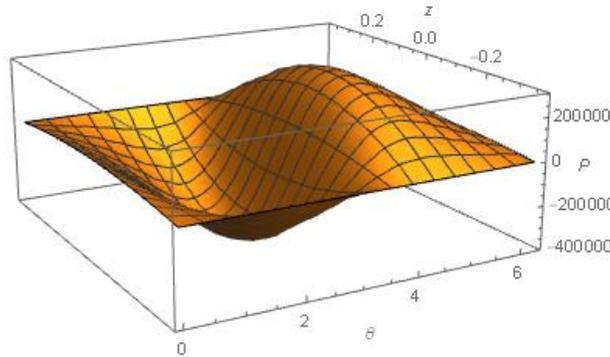


Figura 3.2 Campo de presión clásico en una chumacera corta como función de las coordenadas axial y circunferencial respectivamente, para $\varepsilon=0.3$ y $\frac{L}{D} = \frac{1}{4}$ [10].

3.2.2. Determinación de campos de presión para chumaceras largos con solución analítica $\frac{L}{D} \geq 2$.

En el caso de la chumacera larga se asume que el gradiente de presión en la dirección axial de la chumacera es pequeño y se desprecia en comparación con los gradientes de presión alrededor de la chumacera, esto es porque la distribución de presión no depende de los valores en la frontera [8].

Considerando la ecuación (3.1) y despreciando el término del gradiente de presión en la dirección axial de la chumacera, se tendrá el modelo clásico de una chumacera larga.

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \left(h^3 \frac{\partial p}{\partial \theta} \right) = 12\pi \frac{\partial h}{\partial \theta} \quad (3.18)$$

Las integrales presentes en la ecuación (3.18) presentan una gran complejidad, por lo tanto, por medio de la sustitución universal Arnold Sommerfeld que introdujo en 1904, se logra determinar el campo de presión en la película del lubricante de una chumacera larga [23].

Sustitución de Sommerfeld y sus relaciones:

$$h(\theta) = 1 + \varepsilon \cos \theta = \frac{1 - \varepsilon^2}{1 - \varepsilon \cos \gamma} \quad (3.19)$$

$$\text{Sen} \theta = \frac{\sqrt{1 - \varepsilon^2} \text{Sen} \gamma}{1 - \varepsilon \cos \gamma} \quad (3.20)$$

$$\text{Cos} \theta = \frac{\cos \gamma - \varepsilon}{1 - \varepsilon \cos \gamma} \quad (3.21)$$

Aplicando (3.19) en (3.18) e integrando se obtiene la distribución de presión de la siguiente forma.

$$\bar{p}(\theta) = 12\pi \left[\frac{\gamma - \varepsilon \text{Sen} \gamma}{(1 - \varepsilon^2)^{\frac{5}{2}}} - \frac{2 \left(\gamma - 2\varepsilon \text{Sen} \gamma + \frac{1}{2} \varepsilon^2 \gamma + \frac{1}{4} \varepsilon^2 \text{Sen} 2\gamma \right)}{(1 - \varepsilon^2)^{\frac{3}{2}} (2 + \varepsilon^2)} \right] + \bar{p}_0 \quad (3.22)$$

Simplificando a (3.22) se obtiene la expresión de distribución de presión en términos de γ .

$$\bar{p}(\theta) = \frac{12\pi \varepsilon \text{Sen} \gamma}{(2 + \varepsilon^2)(1 - \varepsilon^2)^{\frac{3}{2}}} (2 - \varepsilon^2 - \varepsilon \cos \gamma) + \bar{p}_0 \quad (3.23)$$

Utilizando las relaciones obtenidas a partir de la sustitución de Sommerfeld se obtiene la expresión de la presión en términos de θ

$$\bar{p}_{Som}(\theta) = \frac{12\pi\varepsilon \text{Sen}\theta(2+\varepsilon \text{Cos}\theta)}{(2+\varepsilon^2)(1+\varepsilon \text{Cos}\theta)^2} \quad (3.24)$$

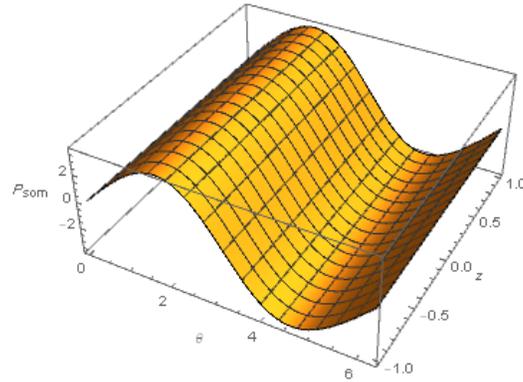


Figura 3.3 Campo de presión condición de frontera de Sommerfeld, chumacera larga, para una excentricidad $\varepsilon = 0.1$.

Capítulo IV

Propuestas de solución para la ecuación de la lubricación de Reynolds en chumaceras de longitud finita

4.1. Propuesta 1: Solución híbrida, a partir del funcional de la Ecuación de Reynolds.

La propuesta de solución híbrida en la ecuación de la lubricación de Reynolds se establece a partir de la obtención de una distribución parabólica de presión, encontrando un funcional que contenga las energías presentes en el sistema tanto de movimiento como de posición, posteriormente, se procede a realizar la minimización con la intención de que el sistema funcione con la mínima energía posible, de esta forma se obtiene una ecuación diferencial ordinaria, la cual puede resolverse mediante una propuesta de solución parabólica utilizando métodos numéricos.

A partir de la ecuación (3.10) para chumaceras hidrodinámicas y considerando las soluciones (3.17) y (3.24), se realiza la propuesta de solución con perfil axial parabólico para una chumacera de longitud finita:

$$P(\theta, z) = f(\theta) \left[k - \left(\frac{z}{L} \right)^2 \right] \quad (4.1)$$

Considerando

$$\bar{z} = \frac{z}{L}$$

$$k = \text{constante}$$

Para comprobar que $p(\theta, z)$ cumple con las condiciones necesarias de mínima energía, será necesario realizar la sustitución en una formulación:

Sea la ecuación general de Reynolds en coordenadas cartesianas. Ver ecuación (4.2)

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[H^3 \frac{\partial P}{\partial x} \right] + \frac{\partial P}{\partial z} \left[H^3 \frac{\partial P}{\partial z} \right] = 12\mu(v_2 - v_1) + 6(u_1 - u_2) \frac{\partial H}{\partial x} + 6\mu H \frac{\partial}{\partial x} (u_1 - u_2) \quad (4.2)$$

Para realizar la formulación será utilizado el método de residuos ponderados que se analizará en la siguiente sección.

4.1.1. Método de residuos ponderados (MRP).

La aplicación del MRP consiste básicamente en aproximar la variable dependiente del problema por expansiones en series de funciones conocidas, con coeficientes por determinar, llamadas de función tentativas. En MRP elegimos una solución aproximada como una combinación lineal de funciones elegidas con el fin de respetar las condiciones de contorno. Este método es utilizado para encontrar un mínimo para el residuo de una EDP con base a lo siguiente:

$$\int_D R w_i dD = 0 \quad i = 1, 2 \dots m \quad (4.3)$$

$D = \text{dominio de solución}$

$w_i = \text{funciones de ponderación linealmente independientes}$

De (4.2) se puede escribir en forma de operadores como:

$$L(p) = f(x, z) \quad (4.4)$$

De esta forma será necesario determinar una función ϕ (*ponderación*) tal que:

$$w(p) = \int_{\Omega} \phi [L(p) - f] ds = \int_R \int \phi [L(p) - f] dx dz \quad (4.5)$$

Es posible determinar una ϕ , tal que represente las energías en el lubricante, usando el cálculo de variaciones y con ayuda del teorema de HELMHOLTZ se obtiene el funcional:

$$J(p) = \iint_{\Omega} \left\{ \frac{-H^3}{12\mu} \left(\nabla^2 p + h\vec{U} \cdot \vec{\nabla} p - 2p \frac{\partial H}{\partial t} \right) \right\} ds \quad (4.6)$$

Considerando

$$\nabla^2 p = \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} \quad (4.7)$$

$$\vec{U} \cdot \vec{\nabla} p = (u_1 \hat{i} + u_2 \hat{k}) \cdot \left(\frac{\partial p}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial p}{\partial x} \hat{k} \right) \quad (4.8)$$

Realizando la sustitución de la propuesta de solución (4.1) en el funcional (4.6) y de la ecuación generalizada de la energía, usando la regla de Leibniz para derivar bajo el signo de la integral, se obtiene la condición necesaria para aceptar una solución del tipo (4.1).

$$\frac{d}{d\theta} \left[\frac{H^3}{6\mu} \frac{df}{d\theta} \right] - \frac{10}{6\mu} \left(\frac{R}{L} \right)^2 H^3 f(\theta) = 5\omega R^2 \frac{dH}{d\theta} \quad (4.9)$$

Donde el espesor de la película del lubricante está definido por la siguiente expresión:

$$H = c_r (1 + \varepsilon \cos \theta) \quad (4.10)$$

Recordando las siguientes variables adimensionales:

$$\varepsilon = \frac{e}{c_r} \quad h = \frac{H}{c_r} \quad (4.11)$$

Utilizando las variables anteriores se realiza la adimensionalización de (4.9), obteniéndose una ecuación diferencial no lineal de la siguiente forma:

$$h^3 \frac{d^2 \bar{f}}{d\theta^2} - 3h^2 \varepsilon \sin \theta \frac{d\bar{f}}{d\theta} - 10 \left(\frac{D}{2L} \right) h^3 f(\theta) = -30\varepsilon \sin \theta \quad (4.12)$$

La ecuación (4.12) es altamente no lineal en la variable θ por lo tanto debe resolverse numéricamente. Usando MATHEMATICA se han encontrado varias soluciones para distintos valores de L/D y diversas excentricidades dadas. Ver gráficas 4.1- 4.8.

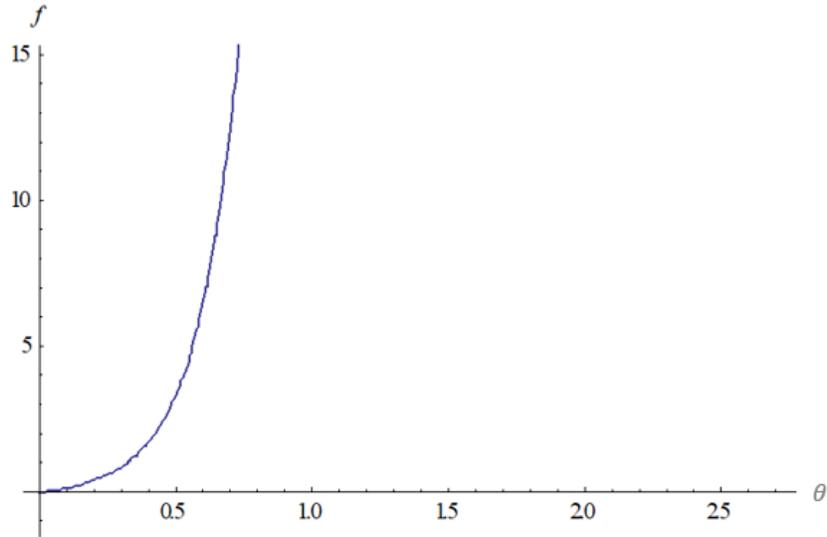


Figura 4.1 Grafica de solución numérica de (4.13) para valores de $\frac{L}{D} = 0.25$, $f(\theta) = 0$, $f'(\theta) = 1.8$, con excentricidades de 1) $\epsilon_1 = 0.1$, 2) $\epsilon_2 = 0.5$, 3) $\epsilon_3 = 0.8$

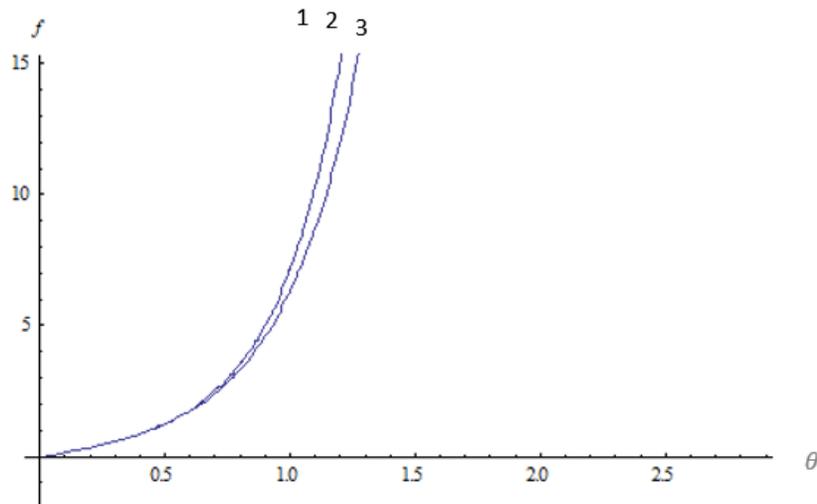


Figura 4.2 Grafica de solución numérica de (4.13) para valores de $\frac{L}{D} = 0.5$, $f(\theta) = 0$, $f'(\theta) = 1.8$, con excentricidades de 1) $\epsilon_1 = 0.1$, 2) $\epsilon_2 = 0.5$, 3) $\epsilon_3 = 0.8$

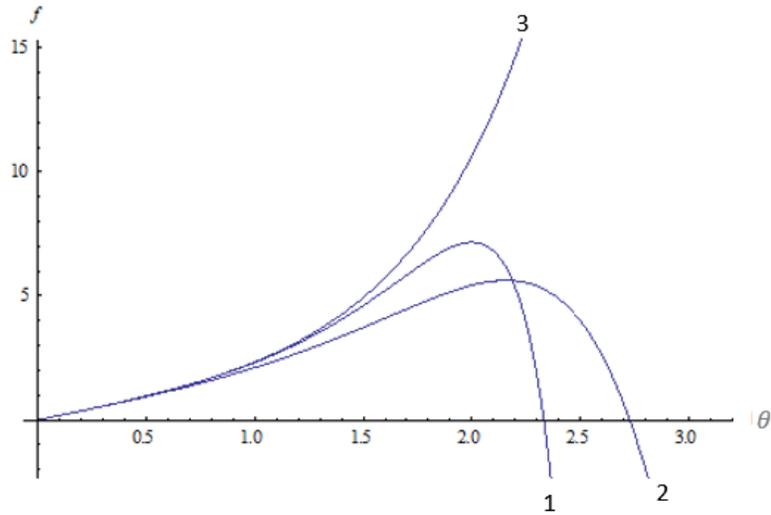


Figura 4.3 Grafica de solución numérica de (4.13) para valores de $\frac{L}{D} = 1, f(\theta) = 0, f'(\theta) = 1.8$, con excentricidades de 1) $\epsilon_1 = 0.1$, 2) $\epsilon_2 = 0.5$, 3) $\epsilon_3 = 0.8$

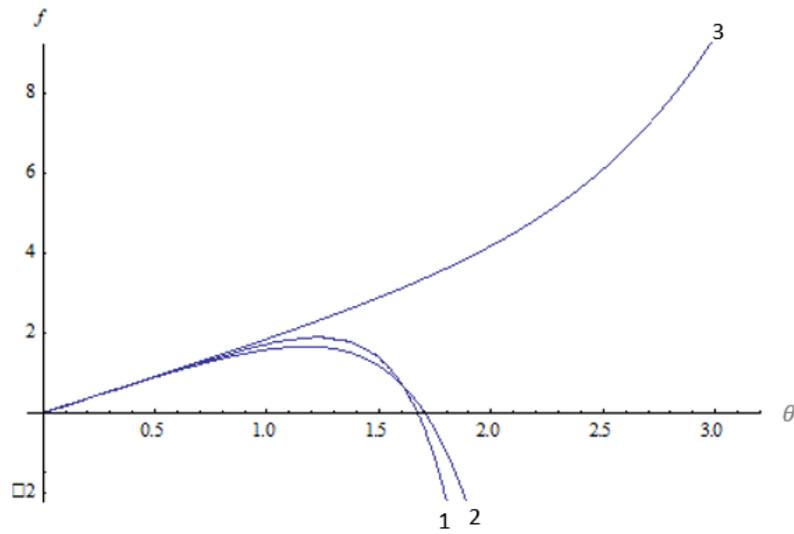


Figura 4.4 Grafica de solución numérica de (4.13) para valores de $\frac{L}{D} = 1.5, f(\theta) = 0, f'(\theta) = 1.8$, con excentricidades de 1) $\epsilon_1 = 0.1$, 2) $\epsilon_2 = 0.5$, 3) $\epsilon_3 = 0.8$

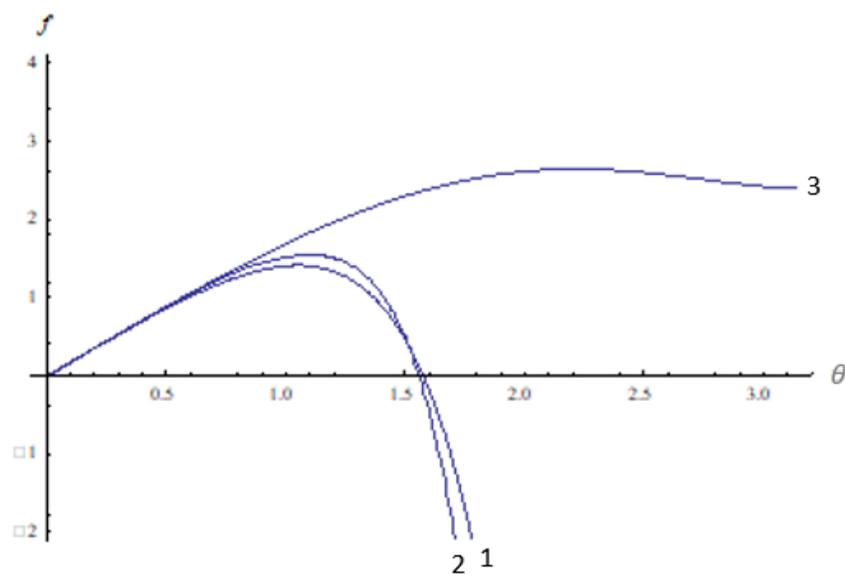


Figura 4.5 Grafica de solución numérica de (4.13) para valores de $\frac{L}{D} = 2, f(\theta) = 0, f'(\theta) = 1.8$, con excentricidades de 1) $\varepsilon_1 = 0.1$, 2) $\varepsilon_2 = 0.5$, 3) $\varepsilon_3 = 0.8$

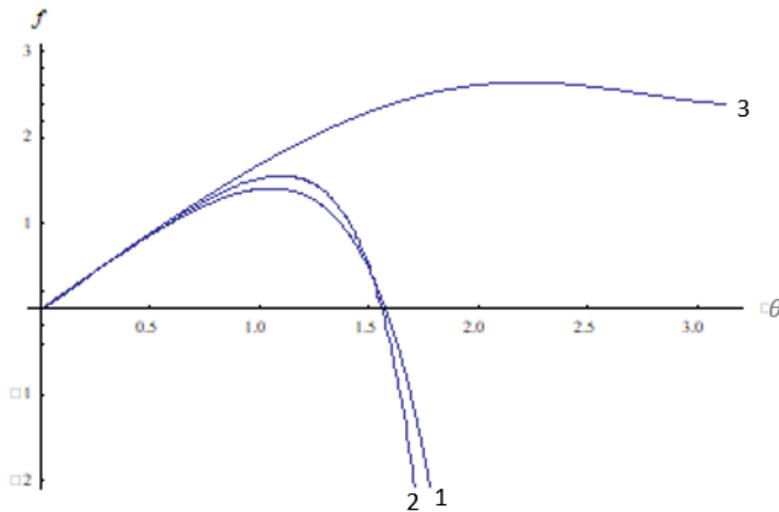


Figura 4.6 Grafica de solución numérica de (4.13) para valores de $\frac{L}{D} = 2.5, f(\theta) = 0, f'(\theta) = 1.8$, con excentricidades de 1) $\varepsilon_1 = 0.1$, 2) $\varepsilon_2 = 0.5$, 3) $\varepsilon_3 = 0.8$

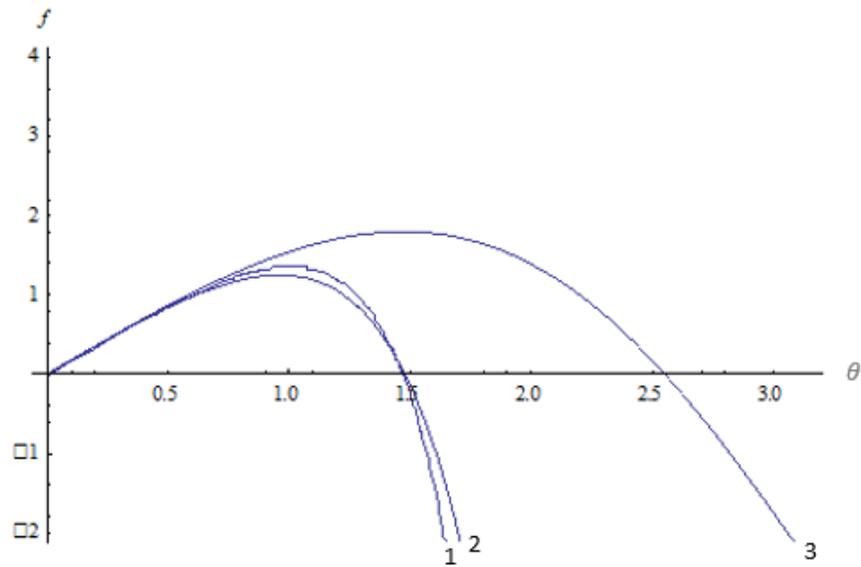


Figura 4.7 Grafica de solución numérica de (4.13) para valores de $\frac{L}{D} = 3, f(\theta) = 0, f'(\theta) = 1.8$, con excentricidades de 1) $\varepsilon_1 = 0.1$, 2) $\varepsilon_2 = 0.5$, 3) $\varepsilon_3 = 0.8$

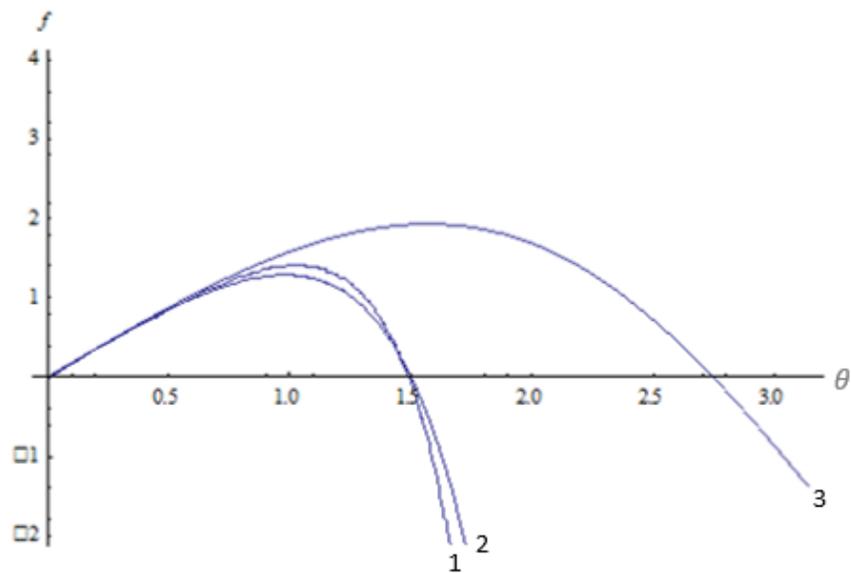


Figura 4.8 Grafica de solución numérica de (4.13) para valores de $\frac{L}{D} = 4, f(\theta) = 0, f'(\theta) = 1.8$, con excentricidades de 1) $\varepsilon_1 = 0.1$, 2) $\varepsilon_2 = 0.5$, 3) $\varepsilon_3 = 0.8$

Las gráficas anteriores representan el comportamiento de f con respecto de θ siendo un resultado numérico para la ecuación (4.12), estos resultados indican que la obtención del campo de presión y de los coeficientes rotodinámicos para una chumacera de longitud finita, están vinculados con un proceso laborioso, por lo tanto, la satisfacción del objetivo de encontrar un método analítico que pueda ser empleado para obtener la caracterización de una chumacera hidrodinámica de longitud finita, no es completamente satisfactorio, sin embargo se genera la posibilidad de un nuevo estudio mediante un proceso numérico, por tanto se procede a trabajar con la siguiente propuesta.

4.2. Propuesta 2: Perturbación de la posición estacionaria del sistema.

La ecuación de Reynolds modela perfectamente el comportamiento de una chumacera hidrodinámica, la solución permite determinar el campo de presión $p(z, \theta)$ de la película de lubricante como función de las coordenadas axial y angular. Recordando la adimensionalización y condiciones frontera presentadas en el capítulo III de la ecuación de Reynolds se puede escribir como [7]:

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \left(h^3(\theta) \frac{\partial \bar{p}}{\partial \theta} \right) + \left(\frac{D}{L} \right)^2 \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \left(h^3(\theta) \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{z}} \right) = 12\pi(-\varepsilon \text{Sen}\theta) \quad (4.13)$$

La propuesta consiste en asumir una solución de la ecuación de Reynolds en forma de una serie de Taylor de primer orden, esta propuesta implica cambios de presión, de posición y velocidad, lo anterior permite comprender que se trata de una perturbación del eje a partir de su posición de equilibrio.

La presión puede escribirse como sigue [20]:

$$p = (p)_0 + \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right)_0 \Delta x + \left(\frac{\partial p}{\partial y} \right)_0 \Delta y + \left(\frac{\partial p}{\partial \dot{x}} \right)_0 \Delta \dot{x} + \left(\frac{\partial p}{\partial \dot{y}} \right)_0 \Delta \dot{y} \quad (4.14)$$

La figura (4.9) describe el efecto que producen los cambios de la carga sobre la posición del eje en la chumacera. El subíndice cero en la figura se refiere a la posición de estado estable y Δx , Δy indican los desplazamientos del eje alrededor de su posición de equilibrio o

pequeños desplazamientos de perturbación. Calculando el cambio de estas pequeñas perturbaciones con respecto al tiempo obtenemos las velocidades de perturbación $\Delta\dot{x}$ y $\Delta\dot{y}$.

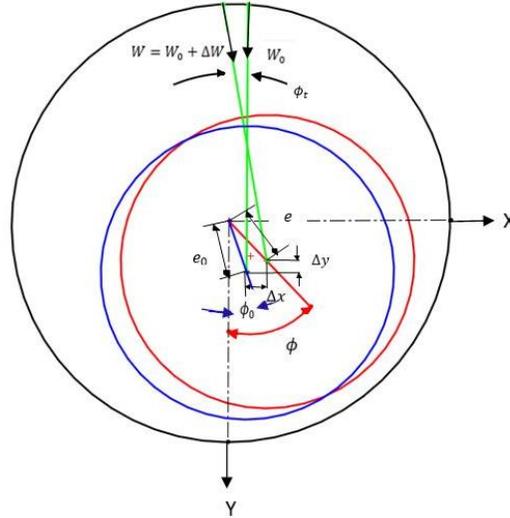


Figura 4. 9 Efecto del cambio de la carga en el muñón.

La figura 4.9 relaciona la posición de estado estable y la posición del centro del muñón cuando existe una pequeña perturbación o bien:

$$e_0 \sin \varphi_0 + \Delta x = e \sin \varphi \tag{4.15}$$

$$e_0 \cos \varphi_0 + \Delta y = e \cos \varphi \tag{4.16}$$

Sustituyendo las expresiones de (4.15 y 4.16) en la ecuación del espesor de película (3.2) y considerando que $\varepsilon = e/C$ y $h = H/C$ obtenemos el espesor de película adimensional.

$$h = h_0 + \Delta X \sin \tilde{\theta} + \Delta Y \cos \tilde{\theta} \tag{4.17}$$

Donde $h_0 = 1 + \varepsilon_0 \cos(\tilde{\theta} - \varphi_0)$, $X = x/C$ y $Y = y/C$. Derivando la ecuación (4.17) con respecto al tiempo obtenemos:

$$\frac{dh}{dt} = \omega(\Delta X' \sin \tilde{\theta} + \Delta Y' \cos \tilde{\theta}) \tag{4.18}$$

4.2.1. Incrementos del campo de presión obtenidos a partir de la ecuación de Reynolds.

Considerar una expansión de primer orden para el campo de presión.

$$p = (p)_0 + \left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)_0 \Delta x + \left(\frac{\partial p}{\partial y}\right)_0 \Delta y + \left(\frac{\partial p}{\partial \dot{x}}\right)_0 \Delta \dot{x} + \left(\frac{\partial p}{\partial \dot{y}}\right)_0 \Delta \dot{y} \quad (4.19)$$

Para simplificar la notación y tener un mejor manejo de esta durante el desarrollo del método se proponen los siguientes cambios de variables:

$$(p)_0 = p_0, \quad \left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)_0 = p_x, \quad \left(\frac{\partial p}{\partial y}\right)_0 = p_y, \quad \left(\frac{\partial p}{\partial \dot{x}}\right)_0 = p_{\dot{x}}, \quad \left(\frac{\partial p}{\partial \dot{y}}\right)_0 = p_{\dot{y}} \quad (4.20)$$

Las componentes cartesianas de la fuerza en la película de aceite se encuentran por la integración de la presión sobre el área de la chumacera. Realizando la sustitución de las expresiones (4.19) en las expresiones de la fuerza como se indica a continuación.

$$\begin{Bmatrix} F_x \\ F_y \end{Bmatrix} = \int_z \int_{\tilde{\theta}} (p_0 + p_x \Delta x + p_y \Delta y + p_{\dot{x}} \Delta \dot{x} + p_{\dot{y}} \Delta \dot{y}) \begin{Bmatrix} \sin \tilde{\theta} \\ \cos \tilde{\theta} \end{Bmatrix} R_1 d\tilde{\theta} dz \quad (4.21)$$

Los términos de perturbación Δx , Δy , $\Delta \dot{x}$ y $\Delta \dot{y}$ son independientes de las variables de integración, por lo tanto, se obtiene para las fuerzas y coeficientes de rigidez y amortiguamiento las expresiones siguientes [20]:

$$\begin{Bmatrix} 0 \\ (F_y)_0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \int_z \int_{\tilde{\theta}} p_0 \sin \tilde{\theta} R_1 dz d\tilde{\theta} \\ \int_z \int_{\tilde{\theta}} p_0 \cos \tilde{\theta} R_1 dz d\tilde{\theta} \end{Bmatrix} \quad (4.22)$$

$$\begin{Bmatrix} k_{xx} & k_{xy} \\ k_{yx} & k_{yy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \int_z \int_{\tilde{\theta}} p_x \sin \tilde{\theta} R_1 dz d\tilde{\theta} & \int_z \int_{\tilde{\theta}} p_y \sin \tilde{\theta} R_1 dz d\tilde{\theta} \\ \int_z \int_{\tilde{\theta}} p_x \cos \tilde{\theta} R_1 dz d\tilde{\theta} & \int_z \int_{\tilde{\theta}} p_y \cos \tilde{\theta} R_1 dz d\tilde{\theta} \end{Bmatrix} \quad (4.23)$$

$$\begin{Bmatrix} c_{xx} & c_{xy} \\ c_{yx} & c_{yy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \int_z \int_{\tilde{\theta}} p_{\dot{x}} \sin \tilde{\theta} R_1 dz d\tilde{\theta} & \int_z \int_{\tilde{\theta}} p_{\dot{y}} \sin \tilde{\theta} R_1 dz d\tilde{\theta} \\ \int_z \int_{\tilde{\theta}} p_{\dot{x}} \cos \tilde{\theta} R_1 dz d\tilde{\theta} & \int_z \int_{\tilde{\theta}} p_{\dot{y}} \cos \tilde{\theta} R_1 dz d\tilde{\theta} \end{Bmatrix} \quad (4.24)$$

Las ecuaciones (4.22) corresponden a la solución de estado estable. Para determinar los coeficientes k_{ij} y c_{ij} es necesario obtener primero los incrementos del campo de presión.

Sustituyendo (4.19) en la ecuación de Reynolds (4.13) se obtiene:

$$\frac{\partial}{\partial \tilde{\theta}} \left(h^3 \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{\theta}} \right) + \left(\frac{D}{L} \right)^2 \frac{\partial}{\partial \tilde{z}} \left(h^3 \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{z}} \right) = 12\pi \frac{\partial h}{\partial \tilde{\theta}} + \frac{24\pi}{\omega} \frac{\partial h}{\partial t} \quad (4.25)$$

Para desarrollar la ecuación de forma completa se realiza la sustitución del espesor de la película lubricante en forma adimensional, así como la expansión de primer orden para el campo de presión en la ecuación (4.25):

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial \tilde{\theta}} \left[(h_0 + \Delta X \sin \tilde{\theta} + \Delta Y \cos \tilde{\theta})^3 \frac{\partial}{\partial \tilde{\theta}} (\bar{p}_0 + \bar{p}_X \Delta X + \bar{p}_Y \Delta Y + \bar{p}_{X'} \Delta X' + \bar{p}_{Y'} \Delta Y') \right] + \\ & + \left(\frac{D}{L} \right)^2 \frac{\partial}{\partial \tilde{z}} \left[(h_0 + \Delta X \sin \tilde{\theta} + \Delta Y \cos \tilde{\theta})^3 \frac{\partial}{\partial \tilde{z}} (\bar{p}_0 + \bar{p}_X \Delta X + \bar{p}_Y \Delta Y + \bar{p}_{X'} \Delta X' + \bar{p}_{Y'} \Delta Y') \right] \\ & = 12\pi \frac{\partial}{\partial \tilde{\theta}} (h_0 + \Delta X \sin \tilde{\theta} + \Delta Y \cos \tilde{\theta}) + 24\pi (\Delta X' \sin \tilde{\theta} + \Delta Y' \cos \tilde{\theta}) \end{aligned} \quad (4.26)$$

Desarrollando $(h_0 + \Delta X \sin \tilde{\theta} + \Delta Y \cos \tilde{\theta})^3$ y eliminado los términos de segundo orden y mayores se obtiene la ecuación de Reynolds con solo términos de primer orden.

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial \tilde{\theta}} \left[(h_0^3 + 3h_0^2 \sin \tilde{\theta} \Delta X + 3h_0^2 \cos \tilde{\theta} \Delta Y) \frac{\partial}{\partial \tilde{\theta}} (\bar{p}_0 + \bar{p}_X \Delta X + \bar{p}_Y \Delta Y + \bar{p}_{X'} \Delta X' + \bar{p}_{Y'} \Delta Y') \right] + \\ & + \left(\frac{D}{L} \right)^2 \frac{\partial}{\partial \tilde{z}} \left[(h_0^3 + 3h_0^2 \sin \tilde{\theta} \Delta X + 3h_0^2 \cos \tilde{\theta} \Delta Y) \frac{\partial}{\partial \tilde{z}} (\bar{p}_0 + \bar{p}_X \Delta X + \bar{p}_Y \Delta Y + \bar{p}_{X'} \Delta X' + \bar{p}_{Y'} \Delta Y') \right] \\ & = 12\pi \frac{\partial}{\partial \tilde{\theta}} (h_0 + \Delta X \sin \tilde{\theta} + \Delta Y \cos \tilde{\theta}) + 24\pi (\Delta X' \sin \tilde{\theta} + \Delta Y' \cos \tilde{\theta}) \end{aligned} \quad (4.27)$$

Reuniendo términos del mismo orden se obtiene el siguiente conjunto de ecuaciones.

$$\frac{\partial}{\partial \tilde{\theta}} \left(h_0^3 \frac{\partial \bar{p}_0}{\partial \tilde{\theta}} \right) + \left(\frac{D}{L} \right)^2 \frac{\partial}{\partial \tilde{z}} \left(h_0^3 \frac{\partial \bar{p}_0}{\partial \tilde{z}} \right) = 12\pi \frac{\partial h_0}{\partial \tilde{\theta}} \quad (4.28a)$$

$$\frac{\partial}{\partial \tilde{\theta}} \left(h_0^3 \frac{\partial \bar{p}_X}{\partial \tilde{\theta}} \right) + \left(\frac{D}{L} \right)^2 \frac{\partial}{\partial \tilde{z}} \left(h_0^3 \frac{\partial \bar{p}_X}{\partial \tilde{z}} \right) = 12\pi \cos \tilde{\theta} - \frac{\partial}{\partial \tilde{\theta}} \left(3h_0^2 \sin \tilde{\theta} \frac{\partial \bar{p}_0}{\partial \tilde{\theta}} \right) - \left(\frac{D}{L} \right)^2 \frac{\partial}{\partial \tilde{z}} \left(3h_0^2 \sin \tilde{\theta} \frac{\partial \bar{p}_0}{\partial \tilde{z}} \right) \quad (4.28b)$$

$$\frac{\partial}{\partial \tilde{\theta}} \left(h_0^3 \frac{\partial \bar{p}_Y}{\partial \tilde{\theta}} \right) + \left(\frac{D}{L} \right)^2 \frac{\partial}{\partial \tilde{z}} \left(h_0^3 \frac{\partial \bar{p}_Y}{\partial \tilde{z}} \right) = -12\pi \sin \tilde{\theta} - \frac{\partial}{\partial \tilde{\theta}} \left(3h_0^2 \cos \tilde{\theta} \frac{\partial \bar{p}_0}{\partial \tilde{\theta}} \right) - \left(\frac{D}{L} \right)^2 \frac{\partial}{\partial \tilde{z}} \left(3h_0^2 \cos \tilde{\theta} \frac{\partial \bar{p}_0}{\partial \tilde{z}} \right) \quad (4.28c)$$

$$\frac{\partial}{\partial \tilde{\theta}} \left(h_0^3 \frac{\partial \bar{p}_{X'}}{\partial \tilde{\theta}} \right) + \left(\frac{D}{L} \right)^2 \frac{\partial}{\partial \tilde{z}} \left(h_0^3 \frac{\partial \bar{p}_{X'}}{\partial \tilde{z}} \right) = 24\pi \sin \tilde{\theta} \quad (4.28d)$$

$$\frac{\partial}{\partial \tilde{\theta}} \left(h_0^3 \frac{\partial \bar{p}_{Y'}}{\partial \tilde{\theta}} \right) + \left(\frac{D}{L} \right)^2 \frac{\partial}{\partial \tilde{z}} \left(h_0^3 \frac{\partial \bar{p}_{Y'}}{\partial \tilde{z}} \right) = 24\pi \cos \tilde{\theta} \quad (4.28e)$$

En la ecuación (4.28b) el segundo y tercer término del lado derecho pueden reescribirse como:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial \tilde{\theta}} \left(3h_0^2 \sin \tilde{\theta} \frac{\partial \bar{p}_0}{\partial \tilde{\theta}} \right) + \left(\frac{D}{L} \right)^2 \frac{\partial}{\partial \tilde{z}} \left(3h_0^2 \sin \tilde{\theta} \frac{\partial \bar{p}_0}{\partial \tilde{z}} \right) = \frac{\partial}{\partial \tilde{\theta}} \left(3h_0^3 \frac{\sin \tilde{\theta}}{h_0} \frac{\partial \bar{p}_0}{\partial \tilde{\theta}} \right) + \left(\frac{D}{L} \right)^2 \frac{\partial}{\partial \tilde{z}} \left(3h_0^3 \frac{\sin \tilde{\theta}}{h_0} \frac{\partial \bar{p}_0}{\partial \tilde{z}} \right) = \\ & \frac{3 \sin \tilde{\theta}}{h_0} \left[\frac{\partial}{\partial \tilde{\theta}} \left(h_0^3 \frac{\partial \bar{p}_0}{\partial \tilde{\theta}} \right) + \left(\frac{D}{L} \right)^2 \frac{\partial}{\partial \tilde{z}} \left(h_0^3 \frac{\partial \bar{p}_0}{\partial \tilde{z}} \right) \right] + 3h_0^3 \frac{\partial \bar{p}_0}{\partial \tilde{\theta}} \frac{\partial}{\partial \tilde{\theta}} \left(\frac{\sin \tilde{\theta}}{h_0} \right) \end{aligned} \quad (4.29)$$

$12\pi \frac{\partial h_0}{\partial \tilde{\theta}}$

Por lo tanto, al simplificar términos y realizar cambios de variables la ecuación (4.29) se escribe se la siguiente forma:

$$\frac{\partial}{\partial \tilde{\theta}} \left(3h_0^2 \sin \tilde{\theta} \frac{\partial \tilde{p}_0}{\partial \tilde{\theta}} \right) + \left(\frac{D}{L} \right)^2 \frac{\partial}{\partial \tilde{z}} \left(3h_0^2 \sin \tilde{\theta} \frac{\partial \tilde{p}_0}{\partial \tilde{z}} \right) = 12\pi \frac{\partial h_0}{\partial \tilde{\theta}} \left(\frac{3 \sin \tilde{\theta}}{h_0} \right) + 3h_0^3 \frac{\partial \tilde{p}_0}{\partial \tilde{\theta}} \frac{\partial}{\partial \tilde{\theta}} \left(\frac{\sin \tilde{\theta}}{h_0} \right) \quad (4.30)$$

De la misma forma para la ecuación (4.29c) el 2^{do} y 3^{er} términos del lado derecho se reescriben como:

$$\frac{\partial}{\partial \tilde{\theta}} \left(3h_0^2 \cos \tilde{\theta} \frac{\partial \tilde{p}_0}{\partial \tilde{\theta}} \right) + \left(\frac{D}{L} \right)^2 \frac{\partial}{\partial \tilde{z}} \left(3h_0^2 \cos \tilde{\theta} \frac{\partial \tilde{p}_0}{\partial \tilde{z}} \right) = 12\pi \frac{\partial h_0}{\partial \tilde{\theta}} \left(\frac{3 \cos \tilde{\theta}}{h_0} \right) + 3h_0^3 \frac{\partial \tilde{p}_0}{\partial \tilde{\theta}} \frac{\partial}{\partial \tilde{\theta}} \left(\frac{\cos \tilde{\theta}}{h_0} \right) \quad (4.31)$$

De esta manera se obtiene el siguiente conjunto de ecuaciones para obtener el campo de presión de estado estable y los gradientes del campo de presión.

$$\frac{\partial}{\partial \tilde{\theta}} \left(h_0^3 \frac{\partial \tilde{p}_0}{\partial \tilde{\theta}} \right) + \left(\frac{D}{L} \right)^2 \frac{\partial}{\partial \tilde{z}} \left(h_0^3 \frac{\partial \tilde{p}_0}{\partial \tilde{z}} \right) = 12\pi \frac{\partial h_0}{\partial \tilde{\theta}} \quad (4.32a)$$

$$\frac{\partial}{\partial \tilde{\theta}} \left(h_0^3 \frac{\partial \tilde{p}_X}{\partial \tilde{\theta}} \right) + \left(\frac{D}{L} \right)^2 \frac{\partial}{\partial \tilde{z}} \left(h_0^3 \frac{\partial \tilde{p}_X}{\partial \tilde{z}} \right) = 12\pi \left(\cos \tilde{\theta} - \frac{3 \sin \tilde{\theta}}{h_0} \frac{\partial h_0}{\partial \tilde{\theta}} \right) - 3h_0^3 \frac{\partial \tilde{p}_0}{\partial \tilde{\theta}} \frac{\partial}{\partial \tilde{\theta}} \left(\frac{\sin \tilde{\theta}}{h_0} \right) \quad (4.32b)$$

$$\frac{\partial}{\partial \tilde{\theta}} \left(h_0^3 \frac{\partial \tilde{p}_Y}{\partial \tilde{\theta}} \right) + \left(\frac{D}{L} \right)^2 \frac{\partial}{\partial \tilde{z}} \left(h_0^3 \frac{\partial \tilde{p}_Y}{\partial \tilde{z}} \right) = -12\pi \left(\sin \tilde{\theta} + \frac{3 \cos \tilde{\theta}}{h_0} \frac{\partial h_0}{\partial \tilde{\theta}} \right) - 3h_0^3 \frac{\partial \tilde{p}_0}{\partial \tilde{\theta}} \frac{\partial}{\partial \tilde{\theta}} \left(\frac{\cos \tilde{\theta}}{h_0} \right) \quad (4.32c)$$

$$\frac{\partial}{\partial \tilde{\theta}} \left(h_0^3 \frac{\partial \tilde{p}_{X'}}{\partial \tilde{\theta}} \right) + \left(\frac{D}{L} \right)^2 \frac{\partial}{\partial \tilde{z}} \left(h_0^3 \frac{\partial \tilde{p}_{X'}}{\partial \tilde{z}} \right) = 24\pi \sin \tilde{\theta} \quad (4.32d)$$

$$\frac{\partial}{\partial \tilde{\theta}} \left(h_0^3 \frac{\partial \tilde{p}_{Y'}}{\partial \tilde{\theta}} \right) + \left(\frac{D}{L} \right)^2 \frac{\partial}{\partial \tilde{z}} \left(h_0^3 \frac{\partial \tilde{p}_{Y'}}{\partial \tilde{z}} \right) = 24\pi \cos \tilde{\theta} \quad (4.32e)$$

El conjunto de ecuaciones (4.32 a-e) se encuentran sujetas a las siguientes condiciones de frontera:

$$p_l = 0 \quad \text{en} \quad z = \pm L/2; \quad l = 0, x, y, \dot{x}, \dot{y} \quad (4.33a)$$

$$\frac{\partial p_l}{\partial z} = 0 \quad \text{en} \quad z = 0; \quad l = 0, x, y, \dot{x}, \dot{y} \quad (4.33b)$$

Las condiciones de frontera para la ecuación de estado estable y sus cambios de presión en la curva de cavitación están determinadas por (3.17). Si $(\tilde{\theta}_0, z_0)$ es un punto sobre esta curva, la presión en un punto vecino a esta curva está definida de la forma consecutiva:

$$p(\tilde{\theta}_0 + \Delta\tilde{\theta}_0, z_0 + \Delta z_0) = 0 = p(\tilde{\theta}_0, z_0) + \left(\frac{\partial p}{\partial \tilde{\theta}}\right)_0 \Delta\tilde{\theta} + \left(\frac{\partial p}{\partial z}\right)_0 \Delta z \cong p_0(\tilde{\theta}_0, z_0) + \Delta p(\tilde{\theta}_0, z_0) + \left(\frac{\partial p_0}{\partial \tilde{\theta}}\right)_0 \Delta\tilde{\theta} + \left(\frac{\partial p_0}{\partial z}\right)_0 \Delta z \quad (4.34)$$

Por lo tanto, la presión de estado estable y sus derivadas deben de satisfacer:

$$p_0 = \frac{\partial p_0}{\partial \tilde{\theta}} = \frac{\partial p_0}{\partial z} = 0 \quad \text{en} \quad \tilde{\theta} = \tilde{\theta}(z)_{cav} \quad (4.35)$$

Así con $p_0(\tilde{\theta}_0, z_0)$, $\left(\frac{\partial p_0}{\partial \tilde{\theta}}\right)_0$, $\left(\frac{\partial p_0}{\partial z}\right)_0$ iguales a cero, los gradientes p_l también deben de ser iguales a cero dentro de la región de cavitación y sobre su frontera.

$$p_l = 0 \quad \text{en} \quad \tilde{\theta} = \tilde{\theta}(z)_{cav}; \quad l = 0, x, y, \dot{x}, \dot{y} \quad (4.36)$$

Los requisitos de las condiciones de frontera para las ecuaciones (4.32 a-b) se satisfacen por medio de (4.33 a-b) y (4.34). Hay que notar de las ecuaciones (4.32 a-e) son utilizadas para obtener los coeficientes rotodinámicos por medio de los cambios p_x , p_y , $p_{\dot{x}}$ y $p_{\dot{y}}$, de igual manera, es necesario calcular primero la presión de estado estable p_0 . La precisión que se obtiene al calcular p_0 conducirá a la exactitud de los valores de los coeficientes rotodinámicos

4.2.2. Coeficientes rotodinámicos para chumaceras cortas por medio de los cambios lineales del campo de presión.

Considérense las dos suposiciones para chumaceras cortas hechas por Dubios y Ocvirk. Primero, los gradientes de presión en la dirección x o θ son despreciables si se comparan con los gradientes de presión en la dirección z (dirección axial). Segundo, solo la presión en la región convergente del claro ($0 < \theta < \pi$) se considera para la evaluación de las fuerzas de la película del lubricante. Por lo tanto, para el caso de chumaceras cortas las ecuaciones (4.32 a-e) se reducen a las siguientes expresiones.

$$\left(\frac{D}{L}\right)^2 \frac{\partial}{\partial \tilde{z}} \left(h_0^3 \frac{\partial p_0}{\partial \tilde{z}} \right) = 12\pi \frac{\partial h_0}{\partial \tilde{\theta}} \quad (4.37a)$$

$$\left(\frac{D}{L}\right)^2 \frac{\partial}{\partial \tilde{z}} \left(h_0^3 \frac{\partial p_x}{\partial \tilde{z}} \right) = 12\pi \left(\cos\tilde{\theta} - \frac{3\sin\tilde{\theta}}{h_0} \frac{\partial h_0}{\partial \tilde{\theta}} \right) \quad (4.37b)$$

$$\left(\frac{D}{L}\right)^2 \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \left(h_0^3 \frac{\partial \bar{p}_Y}{\partial \bar{z}} \right) = -12\pi \left(\sin\tilde{\theta} + \frac{3\cos\tilde{\theta}}{h_0} \frac{\partial h_0}{\partial \tilde{\theta}} \right) \quad (4.37c)$$

$$\left(\frac{D}{L}\right)^2 \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \left(h_0^3 \frac{\partial \bar{p}_{X'}}{\partial \bar{z}} \right) = 24\pi \sin\tilde{\theta} \quad (4.37d)$$

$$\left(\frac{D}{L}\right)^2 \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \left(h_0^3 \frac{\partial \bar{p}_{Y'}}{\partial \bar{z}} \right) = 24\pi \cos\tilde{\theta} \quad (4.37e)$$

Hay que notar que las soluciones del sistema de ecuaciones (4.37 a-e) son usadas para obtener el campo de presión resultante, así como los coeficientes de rigidez y amortiguamiento dados por (4.23) y (4.25), para esto es necesario calcular primero la presión en estado estable p_0 de (4.37 a) y posteriormente determinar los cambios p_x , p_y , $p_{\dot{x}}$ y $p_{\dot{y}}$.

Para mostrar la validez de la propuesta, se implementará el algoritmo descrito anteriormente para determinar la presión en estado estable y los cambios de presión con respecto a las posiciones y a las velocidades de una chumacera corta, en la cual: $\frac{L}{D} < \frac{1}{4}$, se asume que los gradientes de presión en la dirección θ son despreciables si se comparan con los gradientes de presión en la dirección z (dirección axial), de igual manera, sólo la presión en la región convergente del claro ($0 < \theta < \pi$) se considera para la evaluación de las fuerzas de la película lubricante. Integrando dos veces la simplificación de las ecuaciones (4.37 a-e) y utilizando las condiciones de frontera descritas anteriormente, se obtienen las soluciones:

$$\bar{p}_0 = \frac{(\bar{z}^2-1)}{2h_0^3} \left(\frac{L}{D}\right)^2 \left[12\pi \frac{\partial h_0}{\partial \tilde{\theta}} \right] \quad (4.38a)$$

$$\bar{p}_X = \frac{(\bar{z}^2-1)}{2h_0^3} \left(\frac{L}{D}\right)^2 \left[12\pi \left(\cos\tilde{\theta} - \frac{3\sin\tilde{\theta}}{h_0} \frac{\partial h_0}{\partial \tilde{\theta}} \right) \right] \quad (4.38b)$$

$$\bar{p}_Y = \frac{(\bar{z}^2-1)}{2h_0^3} \left(\frac{L}{D}\right)^2 \left[-12\pi \left(\sin\tilde{\theta} + \frac{3\cos\tilde{\theta}}{h_0} \frac{\partial h_0}{\partial \tilde{\theta}} \right) \right] \quad (4.38c)$$

$$\bar{p}_{X'} = \frac{(\bar{z}^2-1)}{2h_0^3} \left(\frac{L}{D}\right)^2 \left[24\pi \sin\tilde{\theta} \right] \quad (4.38d)$$

$$\bar{p}_{Y'} = \frac{(\bar{z}^2-1)}{2h_0^3} \left(\frac{L}{D}\right)^2 \left[24\pi \cos\tilde{\theta} \right] \quad (4.38e)$$

Haciendo uso de las ecuaciones (4.38 a-e), se grafican (usando MATHEMATICA 11.0) la presión en estado estable y las variaciones de presión para una chumacera hidrodinámica corta.

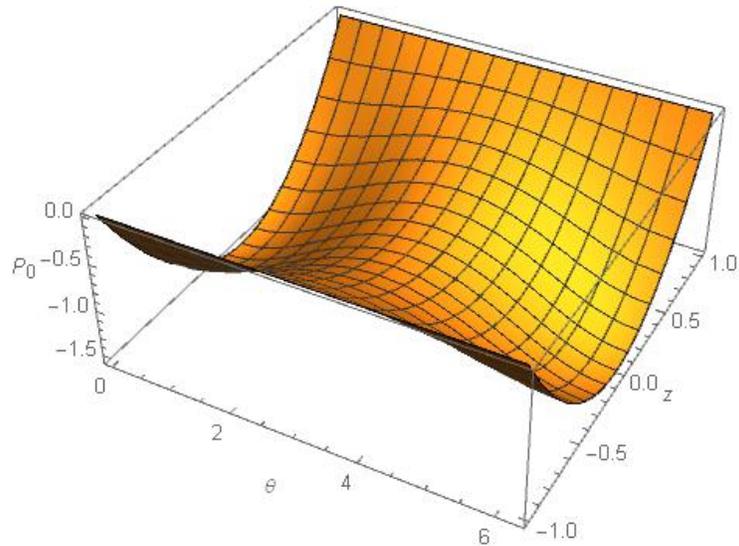


Figura 4.10 Campo de presión total aproximado para \bar{p}_0 ; $\frac{L}{D} = \frac{1}{4}$; $\varepsilon = 0.1$

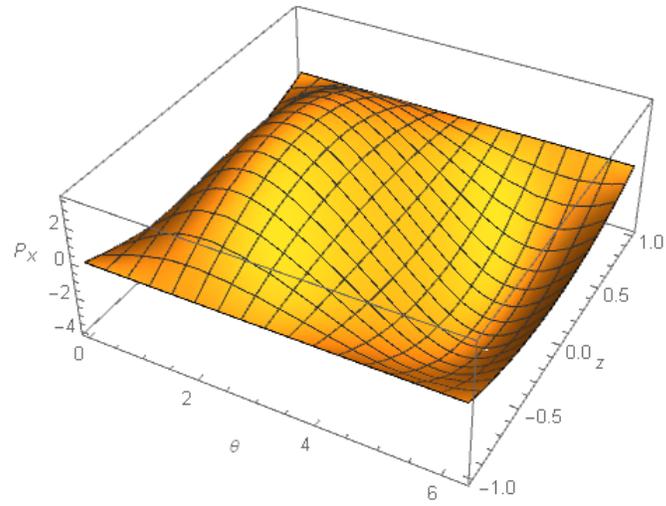


Figura 4.11 Campo de presión total aproximado para \bar{p}_x ; $\frac{L}{D} = \frac{1}{4}$; $\varepsilon = 0.1$

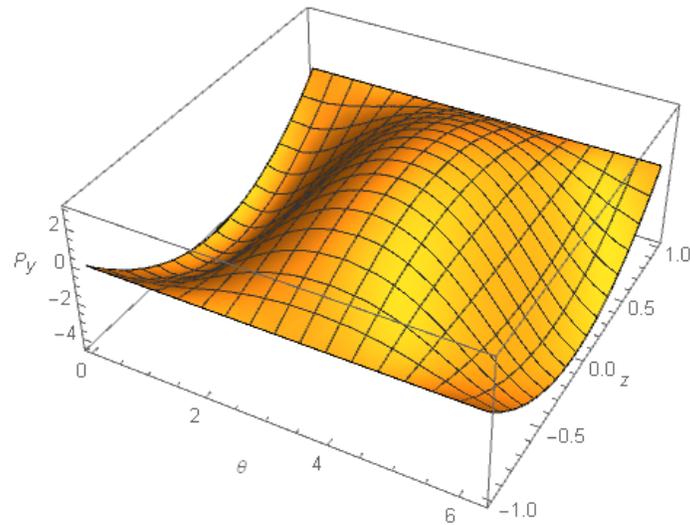


Figura 4.12 Campo de presión total aproximado para \bar{p}_y ; $\frac{L}{D} = \frac{1}{4}$; $\varepsilon = 0.1$

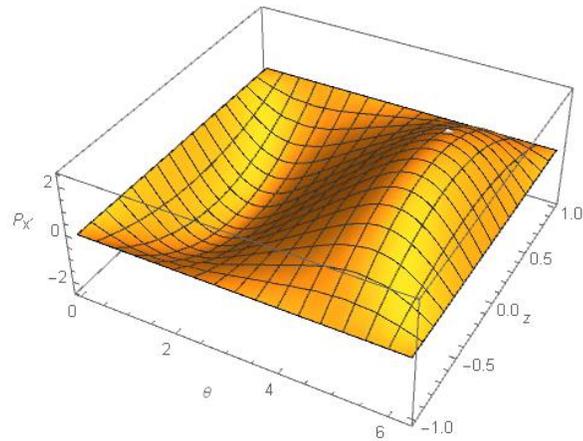


Figura 4.13 Campo de presión total aproximado para $\bar{p}_x; \frac{L}{D} = \frac{1}{4}; \varepsilon = 0.1$

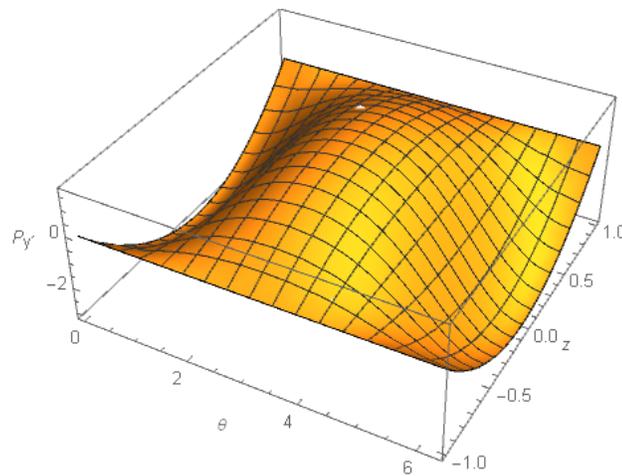


Figura 4.14 Campo de presión total aproximado para $\bar{p}_y; \frac{L}{D} = \frac{1}{4}; \varepsilon = 0.1$

Una vez conocida la presión en estado estable y las variaciones de presión, es posible encontrar los coeficientes de rigidez y amortiguamiento a partir de (4.23) y (4.24), tomando en cuenta las relaciones (3.8) para obtener resultados adimensionales se tendrá

$$\bar{F}_x = \frac{1}{4} \int_{-1}^1 \int_{\varphi}^{\varphi+\pi} \bar{p}_0 \sin \tilde{\theta} d\theta d\bar{z} \tag{4.39a}$$

$$\bar{F}_y = \frac{1}{4} \int_{-1}^1 \int_{\varphi}^{\varphi+\pi} \bar{p}_0 \cos \tilde{\theta} d\theta d\bar{z} \tag{4.39b}$$

$$\bar{k}_{xx} = \frac{1}{4} \int_{-1}^1 \int_{\varphi}^{\varphi+\pi} \bar{p}_X \sin \tilde{\theta} d\theta d\bar{z} \quad (4.39c)$$

$$\bar{k}_{xy} = \frac{1}{4} \int_{-1}^1 \int_{\varphi}^{\varphi+\pi} \bar{p}_Y \sin \tilde{\theta} d\theta d\bar{z} \quad (4.39d)$$

$$\bar{k}_{yx} = \frac{1}{4} \int_{-1}^1 \int_{\varphi}^{\varphi+\pi} \bar{p}_X \cos \tilde{\theta} d\theta d\bar{z} \quad (4.39e)$$

$$\bar{k}_{yy} = \frac{1}{4} \int_{-1}^1 \int_{\varphi}^{\varphi+\pi} \bar{p}_Y \cos \tilde{\theta} d\theta d\bar{z} \quad (4.39f)$$

$$\bar{c}_{xx} = \frac{\omega}{4} \int_{-1}^1 \int_{\varphi}^{\varphi+\pi} \bar{p}_X' \sin \tilde{\theta} d\theta d\bar{z} \quad (4.39g)$$

$$\bar{c}_{xy} = \frac{1}{4} \int_{-1}^1 \int_{\varphi}^{\varphi+\pi} \bar{p}_Y' \sin \tilde{\theta} d\theta d\bar{z} \quad (4.39h)$$

$$\bar{c}_{yx} = \frac{1}{4} \int_{-1}^1 \int_{\varphi}^{\varphi+\pi} \bar{p}_X' \cos \tilde{\theta} d\theta d\bar{z} \quad (4.39i)$$

$$\bar{c}_{yy} = \frac{1}{4} \int_{-1}^1 \int_{\varphi}^{\varphi+\pi} \bar{p}_Y' \cos \tilde{\theta} d\theta d\bar{z} \quad (4.39j)$$

El conjunto de ecuaciones (4.39 c-j) representan en forma analítica los coeficientes rotodinámicos de una chumacera corta, los cuales coinciden con los reportados en la literatura [1], lo anterior permite validar el algoritmo presentado y representa una opción para el cálculo en chumaceras de longitud finita.

Evaluando cada una de esta integrales obtenemos:

$$\begin{aligned} \bar{F}_X &= \frac{1}{4} \int_{-1}^1 \int_{\varphi}^{\varphi+\pi} \frac{(\bar{z}^2-1)}{2h_0^3} \left(\frac{L}{D}\right)^2 12\pi \frac{\partial h_0}{\partial \tilde{\theta}} \sin \tilde{\theta} d\tilde{\theta} d\bar{z} = -2\pi \left(\frac{L}{D}\right)^2 \int_{\varphi}^{\varphi+\pi} \frac{\partial h_0}{\partial \tilde{\theta}} \frac{\sin \tilde{\theta}}{h_0^3} d\tilde{\theta} \\ &= 2\pi \left(\frac{L}{D}\right)^2 \int_0^{\pi} \frac{\varepsilon \sin \theta}{(1+\varepsilon \cos \theta)^3} \sin(\theta + \varphi) d\theta = 2\pi \left(\frac{L}{D}\right)^2 \left[\frac{\pi \varepsilon}{2(1-\varepsilon^2)^{3/2}} \cos \varphi - \frac{2\varepsilon^2}{(1-\varepsilon^2)^2} \sin \varphi \right] = 0 \quad (4.40 a) \end{aligned}$$

Donde $\sin \phi$ y $\cos \phi$ se obtuvieron de la ecuación: $\varphi = \tan^{-1} \left(\frac{\pi \sqrt{1-\varepsilon^2}}{4\varepsilon} \right)$

$$\begin{aligned} \bar{F}_Y &\frac{1}{4} \int_{-1}^1 \int_{\varphi}^{\varphi+\pi} \frac{(\bar{z}^2-1)}{2h_0^3} \left(\frac{L}{D}\right)^2 12\pi \frac{\partial h_0}{\partial \tilde{\theta}} \cos \tilde{\theta} d\tilde{\theta} d\bar{z} = 2\pi \left(\frac{L}{D}\right)^2 \left[\frac{-2\varepsilon^2}{(1-\varepsilon^2)^2} \cos \phi - \frac{\pi \varepsilon}{2(1-\varepsilon^2)^{3/2}} \sin \phi \right] \\ &= \frac{-\varepsilon \pi}{(1-\varepsilon^2)^2} \left(\frac{L}{D}\right)^2 \sqrt{16\varepsilon^2 + \pi^2(1-\varepsilon^2)} \quad (4.40b) \end{aligned}$$

Hasta aquí es posible ver que $\bar{F}_x = 0$ y que \bar{F}_y es igual a la carga W la cual está relacionada con el número de Sommerfeld por $S = 1/F = 1/\bar{F}_y$.

$$\begin{aligned}
 \bar{k}_{xx} &= \frac{1}{4} \int_{-1}^1 \int_{\phi}^{\phi+\pi} \frac{(\bar{z}^2-1)}{2h_0^3} \left(\frac{L}{D}\right)^2 \left[12\pi \left(\cos\tilde{\theta} - \frac{3\sin\tilde{\theta}}{h_0} \frac{\partial h_0}{\partial \tilde{\theta}} \right) \right] \sin\tilde{\theta} d\tilde{\theta} d\bar{z} \\
 &= 2\pi \left(\frac{L}{D}\right)^2 \left[\frac{2\varepsilon}{(1-\varepsilon^2)^2} \cos^2 \phi - \frac{3\pi\varepsilon^2}{2(1-\varepsilon^2)^{5/2}} \sin \phi \cos \phi + \frac{4\varepsilon(1+\varepsilon^2)}{(1-\varepsilon^2)^3} \sin^2 \phi \right] \\
 &= \pi \left(\frac{L}{D}\right)^2 \frac{4\varepsilon}{(1-\varepsilon^2)^2} \frac{2\pi^2+(16-\pi^2)\varepsilon^2}{16\varepsilon^2+\pi^2(1-\varepsilon^2)} \tag{4.40c}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \bar{k}_{xy} &= \frac{1}{4} \int_{-1}^1 \int_{\phi}^{\phi+\pi} \frac{(\bar{z}^2-1)}{2h_0^3} \left(\frac{L}{D}\right)^2 \left[-12\pi \left(\sin\tilde{\theta} + \frac{3\cos\tilde{\theta}}{h_0} \frac{\partial h_0}{\partial \tilde{\theta}} \right) \right] \sin\tilde{\theta} d\tilde{\theta} d\bar{z} \\
 &= 2\pi \left(\frac{L}{D}\right)^2 \left[\frac{-\pi(1+2\varepsilon^2)}{2(1-\varepsilon^2)^{5/2}} \cos^2 \phi + \frac{2\varepsilon(1+3\varepsilon^2)}{(1-\varepsilon^2)^3} \sin \phi \cos \phi - \frac{\pi}{2(1-\varepsilon^2)^{3/2}} \sin^2 \phi \right] \\
 &= \pi \left(\frac{L}{D}\right)^2 \frac{1}{(1-\varepsilon^2)^{5/2}} \frac{\pi[-\pi^2+2\pi^2\varepsilon^2+(16-\pi^2)\varepsilon^4]}{16\varepsilon^2+\pi^2(1-\varepsilon^2)} \tag{4.40d}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \bar{k}_{yx} &= \frac{1}{4} \int_{-1}^1 \int_{\phi}^{\phi+\pi} \frac{(\bar{z}^2-1)}{2h_0^3} \left(\frac{L}{D}\right)^2 \left[12\pi \left(\cos\tilde{\theta} - \frac{3\sin\tilde{\theta}}{h_0} \frac{\partial h_0}{\partial \tilde{\theta}} \right) \right] \cos\tilde{\theta} d\tilde{\theta} d\bar{z} \\
 &= 2\pi \left(\frac{L}{D}\right)^2 \left[\frac{\pi}{2(1-\varepsilon^2)^{3/2}} \cos^2 \phi + \frac{2\varepsilon(1+3\varepsilon^2)}{(1-\varepsilon^2)^3} \sin \phi \cos \phi + \frac{\pi(1+2\varepsilon^2)}{2(1-\varepsilon^2)^{5/2}} \sin^2 \phi \right] \\
 &= 2\pi \left(\frac{L}{D}\right)^2 \frac{\pi[\pi^2+(32+\pi^2)\varepsilon^2+2(16-\pi^2)\varepsilon^4]}{2(1-\varepsilon^2)^{5/2}[16\varepsilon^2+\pi^2(1-\varepsilon^2)]} \tag{4.40e}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \bar{k}_{yy} &= \frac{1}{4} \int_{-1}^1 \int_{\phi}^{\phi+\pi} \frac{(\bar{z}^2-1)}{2h_0^3} \left(\frac{L}{D}\right)^2 \left[-12\pi \left(\sin\tilde{\theta} + \frac{3\cos\tilde{\theta}}{h_0} \frac{\partial h_0}{\partial \tilde{\theta}} \right) \right] \cos\tilde{\theta} d\tilde{\theta} d\bar{z} \\
 &= 2\pi \left(\frac{L}{D}\right)^2 \left[\frac{4\varepsilon(1+\varepsilon^2)}{(1-\varepsilon^2)^3} \cos^2 \phi + \frac{3\pi\varepsilon^2}{2(1-\varepsilon^2)^{5/2}} \sin \phi \cos \phi + \frac{2\varepsilon}{(1-\varepsilon^2)^2} \sin^2 \phi \right] \\
 &= \pi \left(\frac{L}{D}\right)^2 \frac{4\varepsilon[\pi^2+(32+\pi^2)\varepsilon^2+2(16-\pi^2)\varepsilon^4]}{(1-\varepsilon^2)^3[16\varepsilon^2+\pi^2(1-\varepsilon^2)]} \tag{4.40f}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \bar{c}_{xx} &= \frac{1}{4} \int_{-1}^1 \int_{\phi}^{\phi+\pi} \frac{(\bar{z}^2-1)}{2h_0^3} \left(\frac{L}{D}\right)^2 [24\pi\sin\tilde{\theta}] \sin\tilde{\theta} d\tilde{\theta} d\bar{z} \\
 &= 4\pi \left(\frac{L}{D}\right)^2 \left[\frac{\pi}{2(1-\varepsilon^2)^{3/2}} \cos^2 \phi - \frac{4\varepsilon}{(1-\varepsilon^2)^2} \sin \phi \cos \phi + \frac{\pi(1+2\varepsilon^2)}{2(1-\varepsilon^2)^{5/2}} \sin^2 \phi \right] \\
 &= 2\pi \left(\frac{L}{D}\right)^2 \left[\frac{\pi[\pi^2+2(\pi^2-8)\varepsilon^2]}{(1-\varepsilon^2)^{3/2}[16\varepsilon^2+\pi^2(1-\varepsilon^2)]} \right] \tag{4.40g}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \bar{c}_{xy} = \bar{c}_{yx} &= \frac{1}{4} \int_{-1}^1 \int_{\varphi}^{\varphi+\pi} \frac{(\bar{z}^2-1)}{2h_0^3} \left(\frac{L}{D}\right)^2 [24\pi\cos\tilde{\theta}] \sin\tilde{\theta} d\tilde{\theta} d\bar{z} \\
 &= 4\pi \left(\frac{L}{D}\right)^2 \left[\frac{-2\varepsilon}{(1-\varepsilon^2)^2} \cos^2 \varphi + \frac{3\pi\varepsilon^2}{2(1-\varepsilon^2)^{5/2}} \sin \varphi \cos \varphi + \frac{2\varepsilon}{(1-\varepsilon^2)^2} \sin^2 \varphi \right] \\
 &= \pi \left(\frac{L}{D}\right)^2 \left[\frac{8\varepsilon[\pi^2+2(\pi^2-8)\varepsilon^2]}{(1-\varepsilon^2)^2[16\varepsilon^2+\pi^2(1-\varepsilon^2)]} \right] \tag{4.40h}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \bar{c}_{yy} &= \frac{1}{4} \int_{-1}^1 \int_{\varphi}^{\varphi+\pi} \frac{(\bar{z}^2-1)}{2h_0^3} \left(\frac{L}{D}\right)^2 [24\pi\cos\tilde{\theta}] \cos\tilde{\theta} d\tilde{\theta} d\bar{z} \\
 &= 4\pi \left(\frac{L}{D}\right)^2 \left[\frac{\pi(1+2\varepsilon^2)}{2(1-\varepsilon^2)^{5/2}} \cos^2 \varphi + \frac{4\varepsilon}{(1-\varepsilon^2)^2} \sin \varphi \cos \varphi + \frac{\pi}{2(1-\varepsilon^2)^{3/2}} \sin^2 \varphi \right] \\
 &= 2\pi \left(\frac{L}{D}\right)^2 \left[\frac{\pi[\pi^2+2(24-\pi^2)\varepsilon^2+\pi^2\varepsilon^4]}{(1-\varepsilon^2)^{5/2}[16\varepsilon^2+\pi^2(1-\varepsilon^2)]} \right] \tag{4.40i}
 \end{aligned}$$

La tabla 4.1 presenta los resultados obtenidos al realizar la doble integral de las ecuaciones (4.40 c-j) en donde se tiene como resultado los coeficientes rotodinámicos de una chumacera hidrodinámica corta en la forma $\tilde{k}_{ij} = \left(\frac{c}{w}\right)k_{ij}$ y $\tilde{c}_{ij} = \left(\omega \frac{c}{w}\right)c_{ij}$.

Tabla 4.1 Coeficientes rotodinámicos para chumaceras cortas

$\tilde{k}_{xx} = \frac{4[2\pi^2 + (16 - \pi^2)\varepsilon^2]}{[\pi^2 + (16 - \pi^2)\varepsilon^2]^{3/2}}$	$\tilde{c}_{xx} = \frac{2\pi(1 - \varepsilon^2)^{1/2}[\pi^2 + 2(\pi^2 - 8)\varepsilon^2]}{\varepsilon[\pi^2 + (16 - \pi^2)\varepsilon^2]^{3/2}}$
$\tilde{k}_{xy} = \frac{\pi[-\pi^2 + 2\pi^2\varepsilon^2 + (16 - \pi^2)\varepsilon^4]}{\varepsilon\sqrt{1 - \varepsilon^2}[\pi^2 + (16 - \pi^2)\varepsilon^2]^{3/2}}$	$\tilde{c}_{xy} = \frac{8[\pi^2 + 2(\pi^2 - 8)\varepsilon^2]}{[\pi^2 + (16 - \pi^2)\varepsilon^2]^{3/2}}$
$\tilde{k}_{yx} = \frac{\pi[\pi^2 + (32 + \pi^2)\varepsilon^2 + 2(16 - \pi^2)\varepsilon^4]}{\varepsilon\sqrt{1 - \varepsilon^2}[\pi^2 + (16 - \pi^2)\varepsilon^2]^{3/2}}$	$\tilde{c}_{yx} = \frac{8[\pi^2 + 2(\pi^2 - 8)\varepsilon^2]}{[\pi^2 + (16 - \pi^2)\varepsilon^2]^{3/2}}$
$\tilde{k}_{yy} = \frac{4[\pi^2 + (32 + \pi^2)\varepsilon^2 + 2(16 - \pi^2)\varepsilon^4]}{(1 - \varepsilon^2)[\pi^2 + (16 - \pi^2)\varepsilon^2]^{3/2}}$	$\tilde{c}_{yy} = \frac{2\pi[\pi^2 + 2(24 - \pi^2)\varepsilon^2 + \pi^2\varepsilon^4]}{\varepsilon\sqrt{1 - \varepsilon^2}[\pi^2 + (16 - \pi^2)\varepsilon^2]^{3/2}}$

La tabla 4.1 presenta en forma analítica los coeficientes rotodinámicos de una chumacera corta, los cuales coinciden con los reportados en la literatura [10], lo anterior permite validar

el algoritmo presentado y representa una opción para el cálculo de los campos de presión y coeficientes rotodinámicos en chumaceras de longitud finita.

4.3.Propuesta 3: Propuesta de solución analítica mediante funciones producto, a partir de consideraciones específicas.

La propuesta parte de la ecuación de la lubricación de Reynolds dimensional en coordenadas cartesianas (4.42), proponiendo una solución dada como el producto de dos funciones independientes de la forma: $f(z)$ y $f(x)$, en donde ambas funciones tienen un máximo simultáneo; lo anterior se asume para tener una presión máxima para algún par de valores en las coordenadas axiales y angulares respectivamente.

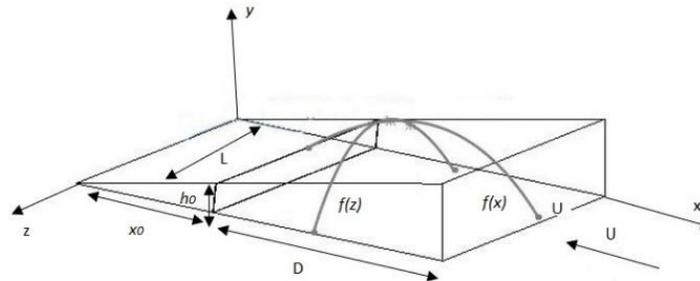


Figura 4.15 Grafica de máximos en $f(z)$ y $f(x)$.

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{\mu} H^3 \frac{\partial P}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{\mu} H^3 \frac{\partial P}{\partial z} \right) = 6 \frac{d}{dx} UH \tag{4.41}$$

Asumiendo una solución por variables separables, considerando dos funciones independientes en las coordenadas z y x de la forma: $p(z, x) = f(z)f(x)$, la intención es determinar por separado ambas funciones para posteriormente encontrar la función producto, lo cual representará el campo de presión en una chumacera de longitud finita.

En la figura 4.15 se muestra la geometría genérica de la región del lubricante, pudiendo ser plana o de cualquier tipo. Es importante considerar para este análisis que se asume que las funciones $f(z)$ y $f(x)$ tienen máximos simultáneos, esto puede ser validado por los resultados numéricos que se tienen de los campos de presión en chumaceras hidrodinámicas [24]. Para trabajar con mayor generalidad, se definen los siguientes cambios de variable:

$$x = Dx_1; z = Lz_1; H = h_0\beta \quad (4.42)$$

En donde β representa la función que define la geometría de la región del aceite, teniendo la facilidad de ser manipulada; es decir si se trata una cavidad plana o curva, solo será necesario definir la función β .

Realizando la sustituyendo de los cambios de variables (4.42) en (4.41) la ecuación toma la siguiente forma:

$$\frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{1}{\mu} h_0^3 \beta^3 \frac{\partial P}{\partial x_1} \right) + \frac{\partial}{L \partial z_1} \left(\frac{1}{\mu} h_0^3 \beta^3 \frac{\partial P}{L \partial z_1} \right) = 6U \frac{h_0 \partial \beta}{D \partial x_1} \quad (4.43)$$

Simplificando y tomando en cuenta los cambios de variable dados por (4.42) se tendrá:

$$\frac{\partial}{\partial x_1} \left(\beta^3 \frac{\partial P}{\partial x_1} \right) + \left(\frac{D}{L} \right)^2 \left(\beta^3 \frac{\partial^2 P}{\partial z_1^2} \right) = \frac{6\mu U}{h_0^2} \frac{d\beta}{dx_1} \quad (4.44)$$

Para tener un mejor manejo de (4.44), se definen algunos parámetros como sigue:

$$N^2 = \left(\frac{D}{L} \right)^2, \quad A = \frac{6\mu U D}{h_0^2} \quad (4.45)$$

El parámetro N está directamente relacionado con la geometría que establece el tamaño de la chumacera hidrodinámica, la variable A contiene las unidades correspondientes a la presión de la película lubricante. Aplicando (4.45) en (4.44) la ecuación toma la forma:

$$\frac{\partial}{\partial x_1} \left(\beta^3 \frac{\partial P}{\partial x_1} \right) + N^2 \beta^3 \frac{\partial^2 P}{\partial z_1^2} = A \frac{d\beta}{dx_1} \quad (4.46)$$

En el método se propone determinar la presión mediante un producto de funciones adimensionales, dada por:

$$P = Af(x) \cdot f(z) \quad (4.47)$$

Sustituyendo (4.47) en (4.46):

$$\frac{\partial}{\partial x_1} \left[\beta^3 f(z_1) \frac{df(x_1)}{dx_1} \right] + N^2 \beta^3 \frac{\partial^2 f(z_1)}{\partial z_1^2} = \frac{d\beta}{dx_1} \quad (4.48)$$

Desarrollando la ecuación (4.48) se tiene:

$$f(z_1)\beta^3 \frac{\partial^2 f(x_1)}{\partial x_1^2} + 3\beta^3 \frac{d\beta}{dx_1} f(z_1) \frac{df(x_1)}{dx_1} + N^2 \beta^3 f(x_1) \frac{\partial^2 f(z_1)}{\partial z_1^2} = \frac{d\beta}{dx_1} \quad (4.49)$$

Al notar el perfil de presión, podemos resolver (4.49) a lo largo de la línea donde $f(x_1)$ es máxima, lo que implica: $\frac{df(x_1)}{dx_1} = 0$, entonces resulta:

$$\frac{\partial^2 f(z_1)}{\partial z_1^2} + \frac{\left[\frac{1}{f(x_1)} \frac{\partial^2 f(x_1)}{\partial x_1^2} \right]_{x_m}}{N^2} f(z_1) = \frac{\left[\frac{1}{\beta^3 f(x_1) dx_1} \right]_{x_m}}{N^2} \quad (4.50)$$

En donde se tiene que:

x_m = valor de x_1 para el cual $f(x_1)$ es un máximo.

La ecuación (4.50) puede ser simplificada considerando que $f(x_1)$ es la misma que para una chumacera infinitamente larga, entonces de (4.46):

$$\frac{d}{dx_1} \left(\beta^3 \frac{dp}{dx_1} \right) = A \frac{d\beta}{dx_1} \quad (4.51)$$

En donde es claro que: $P = Af(x_1)$, entonces puede escribirse:

$$A \left[\beta^3 \frac{d^2 f(x_1)}{dx_1^2} + 3\beta^2 \frac{d\beta}{dx_1} \frac{df(x_1)}{dx_1} \right] = A \frac{d\beta}{dx_1} \quad (4.52)$$

Hay que recordar que $\frac{df(x_1)}{dx_1} = 0$, entonces:

$$\left[\frac{d^2 f(x_1)}{dx_1^2} \right]_{x_m} = \left[\frac{1}{\beta^3} \frac{d\beta}{dx_1} \right]_{x_m} \quad (4.53)$$

Sustituyendo (4.52) en (4.50) se tiene:

$$\frac{d^2 f(z_1)}{dz_1^2} + \frac{\left[\frac{1}{\beta^3 f(x_1) dx_1} \right]_{x_m}}{N^2} f(z_1) = \frac{\left[\frac{1}{\beta^3 f(x_1) dx_1} \right]_{x_m}}{N^2} \quad (4.54)$$

La ecuación (4.52) es fundamental para determinar $f(x_1)$, considerando que es parte del producto de funciones planteadas para la solución del método. Definiendo el parámetro M como sigue:

$$M = \frac{1}{f(x_1)} \frac{1}{\beta^3} \frac{d\beta}{dx_1} \quad (4.55)$$

Aplicando el cambio de variable (4.55) se puede rescribir (4.54) en la forma:

$$\frac{d^2 f(z_1)}{dz_1^2} + \frac{M}{N^2} f(z_1) = \frac{M}{N^2} \quad (4.56)$$

La ecuación (4.56) es diferencial de segundo orden, en general el parámetro $\frac{M}{N^2}$ puede ser positivo o negativo, por tanto, asumiremos las dos alternativas y posteriormente con un ejemplo descartaremos una de ellas. Lo anterior permite escribir:

$$\frac{M}{N^2} = k^2 \quad (4.57a)$$

$$\frac{M}{N^2} = -k^2 \quad (4.57b)$$

Al sustituir (4.57a) en (4.56) se tiene:

$$\frac{d^2 f(z_1)}{dz_1^2} + k^2 f(z_1) = k^2 \quad (4.58)$$

La solución de (4.58) con el cambio de variable (4.57a) es de la forma:

$$f(z_1) = 1 - \cos(kz_1) + \cot k \operatorname{sen}(kz_1) - \operatorname{csck} \operatorname{sen}(kz_1) \quad (4.59)$$

Resolviendo la ecuación diferencial de segundo orden (4.56) con el cambio de variable (4.57b) se obtiene la función de $f(z_1)$ de la forma:

$$f(z_1) = \frac{1 + e^k - e^{kz_1} - e^{k(1-z_1)}}{1 + e^k} \quad (4.60)$$

Para comprobar cual de los cambios (4.57a) o (4.57b) es el adecuado, se plantean tres ejemplos con diferentes formas de la película de lubricante.

4.3.1. Ejemplo 1

Caso plano

Para el primer ejemplo se plantea que la función que representa a β sea una función lineal generando una geometría plana para el espesor de la película lubricante en una chumacera de longitud finita, suponer:

$$\beta = 1 + x_1 \quad (4.61)$$

En donde N representara la relación entre el diámetro y la longitud de una chumacera:

$$\left(N = 1 = \frac{D}{L} \right) \quad (4.62)$$

El primer paso que se realiza es determinar la función de $f(x_1)$ para x_m como un punto crítico. Considerando la ecuación (4.52) se tiene:

$$\left[\frac{d^2 f(x_1)}{dx_1^2} \right]_{x_m} = \left[\frac{1}{\beta^3} \frac{d\beta}{dx_1} \right]_{x_m} \quad (4.63)$$

$$\frac{d^2 f(x_1)}{dx_1^2} = \frac{1}{(1+x_1)^3} \quad (4.64)$$

En donde la función para $f(x_1)$ toma la forma:

$$f(x_1) = \frac{x_1(x_1-1)}{4(1+x_1)} \quad (4.65)$$

Para determinar: $M = \left[\frac{1}{f(x_1)} \frac{1}{\beta^3} \frac{d\beta}{dx_1} \right]_{x_m}$ es necesario conocer x_m que será utilizado para evaluar

a M , por lo tanto, obteniendo los puntos críticos de (4.65) se tienen los siguientes resultados:

$$x_{m1} = -1 - \sqrt{2} \quad (4.66)$$

$$x_{m2} = -1 + \sqrt{2} \quad (4.67)$$

De los resultados x_{m1} y x_{m2} , tomamos el positivo y se podrá determinar cuál de las expresiones (4.57a) o (4.57b) es la que se utilizará; entonces puede escribirse:

$$M = \frac{1}{\frac{x_m(x_m-1)}{4(1+x_m)}} \frac{1}{(1+x_m)^3} \frac{d\beta}{dx_1} \quad (4.68)$$

Sustituyendo (4.67) en (4.68) se tiene:

$$M = \frac{1}{\frac{-1+\sqrt{2}(-1+\sqrt{2}-1)}{4(1+-1+\sqrt{2})}} \frac{1}{(1+-1+\sqrt{2})^3} \frac{d\beta}{dx_1} \quad (4.69)$$

$$M = -8.242 \quad (4.70)$$

El valor obtenido (4.70) al ser negativo valida el uso del cambio de variable (4.57b) por lo tanto la función utilizada para realizar el producto de funciones en $f(z_1)$ es (4.60), utilizando el valor obtenido de (4.70) se sustituye en (4.57b) para calcular el valor de la variable k .

$$\frac{-8.242}{1} = -k^2 \quad (4.71)$$

$$k = \sqrt{\frac{8.242}{1}} \quad (4.72)$$

$$k = 2.87 \quad (4.73)$$

El resultado obtenido (4.73) se emplea en (4.59) teniendo como resultado la figura 4.16, que representa gráficamente el comportamiento de la función $f(z_1)$ en donde:

$$f(z_1) = \frac{1 + e^{2.87} - e^{2.87z_1} - e^{2.87(1-z_1)}}{1 + e^{2.87}} \quad (4.74)$$

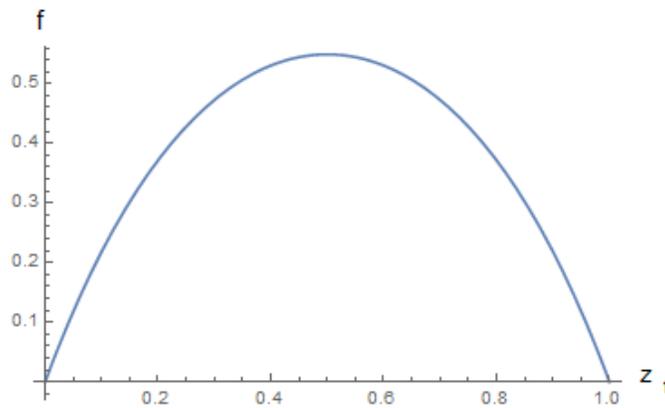


Figura 4.16 Comportamiento de la función $f(z_1)$ con respecto de z_1 .

La figura 4.17 es el resultado grafico de realizar la evaluación de la función $f(x_1)$, mostrando su comportamiento con respecto de z_1 , en donde:

$$f(x_1) = \frac{x_1(x_1-1)}{4(1+x_1)} \tag{4.75}$$

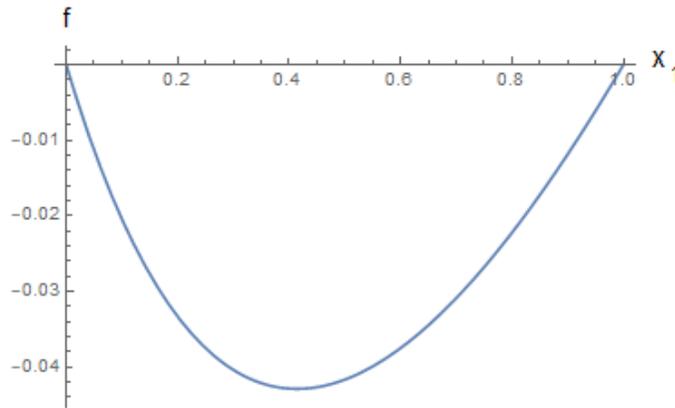


Figura 4.17 Comportamiento de la función $f(x_1)$ con respecto de x_1 .

Al conocer los resultados gráficos de las funciones $f(x_1)$ y $f(z_1)$, se puede calcular el campo de presión mediante el producto de (4.75) y (4.74), cabe mencionar que los resultados obtenidos se han contemplado de forma adimensional, por lo tanto, el producto de funciones $P = Af(x_1) \cdot f(z_1)$ se puede escribir como:

$$P = \left(\frac{x_1(x_1-1)}{4(1+x_1)} \right) \cdot \left(\frac{1+e^{2.87} - e^{2.87z_1} - e^{2.87(1-z_1)}}{1+e^{2.87}} \right) \tag{4.76}$$

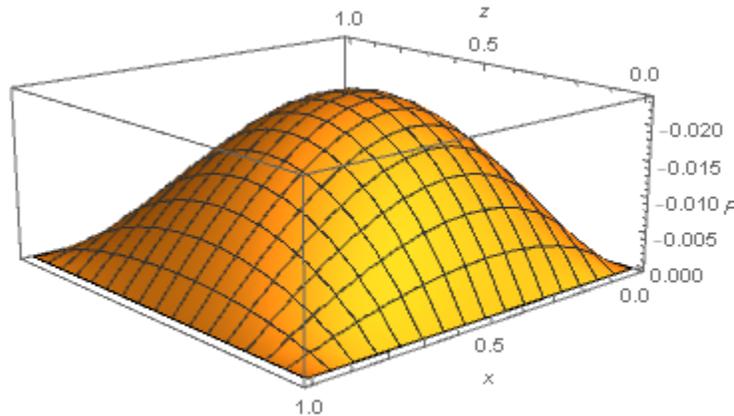


Figura 4.18 Grafica del campo de presión en una chumacera de longitud finita, obtenida mediante el producto de funciones $P = Af(x_1) \cdot f(z_1)$

La figura 4.19 Representa las curvas de nivel en el campo de presión en una chumacera de longitud finita, la representación para este ejemplo ha sido dada por la función $\beta = 1 + x_1$,

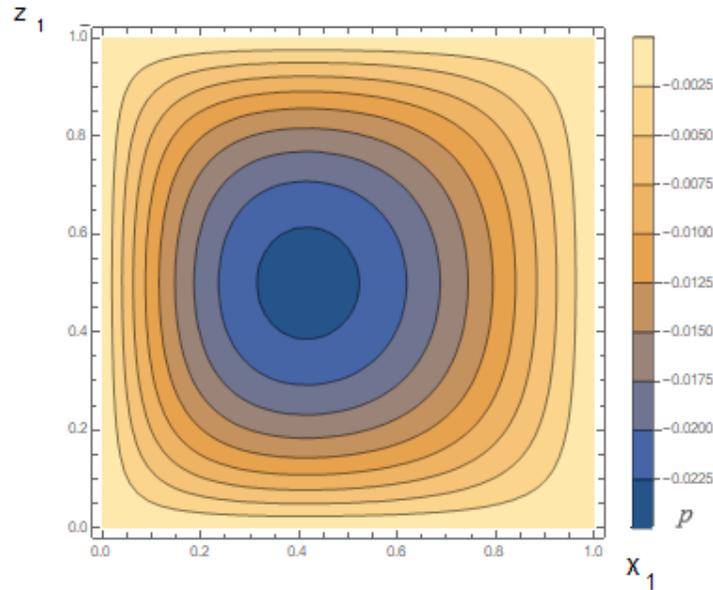


Figura 4.19 Grafica de las curvas de contorno de la presión en una chumacera de longitud finita, obtenida mediante el producto de funciones $P = Af(x_1) \cdot f(z_1)$

lo que implica la representación de una placa plana y otra inclinada generando una geometría plana para el espesor de la película lubricante. Para tener unidades en el valor de la presión es necesario contemplar:

$$A = \frac{6\mu UL}{h_0^2} \quad (4.77)$$

El parámetro (4.77) contiene las unidades correspondientes a la viscosidad del aceite, la longitud de la chumacera, el espesor de la película lubricante y de la velocidad. El manejo de estas unidades permite conocer el valor del campo de presión de forma dimensional conforme al sistema métrico deseado.

4.3.2. Ejemplo 2

Caso exponencial

El ejemplo 2 es planteado a partir de una función exponencial, que representa al espesor de la película lubricante con respecto a una placa plana, la geometría en la película lubricante puede ser representada por:

$$\beta = (2.5)^{x_1} \quad (4.78)$$

Considerando para una relación $\frac{L}{D} = 2$, que caracteriza a una chumacera de longitud finita, en nuestro caso el parámetro está dado por:

$$N = \frac{D}{L} = 0.5 \quad (4.79)$$

Como primer paso, se plantea determinar $f(x_1)$ para x_m recordando que su comportamiento es de un máximo, por lo tanto, se deberá evaluar en:

$$\left[\frac{d^2 f(x_1)}{dx_1^2} \right]_{x_m} = \left[\frac{1}{\beta^3} \frac{d\beta}{dx_1} \right]_{x_m} \quad (4.80)$$

Para hallar la solución $f(x_1)$ se hace la sustitución del valor de β que expresa una función exponencial, por lo tanto, se tiene como resultado:

$$\left[\frac{d^2 f(x_1)}{dx_1^2} \right]_{x_m} = \frac{1}{2.5^{3x_1}} [2.5^{x_1} \ln(2.5)] = \frac{1}{2.5^{3x_1}} \ln(2.5) \quad (4.81)$$

Una vez realizada la sustitución en (4.81) se resuelve la ecuación diferencial de segundo orden para encontrar $f(x_1)$:

$$f(x_1) = -0.27284 + 0.27284e^{-1.8325x_1} + 0.22918x_1 \quad (4.82)$$

El segundo paso del método consiste en determinar x_m y así poder hallar a: $M =$

$$\left[\frac{1}{f(x_1)} \frac{1}{\beta^3} \frac{d\beta}{dx_1} \right]_{x_m} \text{ cuando es evaluada en el punto crítico, considerando:}$$

$$Af'(x_1)=0 \quad (4.83)$$

Después de derivar y simplificar se obtiene:

$$0.229185 - 0.5e^{-1.8325x_1} = 0 \quad (4.84)$$

En donde:

$$x_m = 0.42567 \quad (4.85)$$

El valor de M se puede hallar como sigue:

$$M = \left[\frac{1}{f(x_m)} \frac{1}{2.5^{3x_m}} 2.5^{x_m} \ln(2.5) \right]_{x_m=0.42567} \quad (4.86)$$

Sustituyendo a x_m :

$$M = \left[\frac{1}{-0.05022} \frac{1}{3.22} (1.47716) \ln(2.5) \right] \quad (4.87)$$

$$M = -8.37 \quad (4.88)$$

Al igual que en el ejemplo 1 al tener un valor de M es negativo, se emplea la forma de (4.60) para expresar la función $f(z_1)$, por lo tanto será necesario aplicar (4.57b) para determinar el valor de k , entonces a partir de $\frac{M}{N^2} = -k^2$ se tiene:

$$k^2 = \frac{-8.37}{0.5^2} \quad (4.89)$$

$$k = 5.78 \quad (4.90)$$

El resultado obtenido (4.90) se emplea en (4.60) teniendo como resultado la figura 4.20, que representa gráficamente el comportamiento de la función $f(z_1)$ en donde:

$$f(z_1) = \frac{1+e^{5.78} - e^{5.78z_1} - e^{5.78(1-z_1)}}{1+e^{5.78}} \quad (4.91)$$

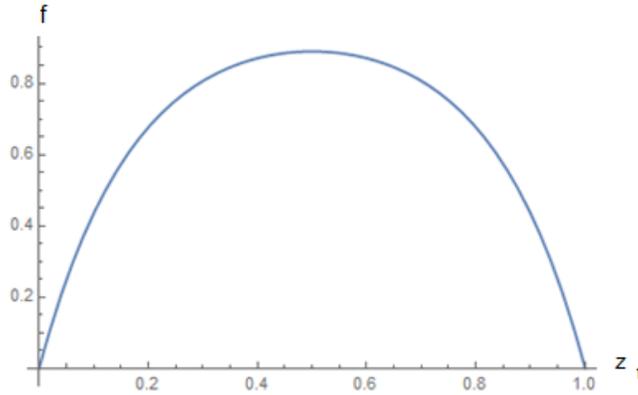


Figura 4.20 Comportamiento de la función $f(z_1)$ con respecto de z_1 .

La figura 4.20 es el resultado grafico de realizar la evaluación de la función $f(x_1)$, mostrando su comportamiento con respecto de z_1 . Así mismo, la ecuación (4.92) es una forma simplificada de (4.82), en la figura (4.21) se aprecia su variación con respecto a x_1 .

$$f(x_1) = -0.27284(1 - e^{-1.8325x_1} + 0.22918x_1) \tag{4.92}$$

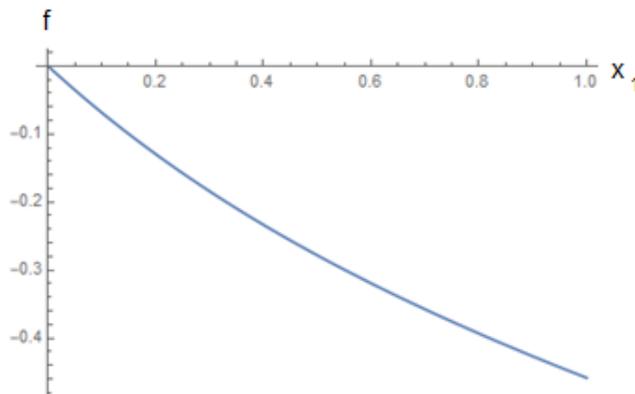


Figura 4.21 Comportamiento de la función $f(x_1)$ con respecto de x_1 .

Una vez que se han graficado las funciones $f(x_1)$ y $f(z_1)$, se realiza el producto de ambas para encontrar el campo de presión cuando β representa a una función exponencial para la película lubricante, es importante destacar que el cálculo se considera de forma adimensional por lo tanto se omite determinar el parámetro A al realizar los cálculos correspondientes. En la figura 4.22 se muestra el campo de presión correspondiente, el cual puede escribirse como:

$$P = (-.27284(1 - e^{-1.8325x_1} + .22918x_1)) \cdot \left(\frac{1 + e^{5.78} - e^{5.78z_1} - e^{5.78(1-z_1)}}{1 + e^{5.78}} \right) \quad (4.93)$$

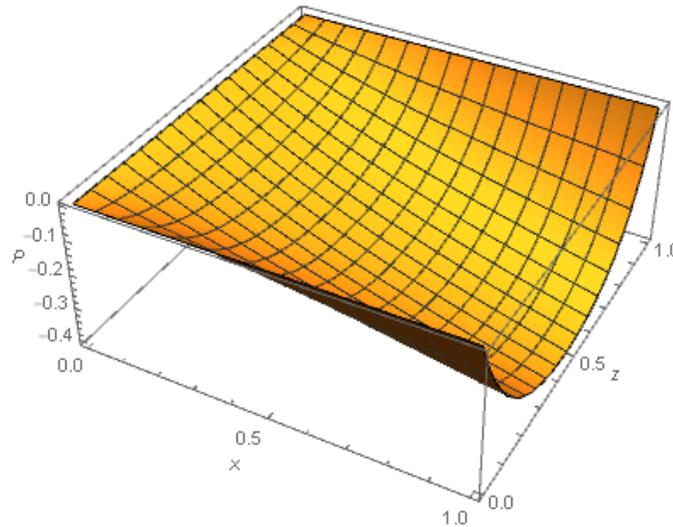


Figura 4.22 Grafica del campo de presión en una chumacera de longitud finita, obtenida mediante el producto de funciones $P = Af(x_1) \cdot f(z_1)$ para $\varepsilon = 0.5$, $f(z_1)$, $f(x_1)$ y $\beta = (2.5)^{x_1}$

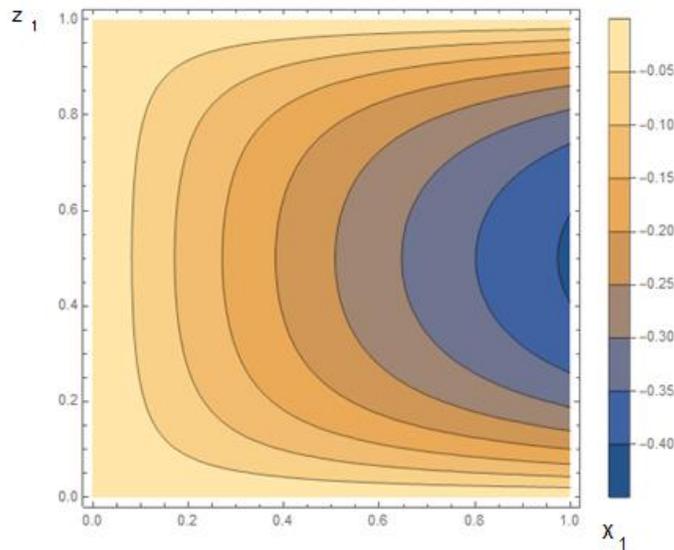


Figura 4.23 Curvas de nivel de presión en máximos para $\varepsilon = 0.5$, $f(z_1)$ y $f(x_1)$ y $\beta = (2.5)^{x_1}$

La figura 4.23 muestra el comportamiento que toma la presión con relación a las coordenadas x y z , con estos resultados se logra identificar fácilmente el comportamiento de la presión en una chumacera hidrodinámica de longitud finita.

4.3.3. Ejemplo 3

Caso cilíndrico

En este caso se puede aprovechar que es conocida la forma que toma la película de lubricante, se calculará para una relación $L/D=2$.

$$\left(N = 0.5 = \frac{D}{L}\right) \quad (4.94)$$

Suponer que la geometría de la película lubricante toma la siguiente forma [10]:

$$\beta = 1 + \varepsilon \cos\theta \quad (4.95)$$

Ahora las variables adimensionales para x son:

$$x = R\theta, \quad x_1 = \frac{x}{D} = \frac{x}{2R} \quad (4.96)$$

entonces (4.95) se puede escribir como:

$$\beta = 1 + \varepsilon \cos 2x_1$$

Conociendo (4.96) se sustituye en (4.53) para determinar la función $f(x_1)$ en el punto crítico x_m :

$$\frac{d^2 f(x_1)}{dx_1^2} = \frac{1}{(1 + \varepsilon \cos 2x_1)^3} [-2\varepsilon \sin 2x_1] \quad (4.97)$$

Resolviendo (4.97) para $f(x_1)$ por medio del programa computacional Wolfram Mathematica se obtiene:

$$\begin{aligned} f(x_1) = & -2x_1 \operatorname{Arctanh} \left[\frac{(-1+\varepsilon)\tan 1}{\sqrt{\varepsilon^2-1}} \right] (1 + \varepsilon \cos 2)(1 + \varepsilon \cos 2x) + \\ & 2 \operatorname{Arctanh} \left[\frac{(\varepsilon-1)\tan x}{\sqrt{\varepsilon^2-1}} \right] (1 + \varepsilon \cos 2)(1 + \varepsilon \cos 2x) + \\ & \frac{\varepsilon\sqrt{\varepsilon^2-1}(x \sin 2 + x \varepsilon \cos 2x \sin 2 - (1 + \varepsilon \cos 2) \sin 2x)}{[4(-1+\varepsilon)(1+\varepsilon)\sqrt{\varepsilon^2-1}(1 + \varepsilon \cos 2)(1 + \varepsilon \cos 2x)]} \end{aligned} \quad (4.98)$$

La ecuación (4.98) representa la función $f(x_1)$ que está directamente relacionada con la geometría del espesor de la película lubricante dado por (4.95). El siguiente paso del método es determinar el punto crítico x_m y sustituirlo en (4.55) considerando $f'(x_1) = 0$, para un valor de excentricidad $\varepsilon = 0.5$ se obtiene:

$$x_m = 0.623879 \quad (4.99)$$

Con el resultado (4.99) se realiza la evaluación para calcular $f(x_m)$:

$$f(0.623879) = 0.06554 \quad (4.100)$$

Así mismo se realizan las evaluaciones en (4.101) con los resultados encontrados en (4.99) y (4.100) para obtener el valor numérico de β en el punto crítico.

$$\left(\frac{d\beta}{dx_1}\right)_{x_m} = -2\epsilon \operatorname{sen}(2x_1) = -0.948275 \quad (4.101)$$

$$\beta = 1.158 \quad (4.102)$$

Aplicando los valores encontrados en (4.100), (4.101) y (4.102) se calcula el valor numérico

de $M = \left[\frac{1}{f(x_1)} \frac{1}{\beta^3} \frac{d\beta}{dx_1} \right]_{x_m}$ de la siguiente forma:

$$M = \left[\frac{1}{0.06554} \cdot (-0.948275) \frac{1}{1.158^3} \right] \quad (4.103)$$

$$M = -9.3 \quad (4.104)$$

Al conocer el valor numérico de (4.104) y considerando la relación (4.94) es posible determinar el valor de la variable k a partir de la ecuación $\frac{M}{N^2} = -k^2$. Valor que es sustituido en la función de $f(z)$ para lograr su evaluación de la siguiente manera:

$$k = \sqrt{\frac{-9.3}{-0.5^2}} \quad (4.105)$$

$$k = 6 \quad (4.106)$$

El valor obtenido de (4.106) se sustituye en (4.60) para encontrar la función $f(z_1)$.

$$f(z_1) = \frac{1+e^6 - e^{6z_1} - e^{6(1-z_1)}}{1+e^6} \quad (4.107)$$

Para terminar el método se realiza el producto de (4.98) y (4.107), graficando el resultado para obtener el campo de presión para la propuesta (4.47) en una chumacera intermedia con valor de $\frac{L}{D} = 2$.

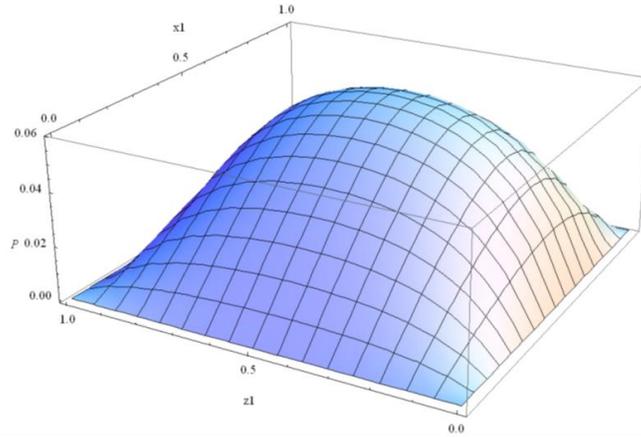


Figura 4.24 Campo de presión obtenido en máximos para $f(z_1)$ y $f(x_1)$ para $\beta = 1 + \varepsilon \cos\theta$

En la figura 4.25 se muestran las curvas de nivel para el campo de presión de la chumacera finita con relación: $\frac{L}{D} = 2$.

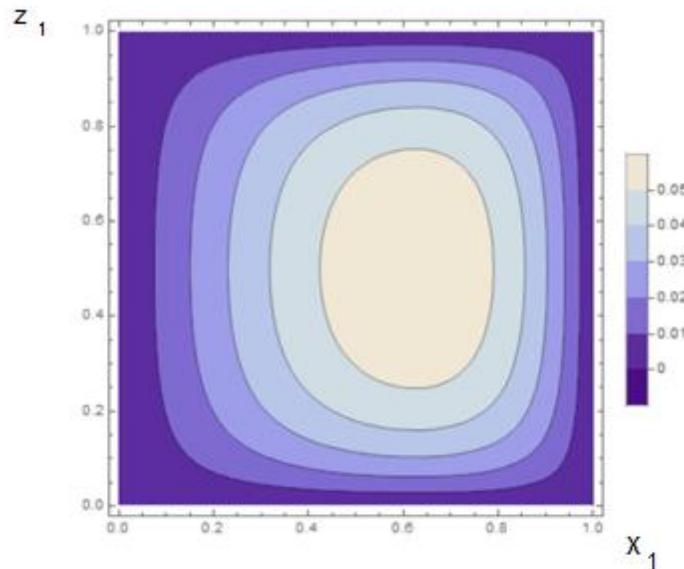


Figura 4.25 Curvas de nivel de presión en máximos para $\varepsilon = 0.5$, $f(z_1)$ y $f(x_1)$ para $\beta = 1 + \varepsilon \cos\theta$

La figura 4.25 muestra el comportamiento que toma la presión con relación a las coordenadas x_1 y z_1 , con estos resultados se logra identificar fácilmente el comportamiento de la presión

en una chumacera hidrodinámica. Ambos resultados mostrados en la figura 4.24 y 4.25 son consistentes con los reportados en las soluciones numéricas que reporta la literatura, estas soluciones fueron obtenidas mediante diferencias finitas [11].

Conclusiones

En este trabajo se abordaron varias propuestas de solución analítica y semi analítica de la ecuación de la lubricación de Reynolds; estos métodos tienen sus correspondientes ventajas y desventajas, las cuales se pudieron presentar y analizar en esta tesis con el conjunto de ejemplos tratados.

La primera propuesta de solución presenta la minimización energética del sistema, mediante un funcional y propone una solución híbrida para un soporte finito, estos resultados son favorables en relación con la literatura existente, sin embargo, la ecuación (4.13) presenta una alta no linealidad en θ por lo que es necesario resolverla de forma numérica, generando nuevas posibilidades de análisis en chumaceras hidrodinámicas de longitud finita.

El método presentado en la segunda propuesta muestra ser bastante eficiente para hallar soluciones cerradas de la ecuación de Reynolds para chumaceras cortas, pues a partir del cálculo de la presión se encuentran fórmulas cerradas de los coeficientes de rigidez y amortiguamiento. Sin embargo, cuando se consideran chumaceras de longitud finita, el sistema de ecuaciones (4.33 a-e) se vuelve demasiado complejo, por lo que sería aconsejable resolverlo numéricamente, lo interesante de este algoritmo es que la solución numérica parece tener menos complicaciones en su adaptación y convergencia que los algoritmos tradicionales.

La tercera propuesta de solución es innovadora al presentar un método analítico para encontrar los campos de presión en chumaceras de longitud finita en forma cerrada, con diversas geometrías en el espesor de la película lubricante. Este método puede adaptarse para geometrías diversas que adquiere la película de aceite. Actualmente solo se cuenta con aproximaciones numéricas para la presión en chumaceras finitas, por lo que los resultados presentados son de gran valor para su posterior análisis; es decir una vez que se encuentra la presión, es posible hallar las fuerzas en el lubricante y los correspondientes coeficientes de rigidez y amortiguamiento de una chumacera de longitud finita.

Referencias

- [1] Childs, D. (1993). *Turbomachinery rotordynamics Phenomena, Modeling, and Analysis*. New York: JOHN WILEY & SONS.
- [2] Mendoza, O. (2014) *Análisis de chumaceras híbridas desalineadas con puertos de presurización puntual*. México: Tesis de Maestría. SEPI-ESIME IPN
- [3] Rankine, W. A. *On the centrifugal force of rotating shafts*. Engineer (London) 27: 249 (1869).
- [4] Rankine, W. (1869). *Centrifugal whirling of shaft*. The engineer, 9.
- [5] Föppl, A. (1895). *Das problem der laval'shen turbinewelle*. Civil ingenieur , 332-342.
- [6] Stodola, A. (1927). *Steam and Gas Turbines*. New York : Mc Graw-Hill.
- [7] Jeffcott, H. (1919). *The lateral vibration of loaded shaft in the neighborhood of a whirling speed the effect of want of balance*. Phil Mag, 304-314.
- [8] Tower, B. (1883). *Second Report on frictions experiments*. Proc. Inst. Mech. Engrs. Vol 36, pp. 58-70. .
- [9] Harrison, W. (1919). *The hidrodynamical theory of lubrication of a cylindrical bearing undervariable load and of a pivot bearing*. Transactions of the Cambridge Philosophical Society, Vol. 22, pp. 373-388.
- [10] Ocvirk, F. (1952). *Short-bearing approximation for full journal bearing*. E.U.A. : s.n: National.
- [11] García, A. (2006). *Investigación analítica y numérica de las propiedades dinámicas de chumaceras hidrodinámicas con y sin desalineamiento*. México, D.F. Tesis de Doctorado: Instituto Politécnico Nacional.
- [12] Ramírez, I. (2007). *Teoría de chumaceras presurizadas con puertos puntuales: Caso de lachumacera corta*. México: Tesis de Doctorado, SEPI-ESIME IPN.
- [13] Bently D, P. (2000). *Dynamic Stiffness and Advantages of Externally Pressurized Fluid Film Bearings*. Orbit, First Quarter.
- [14]. Bently, Donald and Petchenev, Alex. 2000, *Dinamic stiffness and the advantage of externally pressurized fluid-film bearing*. Orbit, pp. 18-24.

- [15]. Torres Cedillo, Sergio Guillermo. (2010), *Experimentación en laboratorio y análisis del comportamiento del sistema chumacera híbrida presurizada con control activo*. Tesis de maestría, México: D.F.: SEPI-ESIME, IPN.
- [16] López A. (2006) *Experimentaciones y análisis de estabilidad dinámica del sistema rotor chumacera con y sin deslizamiento*. Tesis de Maestría. México: D.F.: Instituto Politécnico Nacional.
- [17] Harnoy, A. (2003). *Bearing Desing in Machinery* . New York : Hanroy .
- [18] Reynolds, O. (1886). *On the theory of lubrication and its application to Mr. Beauchamp Tower's experiments including an experimental determination of the viscosity of olive oil*. Londres: Philos. Trans . R. Soc., Vol. 177 Parte 1.
- [19] Szeri, A. Z. (2005.). *Fluid film lubrication: Theory and design* . Cambridge, Inglaterra: Cambridge University Press.
- [20] Hamrock, B. J. (1994). *Fundamentals of fluid film lubrication* . Columbus, Ohio : : Mac Graw-Hill,.
- [21] Domínguez, A. (2011) *Investigación de chumaceras híbridas largas con puertos lineales de presurización*. México: Tesis de Maestría. IPN
- [22] Arfken (2000), *Mathematical Methods for Physic*, Academic Press 5ta Ed.
- [23] Alberto Antonio García, *Investigación numérica de las condiciones de lubricación en chumaceras hidrodinámicas con el efecto del desalineamiento del eje*, Universidad Tecnológica de la Mixteca Huajuapán de León, Oaxaca, (2012).
- [24] Kumar-Bankim, *Fundamentals of Fluid Film Lubrication*, 2013, Ed Mc Graw Hill
- [25] Antonio García A. (2005) *Investigación Analítica y Numérica de las Propiedades Dinámicas de Chumaceras Hidrodinámicas con y sin desalineamiento*.

Apéndices

Apéndice 1.- Métodos de solución analítica de la ecuación de la lubricación de Reynolds para chumaceras finitas.

Javier Roldán C., Ignacio Ramírez V., Mario E. Rodríguez C., Luis M. Palacios Pineda

*Tecnológico Nacional de México/Instituto Tecnológico de Pachuca. División de Estudios de Posgrado e Investigación
Carr. México-Pachuca km 87.5, Pachuca, Hgo. CP 42080, México*

RESUMEN

En este trabajo se presentan dos propuestas de solución para la ecuación de la lubricación de Reynolds en chumaceras finitas, primero se propone una solución en serie de potencias para la presión en la película de lubricante, se genera un algoritmo para chumaceras de longitud finita y se valida el método en el caso de una chumacera corta determinando su campo de presión y sus coeficientes de rigidez y amortiguamiento. Por otro lado, se propone una solución alternativa a partir de una función producto de funciones independientes, las cuales se determinan por separado y se encuentra una expresión cerrada para el campo de presión para chumaceras con relación L/D finitas, se analizan dos ejemplos en donde la película de lubricante tiene una variación de la película de lubricante (exponencial y cilíndrica), se describe claramente la metodología y se verifica su validez.

Palabras Clave: Chumacera Hidrodinámica, Ecuación de Reynolds, campos de presión, coeficientes rotodinámicos.

ABSTRACT

In this work, two solution proposals are presented for the Reynolds lubrication equation in finite bearings, first a solution in series of powers for the pressure in the lubricant film is proposed, an algorithm is generated for bearings of finite length and is validated the method in the case of a short bearing by determining its pressure field and its stiffness and damping coefficients. On the other hand, an alternative solution is proposed from a function product of independent functions, which are determined separately and a closed expression is found for the pressure field for bearings with finite L/D ratio, two examples are analyzed in where the lubricant film has a variation of the lubricant film (exponential and cylindrical), the methodology is clearly described and its validity verified.

Keywords: Hydrodynamic Bearing, Reynolds Equation, Pressure Fields, Rotodynamic Coefficients.

1. Introducción

Una chumacera hidrodinámica es un cuerpo cilíndrico alrededor del cual gira un eje y que se usa en casi todos los tipos de maquinaria para soportar cargas radiales o simplemente como una guía para la transmisión de un par con un mínimo de pérdida de carga y desgaste [1]. Las chumaceras son generalmente de película fluida, esto se debe a las altas cargas de operación [2]. En la literatura se encuentra que a medida que la velocidad de operación aumenta los coeficientes rotodinámicos (rigidez y amortiguamiento) pueden tomar valores negativos y generar inestabilidad [1,3].

La lubricación hidrodinámica en estos soportes está completamente definida mediante la ecuación de lubricación de Reynolds, considerando que es una simplificación especial de las ecuaciones de Navier – Stokes en mecánica de fluidos, por lo tanto, permite determinar el campo de presión dentro de una chumacera en función de su movimiento [4].

En los soportes hidrodinámicos la capacidad de carga que adquieren se debe al campo de presión que se genera en la película de lubricante en relación del movimiento relativo entre el muñón y la chumacera. Por medio de los campos de presión se pueden conocer: las regiones en donde la película lubricante puede romperse, la zona en donde la presión

alcanza su valor máximo, las fuerzas en el fluido lubricante [1].

2. Nomenclatura

p = Presión, Pa.
 θ = Coordenada circunferencial adimensional
 z = Coordenada axial, m.
 φ = Ángulo de equilibrio (attitud), rad.
 C_r = Claro radial de la chumacera, m.
 e = Excentricidad dimensional, m.
 ε = Excentricidad, $\varepsilon = e/C_r$ (adimensional).
 R = Radio de la chumacera, m.
 μ = Viscosidad absoluta, Pa·s.
 H = Espesor de la película de lubricante, m.
 h = Espesor de la película de lubricante adimensional, $h = H/C_r$.
 \bar{z} = Coordenada axial, (adimensional).
 \bar{p} = Presión, (adimensional).
 p_{dim} = Presión ficticia característica.
 D = Diámetro de la chumacera
 L = Longitud de la chumacera
 W = Peso total del sistema, N.
 $\dot{\varepsilon}$ = Velocidad radial (adimensional).
 ω = Velocidad de operación, rad/s.
 \bar{k}_{ij} = Coeficientes adimensionales de rigidez directos y acoplados en las direcciones horizontales y verticales $i = x, y, j = xy$.
 \bar{c}_{ij} = Coeficientes adimensionales de amortiguamiento directos y acoplados en las direcciones horizontales y verticales $i = x, y, j = xy$.
 F_x = Componente horizontal de la fuerza
 F_y = Componente vertical de la fuerza

3. Metodología

3.1 Adimensionalización de la ecuación de Reynolds para chumaceras intermedias (de longitud finita).

La ecuación de Reynolds modela perfectamente el comportamiento de una chumacera hidrodinámica, la solución permite determinar el campo de presión $p(z, \theta)$ de la película de lubricante como función de las coordenadas axial y angular. Recordando que la ecuación de Reynolds se puede escribir como [5]:

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \left(h^3 \frac{\partial p}{\partial \theta} \right) + R^2 \frac{\partial}{\partial z} \left(h^3 \frac{\partial p}{\partial z} \right) = \frac{12\mu R^2}{c_r^3} \left[C_r \dot{\varepsilon} \cos \theta + \varepsilon \left(\dot{\varphi} - \frac{\omega}{2} \right) \text{Sen} \theta \right] \quad (1)$$

En donde:

$$\mathbf{h}(\theta) = C_r (1 + \varepsilon \text{Cos} \theta) \quad (2)$$

con las siguientes condiciones frontera [6]:

$$0 \leq z \leq L, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi,$$

$$p(-L/2) = 0, \quad p(L/2) = 0, \quad p(\theta + 2\pi) = p(\theta) \quad (3)$$

Para tener mayor generalidad, es conveniente adimensionalizar la ecuación (1), proponiendo los siguientes cambios de variables [1]:

$$\bar{p} = \frac{p}{p_{dim}}; \text{ donde: } p_{dim} = \left(\frac{\omega}{2\pi} \right) \left(\frac{R}{C_r} \right)^2, \quad \bar{z} = \frac{z}{L} \quad (4)$$

Aplicando (4) en (1) se obtiene la ecuación de Reynolds adimensional para chumaceras de longitud finita [7]:

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \left(h^3 \frac{\partial \bar{p}}{\partial \theta} \right) + \left(\frac{D}{L} \right)^2 \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \left(h^3 \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{z}} \right) = -12\pi \varepsilon \text{Sen} \theta \quad (5)$$

Es de gran importancia mencionar que hasta ahora se tienen soluciones cerradas para chumaceras cortas y largas, en donde la relación L/D es muy pequeña o grande. Lo anterior significa que en el primer miembro de la ecuación (5) el primer término $\left(\frac{\partial}{\partial \theta} \left(h^3 \frac{\partial \bar{p}}{\partial \theta} \right) \right)$ pueda despreciarse para chumaceras cortas, o bien el segundo término $\left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}} \left(h^3 \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{z}} \right) \right)$ sea el que se pueda despreciar para chumaceras largas [1]. En las propuestas de solución que se describen a continuación, se considera que los campos de presión obtenidos son válidos para chumaceras de cualquier tamaño.

3.2 Primer Propuesta de Solución

La propuesta consiste en asumir una solución de la ecuación de Reynolds en forma de una serie de Taylor de primer orden, esta propuesta implica cambios de presión, de posición y velocidad, lo anterior permite comprender que se trata de una perturbación del eje a partir de su posición de equilibrio. La presión puede escribirse como sigue [2]:

$$p = (p)_0 + \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right)_0 \Delta x + \left(\frac{\partial p}{\partial y} \right)_0 \Delta y + \left(\frac{\partial p}{\partial \dot{x}} \right)_0 \Delta \dot{x} + \left(\frac{\partial p}{\partial \dot{y}} \right)_0 \Delta \dot{y} \quad (6)$$

La figura 1 describe el efecto que producen los cambios de la carga sobre la posición del eje en la chumacera. El subíndice cero en la figura se refiere a la posición de estado estable Δx y Δy indican los desplazamientos del eje alrededor de su posición de equilibrio o pequeños desplazamientos de perturbación. Calculando el cambio de estas pequeñas perturbaciones con respecto al tiempo obtenemos las velocidades de perturbación $\Delta \dot{x}$ y $\Delta \dot{y}$.

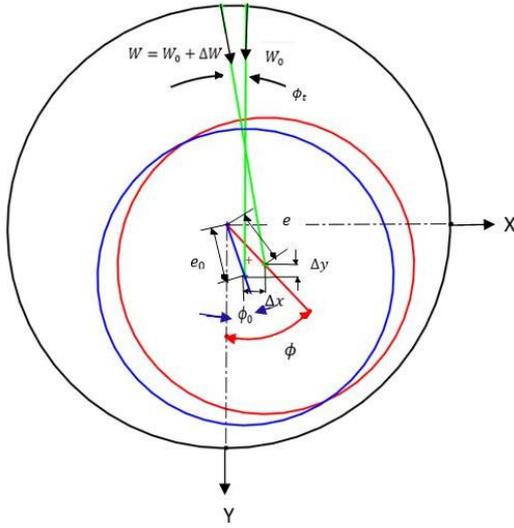


Figura 1. Efecto del cambio de la carga en el muñón [2], [7].

De la figura 1 se puede notar la posición de Estado estable y la posición del centro del muñón cuando existe una pequeña perturbación, esto se puede escribir como [2]:

$$e_0 \sin \varphi_0 + \Delta x = e \sin \varphi \quad (7)$$

$$e_0 \cos \varphi_0 + \Delta y = e \cos \varphi \quad (8)$$

Sustituyendo (7) en la ecuación del espesor de la película (2) y considerando que $\varepsilon = e/C_r$ y $h = H/C_r$ se obtiene el espesor de la película adimensional [2].

$$h = h_0 + \Delta X \sin \tilde{\theta} + \Delta Y \cos \tilde{\theta} \quad (9)$$

Donde $h_0 = 1 + \varepsilon_0 \cos(\tilde{\theta} - \varphi_0)$, $X = x/C_r$ y $Y = y/C_r$

Para simplificar la notación de (6) se hace:

$$\begin{aligned} (p)_0 = p_0; \quad \left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)_0 = p_x; \quad \left(\frac{\partial p}{\partial y}\right)_0 = p_y; \\ \left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)_0 = p_x; \quad \left(\frac{\partial p}{\partial y}\right)_0 = p_y \end{aligned} \quad (10)$$

Las componentes cartesianas de la fuerza en la película de aceite se encuentran por la integración de la presión sobre el área de la chumacera. sustituyendo (10) en las expresiones de la fuerza como se indica a continuación.

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} F_x \\ F_y \end{Bmatrix} &= \int_z \int_{\tilde{\theta}} (p_0 + p_x \Delta x + p_y \Delta y + p_x \Delta x + p_y \Delta y) \\ &\begin{Bmatrix} \sin \tilde{\theta} \\ \cos \tilde{\theta} \end{Bmatrix} R_1 d\tilde{\theta} dz \end{aligned} \quad (11)$$

Los términos $\Delta x, \Delta y, \Delta \dot{x}$ y $\Delta \dot{y}$, son dependientes de las variables de integración por lo tanto se obtiene para las fuerzas y coeficientes de rigidez y amortiguamiento [2]:

$$\begin{Bmatrix} 0 \\ (F_y)_0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \int_z \int_{\tilde{\theta}} p_0 \sin \tilde{\theta} R_1 dz d\tilde{\theta} \\ \int_z \int_{\tilde{\theta}} p_0 \cos \tilde{\theta} R_1 dz d\tilde{\theta} \end{Bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} k_{xx} & k_{xy} \\ k_{yx} & k_{yy} \end{Bmatrix} &= \\ \begin{Bmatrix} \int_z \int_{\tilde{\theta}} p_x \sin \tilde{\theta} R_1 dz d\tilde{\theta} & \int_z \int_{\tilde{\theta}} p_y \sin \tilde{\theta} R_1 dz d\tilde{\theta} \\ \int_z \int_{\tilde{\theta}} p_x \cos \tilde{\theta} R_1 dz d\tilde{\theta} & \int_z \int_{\tilde{\theta}} p_y \cos \tilde{\theta} R_1 dz d\tilde{\theta} \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} c_{xx} & c_{xy} \\ c_{yx} & c_{yy} \end{Bmatrix} &= \\ \begin{Bmatrix} \int_z \int_{\tilde{\theta}} p_x \sin \tilde{\theta} R_1 dz d\tilde{\theta} & \int_z \int_{\tilde{\theta}} p_y \sin \tilde{\theta} R_1 dz d\tilde{\theta} \\ \int_z \int_{\tilde{\theta}} p_x \cos \tilde{\theta} R_1 dz d\tilde{\theta} & \int_z \int_{\tilde{\theta}} p_y \cos \tilde{\theta} R_1 dz d\tilde{\theta} \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (13)$$

Para determinar los coeficientes k_{ij} y c_{ij} Es necesario obtener primero los incrementos del campo de presión. Sustituyendo las ecuaciones (7), (8) y (9) en la ecuación de Reynolds (5) igualmente desarrollando $(h_0 + \Delta X \sin \tilde{\theta} + \Delta Y \cos \tilde{\theta})^3$ y eliminando los términos de orden superior se obtiene [7]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \tilde{\theta}} \left[(h_0^3 + 3h_0^2 \sin \tilde{\theta} \Delta X + 3h_0^2 \cos \tilde{\theta} \Delta Y) \frac{\partial}{\partial \tilde{\theta}} \right] + \left(\frac{D}{L} \right)^2 \frac{\partial}{\partial z} \\ \left[(h_0^3 + 3h_0^2 \sin \tilde{\theta} \Delta X + 3h_0^2 \cos \tilde{\theta} \Delta Y) \frac{\partial}{\partial z} \right] = \\ \left[(\bar{p}_0 + \bar{p}_x \Delta X + \bar{p}_y \Delta Y + \bar{p}_x' \Delta X' + \bar{p}_y' \Delta Y') \right] = \\ 12\pi \frac{\partial}{\partial \tilde{\theta}} (h_0 + \Delta X \sin \tilde{\theta} + \Delta Y \cos \tilde{\theta}) + 24\pi (\Delta X' \sin \tilde{\theta} + \Delta Y' \cos \tilde{\theta}) \end{aligned} \quad (14)$$

Considerando los términos del mismo tipo y al realizar la simplificación de (14) se obtiene el siguiente conjunto de ecuaciones, las cuales permitirán determinar el campo de presión en estado estable, al igual que los cambios de presión con respecto a las posiciones y a las velocidades; una vez resuelto el sistema, se puede sustituir su solución en (6) y encontrar el campo de presión en una chumacera finita.

$$\frac{\partial}{\partial \tilde{\theta}} \left(h_0^3 \frac{\partial \bar{p}_0}{\partial \tilde{\theta}} \right) + \left(\frac{D}{L} \right)^2 \frac{\partial}{\partial z} \left(h_0^3 \frac{\partial \bar{p}_0}{\partial z} \right) = 12\pi \frac{\partial h_0}{\partial \tilde{\theta}} \quad (15)$$

$$\frac{\partial}{\partial \tilde{\theta}} \left(h_0^3 \frac{\partial \bar{p}_x}{\partial \tilde{\theta}} \right) + \left(\frac{D}{L} \right)^2 \frac{\partial}{\partial z} \left(h_0^3 \frac{\partial \bar{p}_x}{\partial z} \right) = 12\pi \left(\cos \tilde{\theta} - \frac{3 \sin \tilde{\theta}}{h_0} \frac{\partial h_0}{\partial \tilde{\theta}} \right) - 3h_0^3 \frac{\partial \bar{p}_0}{\partial \tilde{\theta}} \frac{\partial}{\partial \tilde{\theta}} \left(\frac{\sin \tilde{\theta}}{h_0} \right) \quad (16)$$

$$\frac{\partial}{\partial \tilde{\theta}} \left(h_0^3 \frac{\partial \bar{p}_y}{\partial \tilde{\theta}} \right) + \left(\frac{D}{L} \right)^2 \frac{\partial}{\partial z} \left(h_0^3 \frac{\partial \bar{p}_y}{\partial z} \right) = -12\pi \left(\sin \tilde{\theta} + \frac{3 \cos \tilde{\theta}}{h_0} \frac{\partial h_0}{\partial \tilde{\theta}} \right) - 3h_0^3 \frac{\partial \bar{p}_0}{\partial \tilde{\theta}} \frac{\partial}{\partial \tilde{\theta}} \left(\frac{\cos \tilde{\theta}}{h_0} \right) \quad (17)$$

$$\frac{\partial}{\partial \tilde{\theta}} \left(h_0^3 \frac{\partial \bar{p}_{x'}}{\partial \tilde{\theta}} \right) + \left(\frac{D}{L} \right)^2 \frac{\partial}{\partial z} \left(h_0^3 \frac{\partial \bar{p}_{x'}}{\partial z} \right) = 24\pi \sin \tilde{\theta} \quad (18)$$

$$\frac{\partial}{\partial \tilde{\theta}} \left(h_0^3 \frac{\partial \bar{p}_{y'}}{\partial \tilde{\theta}} \right) + \left(\frac{D}{L} \right)^2 \frac{\partial}{\partial z} \left(h_0^3 \frac{\partial \bar{p}_{y'}}{\partial z} \right) = 24\pi \cos \tilde{\theta} \quad (19)$$

En donde las condiciones de frontera del sistema anterior están definidas como:

$$p_l = 0 \text{ en } z = \pm L/2; l = 0, x, y, \dot{x}, \dot{y}$$

$$\partial p_l / \partial z = 0 \text{ en } z = 0 \quad l = 0, x, y, \dot{x}, \dot{y}$$

Notar que las soluciones del sistema de ecuaciones (16-19) son usadas para obtener el campo de presión resultante, así como los coeficientes de rigidez y amortiguamiento dados por (12) y (13), para esto es necesario calcular primero la presión en estado estable p_0 de (15) y posteriormente determinar los cambios p_x , p_y , $p_{x'}$ y $p_{y'}$.

Para mostrar la validez de la propuesta, se implementará el algoritmo descrito anteriormente para determinar la presión en estado estable y los cambios de presión con respecto a las posiciones y a las velocidades de una chumacera corta, en la cual: $\frac{L}{D} < \frac{1}{4}$, se asume que los gradientes de presión en la dirección θ son despreciables si se comparan con los gradientes de presión en la dirección z (dirección axial), de igual manera, sólo la presión en la región convergente del claro ($0 < \theta < \pi$) se considera para la evaluación de las fuerzas de la película lubricante. Integrando dos veces la simplificación de las ecuaciones (16-19) y utilizando las condiciones de frontera descritas anteriormente, se obtienen las soluciones:

$$\bar{p}_0 = \frac{(z^2-1)}{2h_0^3} \left(\frac{L}{D} \right)^2 \left[12\pi \frac{\partial h_0}{\partial \tilde{\theta}} \right] \quad (20a)$$

$$\bar{p}_x = \frac{(z^2-1)}{2h_0^3} \left(\frac{L}{D} \right)^2 \left[12\pi \left(\cos \tilde{\theta} - \frac{3 \sin \tilde{\theta}}{h_0} \frac{\partial h_0}{\partial \tilde{\theta}} \right) \right] \quad (20b)$$

$$\bar{p}_y = \frac{(z^2-1)}{2h_0^3} \left(\frac{L}{D} \right)^2 \left[-12\pi \left(\sin \tilde{\theta} + \frac{3 \cos \tilde{\theta}}{h_0} \frac{\partial h_0}{\partial \tilde{\theta}} \right) \right] \quad (20c)$$

$$\bar{p}_{x'} = \frac{(z^2-1)}{2h_0^3} \left(\frac{L}{D} \right)^2 \left[24\pi \sin \tilde{\theta} \right] \quad (20d)$$

$$\bar{p}_{y'} = \frac{(z^2-1)}{2h_0^3} \left(\frac{L}{D} \right)^2 \left[24\pi \cos \tilde{\theta} \right] \quad (20e)$$

Haciendo uso de las ecuaciones (20 a-e), se grafican (usando MATHEMATICA 11.0) la presión en estado estable y las variaciones de presión para una chumacera hidrodinámica corta.

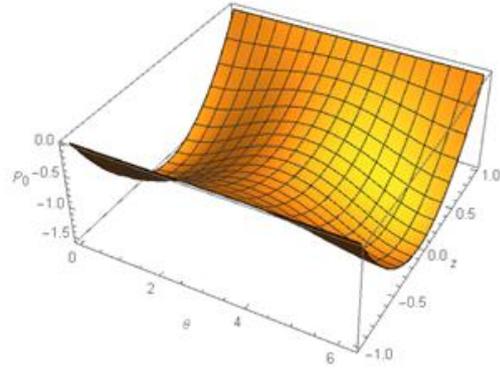


Figura 2. Campo de presión total aproximado para \bar{p}_0 ; $\frac{L}{D} = \frac{1}{4}$; $\varepsilon = 0.1$

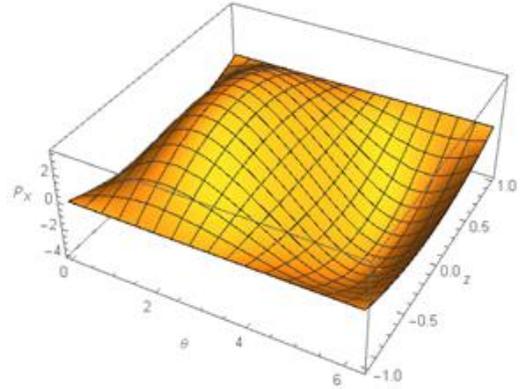


Figura 3. Campo de presión total aproximado para \bar{p}_x ; $\frac{L}{D} = \frac{1}{4}$; $\varepsilon = 0.1$

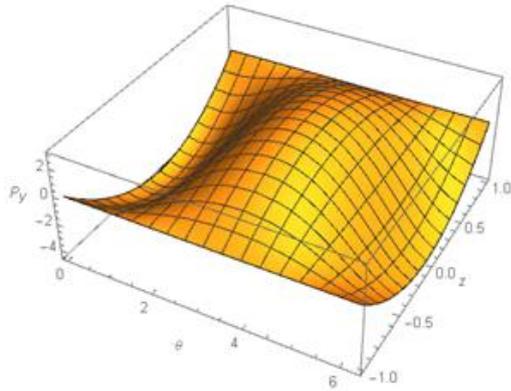


Figura 4. Campo de presión total aproximado para $\bar{p}_y; \frac{L}{D} = \frac{1}{4}; \varepsilon = 0.1$

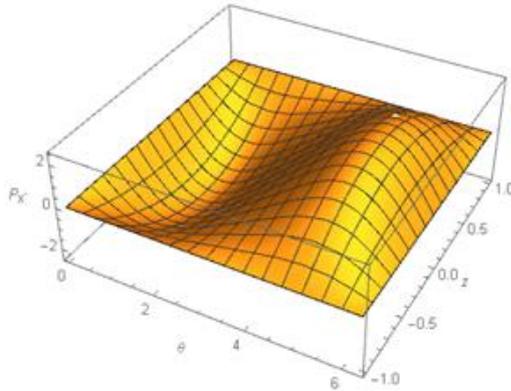


Figura 5. Campo de presión total aproximado para $\bar{p}_x; \frac{L}{D} = \frac{1}{4}; \varepsilon = 0.1$

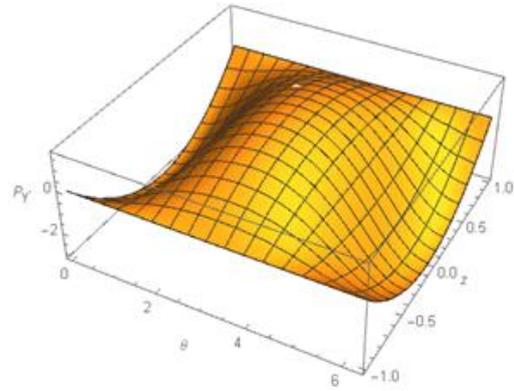


Figura 6. Campo de presión total aproximado para $\bar{p}_y; \frac{L}{D} = \frac{1}{4}; \varepsilon = 0.1$

Una vez conocida la presión en estado estable y las variaciones de presión, es posible encontrar los coeficientes de rigidez y amortiguamiento a partir de (12) y (13), tomando en cuenta las relaciones (4) para obtener resultados adimensionales se tendrá:

$$\tilde{k}_{xx} = \frac{4[2\pi^2 + (16 - \pi^2)\varepsilon^2]}{[\pi^2 + (16 - \pi^2)\varepsilon^2]^{3/2}} \quad (21a)$$

$$\tilde{k}_{xy} = \frac{\pi[-\pi^2 + 2\pi^2\varepsilon^2 + (16 - \pi^2)\varepsilon^4]}{\varepsilon\sqrt{1 - \varepsilon^2}[\pi^2 + (16 - \pi^2)\varepsilon^2]^{3/2}} \quad (21b)$$

$$\tilde{k}_{yx} = \frac{\pi[\pi^2 + (32 + \pi^2)\varepsilon^2 + 2(16 - \pi^2)\varepsilon^4]}{\varepsilon\sqrt{1 - \varepsilon^2}[\pi^2 + (16 - \pi^2)\varepsilon^2]^{3/2}} \quad (21c)$$

$$\tilde{k}_{yy} = \frac{4[\pi^2 + (32 + \pi^2)\varepsilon^2 + 2(16 - \pi^2)\varepsilon^4]}{(1 - \varepsilon^2)[\pi^2 + (16 - \pi^2)\varepsilon^2]^{3/2}} \quad (21d)$$

$$\tilde{c}_{xx} = \frac{2\pi(1 - \varepsilon^2)^{1/2}[\pi^2 + 2(\pi^2 - 8)\varepsilon^2]}{\varepsilon[\pi^2 + (16 - \pi^2)\varepsilon^2]^{3/2}} \quad (21e)$$

$$\tilde{c}_{xy} = \frac{8[\pi^2 + 2(\pi^2 - 8)\varepsilon^2]}{[\pi^2 + (16 - \pi^2)\varepsilon^2]^{3/2}} \quad (21f)$$

$$\tilde{c}_{yx} = \frac{8[\pi^2 + 2(\pi^2 - 8)\varepsilon^2]}{[\pi^2 + (16 - \pi^2)\varepsilon^2]^{3/2}} \quad (21g)$$

$$\tilde{c}_{yy} = \frac{2\pi[\pi^2 + 2(24 - \pi^2)\varepsilon^2 + \pi^2\varepsilon^4]}{\varepsilon\sqrt{1 - \varepsilon^2}[\pi^2 + (16 - \pi^2)\varepsilon^2]^{3/2}} \quad (21h)$$

El conjunto de ecuaciones (21 a-h) representan en forma analítica los coeficientes rotodinámicos de una chumacera corta, los cuales coinciden con los reportados en la literatura [1], lo anterior permite validar el algoritmo presentado y representa una opción para el cálculo en chumaceras de longitud finita.

3.2 Segunda propuesta de solución

La propuesta parte de la ecuación de la lubricación de Reynolds dimensional en coordenadas cartesianas, la cual puede escribirse como:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{\mu} H^3 \frac{\partial p}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{\mu} H^3 \frac{\partial p}{\partial z} \right) = 6 \frac{d}{dx} UH \quad (22)$$

Asumiendo una solución por variables separables, considerando dos funciones independientes de las coordenadas z y x de la forma: $p(z, x) = f(z)f(x)$, la intención es determinar por separado ambas funciones para posteriormente encontrar la función producto, lo cual representará el campo de presión en una chumacera de longitud finita.

En la figura 7 se muestra la geometría genérica de la región del lubricante, pudiendo ser plana o de cualquier tipo. Es importante considerar para este análisis, que se asume que las funciones $f(z)$ y $f(x)$ tienen máximos simultáneos, esto puede ser validado por los resultados numéricos que se tienen de los campos de presión en chumaceras hidrodinámicas [4]. Para trabajar con mayor generalidad, se definen los siguientes cambios de variable:

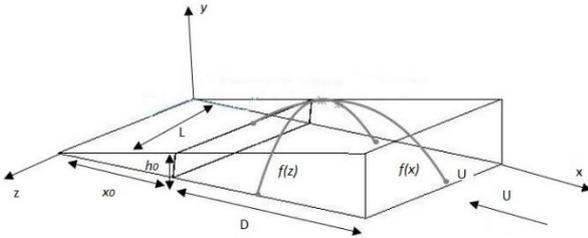


Figura 7. Grafica de máximos en $f(z)$ y $f(x)$.

$$x = Dx_1; z = Lz_1; H = h_0\beta \quad (23)$$

En donde β representa la función que define la geometría de la región del aceite, teniendo la facilidad de ser manipulada; es decir si se trata una cavidad plana o curva, solo será necesario definir la función β . Es importante mencionar que la forma de β será de gran importancia para modelar el espacio por donde se encuentre el aceite lubricante, así mismo si esta función es compleja entonces la solución analítica será más difícil de obtener.

Aplicando las variables adimensionales (23) en (22) y simplificando los términos se obtiene:

$$\frac{\partial}{\partial x_1} \left(\beta^3 \frac{\partial p}{\partial x_1} \right) + \left(\frac{D}{L} \right)^2 \left(\beta^3 \frac{\partial^2 p}{\partial z_1^2} \right) = \frac{6\mu U}{h_0^2} \frac{d\beta}{dx_1} \quad (24)$$

Definiendo los parámetros siguientes en (24) y así facilitar los cálculos, usando las siguientes variables:

$$N^2 = \left(\frac{D}{L} \right)^2, A = \frac{6\mu UD}{h_0^2} \quad (25)$$

El parámetro N está directamente relacionado con la geometría que establece el tamaño de la chumacera hidrodinámica, y la variable A contiene las unidades correspondientes a la presión de la película lubricante.

Aplicando (25) en (24) la ecuación toma la siguiente forma:

$$\frac{\partial}{\partial x_1} \left(\beta^3 \frac{\partial p}{\partial x_1} \right) + N^2 \beta^3 \frac{\partial^2 p}{\partial z_1^2} = A \frac{d\beta}{dx_1} \quad (26)$$

En el método se propone determinar la presión mediante un producto de funciones adimensionales, dada por:

$$p = Af(x)f(z) \quad (27)$$

Sustituyendo (27) en (26) y desarrollando se tiene [4]:

$$f(z_1) \beta^3 \frac{\partial^2 f(x_1)}{\partial x_1^2} + 3\beta^3 \frac{d\beta}{dx_1} f(z_1) \frac{df(x_1)}{dx_1} + N^2 \beta^3 f(x_1) \frac{\partial^2 f(z_1)}{\partial z_1^2} = \frac{d\beta}{dx_1} \quad (28)$$

Al notar el perfil de presión, es posible resolver (28) a lo largo de la línea donde $f(x_1)$ es máxima, (ver figura 7) lo que implica: $\frac{df(x_1)}{dx_1} = 0$, entonces resulta:

$$\frac{\partial^2 f(z_1)}{\partial z_1^2} + \frac{\left[\frac{1}{f(x_1)} \frac{\partial^2 f(x_1)}{\partial x_1^2} \right]_{x_m}}{N^2} f(z_1) = \frac{\left[\frac{1}{\beta^3 f(x_1) dx_1} \frac{d\beta}{dx_1} \right]_{x_m}}{N^2} \quad (29)$$

Notar que x_m representa el valor de x_1 para el cual $f(x_1)$ es un máximo.

La ecuación (29) puede ser simplificada considerando que $f(x_1)$ es la misma que para una chumacera infinitamente larga, por lo tanto, se puede despreciar el primer término de (26) quedando como:

$$\frac{d}{dx_1} \left(\beta^3 \frac{dp}{dx_1} \right) = A \frac{d\beta}{dx_1} \quad (30)$$

En donde es claro que: $P = Af(x_1)$, entonces puede escribirse:

$$A \left[\beta^3 \frac{d^2 f(x_1)}{dx_1^2} + 3\beta^2 \frac{d\beta}{dx_1} \frac{df(x_1)}{dx_1} \right] = A \frac{d\beta}{dx_1} \quad (31)$$

Hay que recordar que $\frac{df(x_1)}{dx_1} = 0$, entonces:

$$\left[\frac{d^2 f(x_1)}{dx_1^2} \right]_{x_m} = \left[\frac{1}{\beta^3} \frac{d\beta}{dx_1} \right]_{x_m} \quad (32)$$

La ecuación (32) es fundamental para determinar $f(x_1)$, considerando que es parte del producto de funciones planteadas para la solución del método.

Sustituyendo (32) en (29) y si se define el parámetro M :

$$M = \left[\frac{1}{f(x_1)} \frac{1}{\beta^3} \frac{d\beta}{dx_1} \right]_{x_m} \quad (33)$$

Entonces se puede escribir:

$$\frac{d^2 f(z_1)}{dz_1^2} + \frac{M}{N^2} f(z_1) = \frac{M}{N^2} \quad (34)$$

haciendo:

$$\frac{M}{N^2} = -k^2 \quad (35)$$

Resolviendo la ecuación diferencial de segundo orden (34)

y aplicando (35) se obtiene la función de $f(z_1)$.

$$f(z_1) = \frac{1 + e^k - e^{kz_1} - e^{k(1-z_1)}}{1 + e^k} \quad (36)$$

La ecuación (36) es la parte complementaria del producto de funciones que se establece en la propuesta para dar solución a la ecuación (22). Las funciones $f(x_1)$ y $f(z_1)$ se emplean para calcular los campos de presión adimensionales en chumaceras de longitud finita de forma analítica [4].

$$p = f(x) f(z) \quad (37)$$

3.3 Ejemplos de aplicación de la segunda propuesta de solución.

En esta sección se realizan dos ejemplos prácticos para demostrar la efectividad de la propuesta de solución con diferentes funciones en β , refiriéndose a la película

lubricante (exponencial y cilíndrica). Como se mencionó anteriormente, la función β modela el espacio de alojamiento del aceite lubricante. En primer ejemplo se asume una forma exponencial en la película de lubricante, esta propuesta permitirá conocer la variación de la presión en este tipo de cavidad. En el ejemplo 2 se propone la forma real de alojamiento del aceite en una chumacera circular.

Ejemplo 1

Se considera una función exponencial para definir la geometría de la película lubricante, de igual manera se contempla una chumacera hidrodinámica intermedia $\frac{L}{D} = 2$.

Suponer $\beta = (2.5)^{x_1}$

$$\left(N = \frac{D}{L} = 0.5 \right) \quad (38)$$

En la primera parte del ejemplo se plantea encontrar el punto máximo $f(x_1)$ para el punto crítico x_m partiendo de (32)

$$\left[\frac{d^2 f(x_1)}{dx_1^2} \right]_{x_m} = \frac{1}{2.5^{3x_1}} [2.5^{x_1} \ln(2.5)] = \frac{1}{2.5^{3x_1}} \ln(2.5) \quad (39)$$

Al resolver (39) en función de $f(x_1)$ se tiene:

$$f(x_1) = -0.27284 + 0.27284e^{-1.8325x_1} + 0.22918x_1 \quad (40)$$

En la segunda parte se determina el punto crítico x_m , considerando lo siguiente:

$$A f'(x_1) = 0 \quad (41)$$

$$0.229185 - 0.5e^{-1.8325x_1} = 0$$

$$x_m = 0.42567 \quad (42)$$

Conociendo x_m , se evalúa en (33) para encontrar el valor numérico de M :

$$M = \left[\frac{1}{f(x_m)} \frac{1}{2.5^{3x_m}} 2.5^{x_m} \ln(2.5) \right]_{x_m} \quad (43)$$

$$M = \left[\frac{1}{-0.5022} \frac{1}{3.22} (1.47716) \ln(2.5) \right]_{.42567} \quad (44)$$

$$M = -8.37 \quad (45)$$

Con los valores obtenidos y sabiendo N y M se calcula el valor de la variable k .

$$\text{Recordando de (35): } \frac{-8.37}{0.5^2} = -k^2 \quad (46)$$

$$k = 5.78 \quad (47)$$

Con base en los resultados obtenidos para las variables que interactúan en las funciones $f(x_1)$ y $f(z_1)$, se realiza el producto de funciones para determinar el campo de presión en una chumacera de longitud intermedia de forma adimensional, a partir de (36) y (40) se obtiene:

$$p = Af(x_1) \cdot f(z_1)$$

$$p = A \left(-0.27284(1 - e^{-1.8325x_1} + .22918x_1) \right) \cdot \left(\frac{1 + e^{5.78} - e^{5.78z_1} - e^{5.78(1-z_1)}}{1 + e^{5.78}} \right) \quad (48)$$

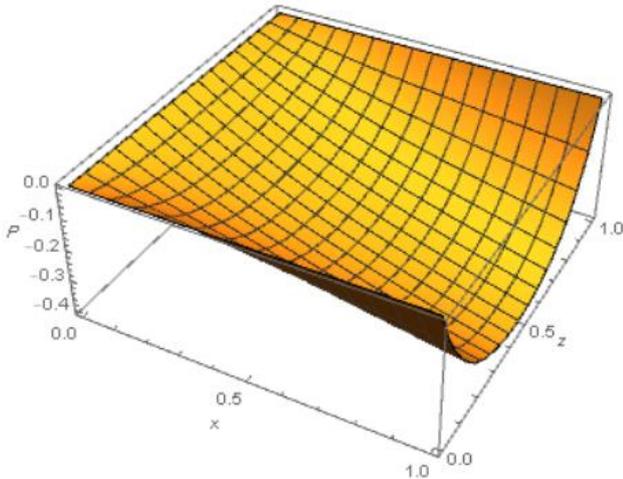


Figura 8. Campo de presión obtenido en máximos para $f(z)$ y $f(x)$ para $\beta = (2.5)^{x_1}$

La figura 8 representa el campo de presión obtenido mediante el método de producto de funciones $f(z)$ y $f(x)$, para el caso de una chumacera de longitud intermedia $\frac{L}{D} = 2$

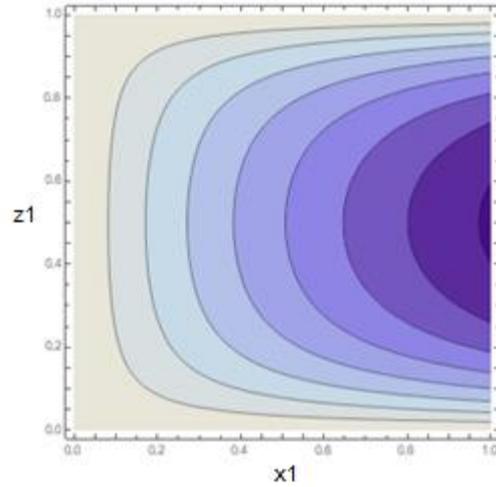


Figura 9. Curvas de nivel de presión en máximos para $f(z)$ y $f(x)$ con $\beta = (2.5)^{x_1}$

La figura 9 muestra el comportamiento que toma la presión con relación a las coordenadas x y z , con estos resultados se logra identificar fácilmente el comportamiento de la presión en una chumacera hidrodinámica.

Ejemplo 2

Se considera una chumacera hidrodinámica intermedia con una relación: $\frac{L}{D} = 2$.

$$\left(N = 0.5 = \frac{D}{L} \right) \quad (49)$$

Suponer que la geometría de la película lubricante toma la siguiente forma (variación en una chumacera cilíndrica):

$$\beta = 1 + \varepsilon \cos\theta \quad (50)$$

Haciendo el cambio de variables para x como:

$$x = R\theta, \quad x_1 = \frac{x}{D} = \frac{x}{2R} \quad (51)$$

Sustituyendo (51) en (32) para determinar la función $f(x)$ en el punto crítico x_m se tiene:

$$\frac{d^2 f(x_1)}{dx_1^2} = \frac{1}{(1 + \varepsilon \cos 2x_1)^3} [-2\varepsilon \sin 2x_1] \quad (52)$$

Resolviendo (52) para $f(x)$, usando la sustitución de Sommerfeld [1] se obtiene:

$$f(x) = -2x_1 \operatorname{Arctanh} \left[\frac{(-1+\varepsilon)\tan 1}{\sqrt{\varepsilon^2-1}} \right] (1+\varepsilon \cos 2)(1+\varepsilon \cos 2x) +$$

$$2 \operatorname{Arctanh} \left[\frac{(\varepsilon-1)\tan x}{\sqrt{\varepsilon^2-1}} \right] (1+\varepsilon \cos 2)(1+\varepsilon \cos 2x) +$$

$$\frac{\varepsilon \sqrt{\varepsilon^2-1} (x \operatorname{sen} 2 + x \varepsilon \cos 2x \operatorname{sen} 2 - (1+\varepsilon \cos 2) \operatorname{sen} 2x)}{[4(-1+\varepsilon)(1+\varepsilon)\sqrt{\varepsilon^2-1}(1+\varepsilon \cos 2)(1+\varepsilon \cos 2x)]}$$
(53)

La ecuación (53) representa la función $f(x)$ que está directamente relacionada con la geometría del espesor de la película lubricante dado por (50).

El siguiente paso del método es determinar el punto crítico x_m y sustituirlo en (33), considerando $f'(x_1) = 0$ se obtiene (utilizando MATHEMATICA 11.0):

$$x_m = 0.623879$$

$$f(0.623879) = 0.06554$$
(54)

Así mismo:

$$\left(\frac{d\beta}{dx_1} \right)_{x_m} = -2\varepsilon \operatorname{sen}(2x_1) = -0.948275$$

$$\beta = 1.158$$
(55)

Aplicando los valores encontrados en (54) y (55) se calcula el valor numérico de M de la siguiente forma:

$$M = \left[\frac{1}{0.06554} \cdot (-0.948275) \cdot \frac{1}{1.158^3} \right]$$

$$M = -9.3$$
(56)

Al conocer el valor numérico de (56) y considerando la relación (49) es posible determinar el valor de la variable k como sigue:

$$\frac{M}{N^2} = -k^2$$

$$k = 6$$
(57)

El valor obtenido de (57) se sustituyen en (36) para evaluar la función $f(z_1)$.

$$f(z_1) = \frac{1+e^6 - e^{6z_1} - e^{6(1-z_1)}}{1+e^6}$$
(58)

Finalmente, la presión en una chumacera finita se obtiene del producto de (53) y (58). La figura 10 muestra la variación del campo de presión como función de las posiciones x_1, z_1 .

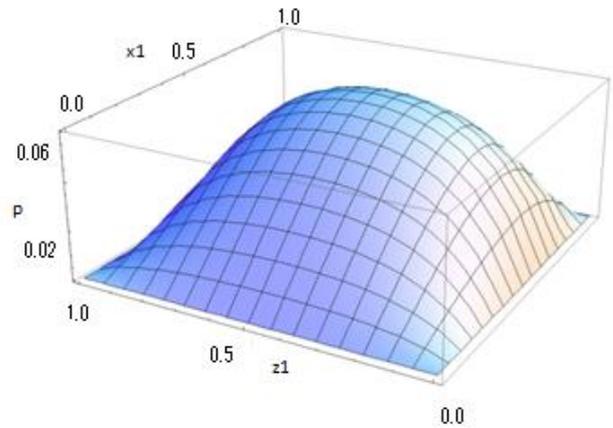


Figura 10. Campo de presión obtenido en máximos para $f(z)$ y $f(x)$ para $\varepsilon = 0.5$, $\beta = 1 + \varepsilon \cos \theta$

En la figura 11 se muestran las curvas de nivel para el campo de presión de la chumacera finita con relación: $\frac{L}{d} = 2$.

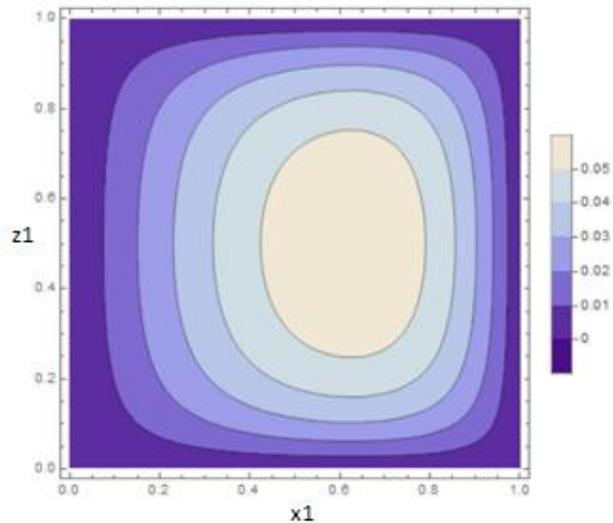


Figura 11. Curvas de nivel de presión en máximos para $\varepsilon = 0.5$, $f(z)$ y $f(x)$ para $\beta = 1 + \varepsilon \cos \theta$

Ambos resultados son consistentes con los reportados en las soluciones numéricas que reporta la literatura, estas soluciones fueron obtenidas mediante diferencias finitas [7].

4. Conclusiones

El método presentado en la primera propuesta muestra ser bastante eficiente para hallar soluciones cerradas de la ecuación de Reynolds para chumaceras cortas, pues a partir del cálculo de la presión se encuentran fórmulas cerradas de

los coeficientes de rigidez y amortiguamiento. Sin embargo, cuando se consideran chumaceras de longitud finita, el sistema de ecuaciones (15-19) se vuelve demasiado complejo, por lo que sería aconsejable resolverlo numéricamente, lo interesante de este algoritmo es que la solución numérica parece tener menos complicaciones en su adaptación y convergencia que los algoritmos tradicionales.

La segunda propuesta de solución es innovadora al presentar un método analítico para encontrar los campos de presión en chumaceras de longitud finita en forma cerrada, con diversas geometrías en el espesor de la película lubricante. Este método puede adaptarse para geometrías diversas que adquiere la película de aceite. Actualmente solo se cuenta con aproximaciones numéricas para la presión en chumaceras finitas, por lo que los resultados presentados son de gran valor para su posterior análisis; es decir una vez que se encuentra la presión, es posible hallar las fuerzas en el lubricante y los correspondientes coeficientes de rigidez y amortiguamiento de una chumacera de longitud finita.

REFERENCIAS

- [1] Ramírez Vargas I, Teoría de chumaceras presurizadas con puertos puntuales. Caso de la chumacera corta” (2007).
- [2] Hamrock, B. (2004) “Fundamentals of Fluid Film Lubrication”, Mc Graw Hill.
- [3] Childs D. “Turbomachinery rotordynamics: phenomena, modeling and analysis. John Wiley and Sons” (1993).
- [4] Kumar-Bankim, Fundamentals of Fluid Film Lubrication, 2013, Ed Mc Graw Hill
- [5] Andras Z. Szeri, Fluid Film Lubrication. Theory and Design (pp. 69-73). Cambridge University Press (1998)
- [6] Dai, R. X., Dong, Q. and Szeri, A. Z.. Approximations in lubrication theory. ASME journals of Tribology (1992)
- [7] Antonio Garcia A. Investigación Analítica y Numérica de las Propiedades Dinámicas de Chumaceras Hidrodinámicas con y sin desalineamiento. 2005
- [9] Nossov V, Ramírez I, Rivera-Arreola D, & J.C. Gomez-Mancilla. “Velocidad de estabilidad de un cojinete presurizado con inyección lateral de lubricante”. Congreso internacional anual de la SOMIM. pp. 1189-1196. Salamanca, Guanajuato, México (2012).
- [10] F. Ocvirk, “Short Bearing Approximation for Full Journal Bearing” (1952).
- [11] D.E. Rivera-Arreola, R.V. Nossov, J.C. Gómez-Mancilla, & V.I. Ramírez, “Analytical Determination of the rotordynamic coefficients and threshold velocity of stability for hybrid short journal bearing with horizontal injections ports”. MEC-III-6, pp. 31-36, Congreso Internacional de ingeniería electromecánica y de sistemas (CIIES), (2011).
- [12] Ramírez Vargas, I., Nosov, V. R., Gómez Mancilla, J. C..(2006), “Rango de aplicación de la teoría de la chumacera corta” , 2º Congreso Internacional de Matemáticas Aplicadas, México D.F.

LA SOCIEDAD MEXICANA DE INGENIERÍA MECÁNICA, A.C.

OTORGA EL PRESENTE RECONOCIMIENTO

Por su valiosa participación como **PONENTE** a:

Javier Roldán Cruz

Al presentar el artículo

A3_105 "Métodos de solución analítica de la ecuación de la lubricación de Reynolds para chumaceras finitas" durante el XXVII Congreso Internacional Anual de la SOMIM celebrado del 22 al 24 de septiembre de 2021 en el Instituto Tecnológico de Pachuca.



Dr. Simón Martínez Martínez

Presidente de la SOMIM