

INSTITUTO TECNOLÓGICO DE PACHUCA

ANÁLISIS DE ESTABILIDAD NO LINEAL DE UN EJE FISURADO

TESIS QUE PARA OBTENER EL GRADO DE
MAESTRO EN INGENIERÍA MECÁNICA
PRESENTA

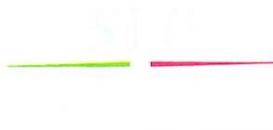
ING. ALDO ANTONIO CAMACHO RAMÍREZ

DIRECTOR:
DR. LUIS MANUEL PALACIOS PINEDA

SINODALES:
DR. IGNACIO RAMIREZ VARGAS
DR. EDGAR VERA CARDENAS

Pachuca de Soto, Hidalgo, noviembre de 2017.





"Año del Centenario de la Promulgación de la Constitución Política de los Estados Unidos Mexicanos"

Pachuca, Hidalgo, **28/NOVIEMBRE/2017**

OFICIO No. DEPI-208-2017

**C. ING. ALDO ANTONIO CAMACHO RAMIREZ
PRESENTE**

El que suscribe, Jefe de la División de Estudios de Posgrado e Investigación, le comunica que los miembros de la Comisión Revisora, designada por el Consejo de Posgrado de la Maestría en Ingeniería Mecánica para examinar su Tesis:

"Análisis de estabilidad no lineal de un eje fisurado"

se han reunido, y después de intercambiar opiniones manifiestan su aprobación de la Tesis, en virtud que satisface los requisitos señalados por las disposiciones reglamentarias vigentes y en consecuencia, se autoriza su impresión.

Sin otro particular por el momento, quedo de Usted.

ATENTAMENTE

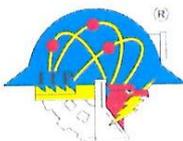
"EL HOMBRE ALIMENTA EL INGENIO EN CONTACTO CON LA CIENCIA"


**DR. MARIO EMIGDIO RODRÍGUEZ CASTILLO
JEFE DE LA DIVISIÓN DE ESTUDIOS DE POSGRADO E INVESTIGACIÓN**



c.c.p.: Archivo

MERC/Impp



Carretera México-Pachuca Km. 87.5, Col. Venta Prieta, Pachuca, Hidalgo C.P. 42080
A. P. 276, Tels. : (01 771) 7113073, 7113596, 7113140, 7115119,
7115538 Fax (01771)7113399
www.itpachuca.edu.mx



División de Estudios de Posgrado e Investigación
Maestría en Ingeniería Mecánica
A C T A

Siendo las 13:00 horas del 24 de Febrero de 2017, reunidos en el aula U6, el Consejo de Posgrado en Ingeniería Mecánica manifiesta la APROBACIÓN del trabajo de Tesis titulado: Análisis de estabilidad no lineal de un eje fisurado, con el siguiente contenido:

- Resumen/Abstract
- Nomenclatura
- Introducción
- Contenido
- Índice de cuadros, gráficas y figuras.
 1. Antecedentes
 2. Marco Teórico
 3. Modelo del Rotor Fisurado
 4. Resultados
- Conclusiones
- Bibliografía
- Apéndices

Para cubrir el requisito correspondiente a la Tesis para que el Ing. Aldo Antonio Camacho Ramirez obtenga el grado de Maestría en Ingeniería Mecánica, bajo la dirección del Dr. Luis Manuel Palacios Pineda, profesor de la Maestría en Ingeniería Mecánica de la División de Estudios de Posgrado e Investigación.

ATENTAMENTE
"EL HOMBRE ALIMENTA EL INGENIO EN CONTACTO CON LA CIENCIA"

EL CONSEJO DE POSGRADO



**Dr. Mario Emigdio Rodríguez
Castillo**



**Dr. Luis Manuel Palacios
Pineda**



Dra. Erika Osiris Ávila Dávila



Dr. Ignacio Ramírez Vargas

C.p. Archivo
LMPP/Impp



Dr. Celerino Roséndiz Rosas



Agradecimientos

A Dios por darme la oportunidad de lograr una meta más en mi vida y ser mi principal inspiración para superarme día con día.

Al Dr. Luis Manuel Palacios Pineda por su asesoramiento científico al compartir sus conocimientos y experiencias profesionales, al mismo tiempo contribuyendo en la realización de esta tesis con sus valiosas revisiones. Quisiera darle gracias también por el apoyo brindado en todo momento, y por aquellas sugerencias desafiantes y acertadas que contribuyeron a darle mejor forma a este proyecto.

A la Comisión Revisora conformada por: Dra. Erika Osiris Ávila Dávila Dr. Ignacio Ramirez Vargas, Dr. Edgar Vera Cárdenas, Dr. Mario Emigdio Rodríguez Castillo, Dr. Celerino Reséndiz Rosas por su generosidad científica en la revisión del presente trabajo y sus valiosas críticas al discutir los resultados de esta Tesis.

A los profesores de la Sección de Estudios de Posgrado del Tecnológico de Pachuca por brindarme la oportunidad de superarme académicamente e impulsarme para seguir creciendo intelectualmente.

Al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología, CONACyT, por otorgarme la beca crédito que permitió mi estancia en el programa de Maestría.

Finalmente, a quien más debo agradecer es a mi familia. A mi pareja Karina Hernández Ponce, a mis padres Antonio Camacho Campos y Sara Raquel Ramirez García por haberme apoyado en cada decisión que he tomado en la vida, siempre sin hacer preguntas e invariablemente con una confianza ciega en mí, además por brindarme un cálido hogar y enseñarme que la perseverancia y el esfuerzo son el camino para lograr los objetivos A ellos va dedicada esta tesis.

ÍNDICE

| | |
|--|-------------|
| Agradecimientos | ii |
| ÍNDICE | v |
| ÍNDICE DE TABLAS | ix |
| SIMBOLO Y ABREVIATURAS | x |
| RESUMEN | xi |
| ABSTRACT | xii |
| PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA | xiii |
| JUSTIFICACIÓN | xv |
| Estado del arte | 1 |
| Desarrollo | 15 |
| | |
| 1 Antecedentes | 1 |
| 2 Marco Teórico | 6 |
| 2.1 Rotor Jeffcott | 6 |
| 2.2 Introducción al diagnóstico y detección de ejes fisurados | 6 |
| 2.3 Método de espacio de estados | 8 |
| 2.3.1 Estado | 8 |
| 2.3.2 Variable de estados | 8 |
| 2.3.3 Espacio de estados | 8 |
| 2.3.4 Ecuaciones en el espacio de estado | 9 |
| 2.4 Análisis en Ansys | 9 |
| 2.4.1 Desing Modeler | 10 |
| 2.4.2 Análisis mecánico | 10 |
| 2.4.3 Análisis estructural | 11 |
| 2.5 Estabilidad | 11 |

| | | |
|------------|--|-----------|
| 2.5.1 | Estabilidad de los Puntos de Equilibrio | 13 |
| 2.5.2 | Estabilidad de trayectorias | 14 |
| 3 | Modelo del Rotor Fisurado | 15 |
| 3.1 | Modelo Matemático para eje fisurado | 19 |
| 3.1.1 | Tipos de fisura | 19 |
| 3.1.2 | Modelo de fisura abierta..... | 21 |
| 3.1.3 | Modelo de fisura Mayes & Davies..... | 21 |
| 3.1.4 | Modelo de fisura No lineal de Chen. | 22 |
| 3.2 | Solución Numérica | 23 |
| 3.3 | Solución Numérica de Ecuaciones Diferenciales con ode45 en Matlab | 24 |
| 4 | Resultados | 28 |
| 4.1 | Cambio de rigidez por fisura | 28 |
| 4.2 | Simulaciones Numéricas..... | 31 |
| 4.3 | Experimentos en el rotor fisurado..... | 32 |
| 4.3.1 | Configuración del rotor. | 32 |
| 4.3.2 | Mecanismo para la reproducción de una grieta controlada | 34 |
| 4.3.3 | Adquisición de datos | 35 |
| 4.3.4 | Desarrollo de los experimentos | 37 |
| 4.4 | Firma vibracional..... | 40 |
| 4.5 | Evolución orbital | 43 |
| 4.6 | Configuración a diferentes profundidades de grieta | 45 |
| 4.7 | Análisis de los diagramas de bode..... | 50 |
| 4.8 | Estabilidad | 57 |
| | Conclusiones..... | 59 |
| 5 | Bibliografía | 60 |
| | Apéndice A | 61 |
| | Apéndice B..... | 62 |
| | Apéndice C..... | 63 |

Apéndice D 66

ÍNDICE DE FIGURAS

Fig. 2.1 Modelo de rotor Jeffcott 6

Fig. 2.2 Análisis en ANSYS Workbench 10

Fig. 2.3 Ejemplo de análisis estructural 11

Fig. 2.4 Alexander Lyapunov (1857-1918) 12

Fig. 2.5 Tipos de estabilidad 13

Fig. 2.6 Estabilidad de trayectorias 14

Fig. 3.1 Modelo de Rotor Jeffcott extendido y fisurado 15

Fig. 3.2 Esquema del Rotor Jeffcott con eje flexible 16

Fig. 3.3 Sistema de referencia 18

Fig. 3.4 Fisura recta y elíptica 19

Fig. 3.5 Fisura cerrada debido a la acción de la gravedad y a la posición de la propia fisura 20

Fig. 3.6 Fisura abierta al máximo debido a la acción de la gravedad y a la posición de la propia fisura. 20

Fig. 3.7 Gráfica de la función tipo fisura abierta 21

Fig. 3.8 Gráfica de la función tipo fisura abierta 22

Fig. 3.9 Código de Modelo de eje fisurado 25

Fig. 3.10 Código del método de espacio de estados en modelo de eje fisurado. 25

Fig. 3.11 Código de solución de modelo de eje fisurado. 26

Fig. 3.12 Grafica de posición, retornada por ode45 27

Fig. 4.1 Análisis de elemento finito 28

Fig. 4.2 Dibujo en SolidWorks de partición de eje 28

Fig. 4.3 Simulación de contacto 29

Fig. 4.4 Respuesta de la rigidez de eje fisurado con una fuerza perpendicular y normal al frente de la fisura. ____ 30

Fig. 4.5 Configuración del rotor experimental instrumentado para medir la respuesta dinámica con la presencia de una fisura transversal a la mitad del claro entre los soportes 33

Fig. 4.6 Representación esquemática del rotor experimental. En la imagen se muestra la posición del motor eléctrico, de los soportes del eje, los soportes de medición y del mecanismo para reproducir la fisura en el eje 34

Fig. 4.7 En estas imágenes se muestran detalles del disco central en el rotor que permite simular la presencia de una fisura transversal de diferentes profundidades, de la misma manera que permite cambiar la posición angular del desbalance con respecto al frente 35

Fig. 4.8 Configuración del mecanismo para la reproducción de la grieta sobre el rotor experimental. La distribución y el apriete de cada uno de los tornillos determina la forma y la profundidad de la grieta 35

Fig. 4.9 El ama de bloques del sistema de adquisición de datos para medir la dinámica del rotor. 37

Fig. 4.10 Comparación entre la respuesta numérica y experimental de un rotor íntegro. Se presenta la comparación mediante las amplitudes registradas en un Diagrama de Bode _____ 38

Fig. 4.11 Diagrama de bode del rotor con tres tornillos sueltos y $\beta = 0^\circ$. _____ 39

Fig. 4.12 Diagrama de bode para el rotor con tres tornillos sueltos y $\beta = 180^\circ$. _____ 39

Fig. 4.13 Órbitas obtenidas a velocidades de resonancia para ambos casos, $\beta = 0^\circ$ and 180° . Se puede observar la diferencia en la amplitud y en el espesor orbital _____ 40

Fig. 4.14 Firma vibracional, configuración $\beta=0^\circ, \Omega=0, \omega=1.5\omega_n$, _____ 41

Fig. 4.15 Firma vibracional configuración $\beta=0^\circ, \Omega=0, \omega=1.5\omega_n$. _____ 41

Fig. 4.16 Firma vibracional configuración $\beta=0^\circ, \Omega=0.1, \omega=2\omega_n$. _____ 42

Fig. 4.17 Firma vibracional configuración $\beta=0^\circ, \Omega=0.5, \omega=0.5\omega_n$. _____ 42

Fig. 4.18 Evolución de las orbitas del eje fisurado con una profundidad 10%, Orientación entre grieta y desbalance $\beta = 0^\circ$. _____ 45

Fig. 4.19 Evolución de las orbitas del eje fisurado con una profundidad 20%, Orientación entre grieta y desbalance $\beta = 0^\circ$ _____ 46

Fig. 4.20 Evolución de las orbitas del eje fisurado con una profundidad 30%, Orientación entre grieta y desbalance $\beta = 0^\circ$ _____ 47

Fig. 4.21 Evolución de las orbitas del eje fisurado con una profundidad 40%, Orientación entre grieta y desbalance $\beta = 0^\circ$ _____ 48

Fig. 4.22 Evolución de las orbitas del eje fisurado con una profundidad 50%, Orientación entre grieta y desbalance $\beta = 0^\circ$ _____ 49

Fig. 4.23 Comparación entre eje sin fisura y respuestas horizontal del eje con profundidad de grieta 10 % _____ 51

Fig. 4.24 Comparación entre eje sin fisura y respuesta vertical del eje con profundidad de grieta 10 % _____ 51

Fig. 4.25 Comparación entre eje sin fisura y respuesta horizontal del eje con profundidad de grieta 20 % _____ 52

Fig. 4.26 Comparación entre eje sin fisura y respuesta vertical del eje con profundidad de grieta 20 % _____ 52

Fig. 4.27 Comparación entre eje sin fisura y respuesta horizontal del eje con profundidad de grieta 30 % _____ 53

Fig. 4.28 Comparación entre eje sin fisura y respuesta vertical del eje con profundidad de grieta 30 % _____ 53

Fig. 4.29 Comparación entre eje sin fisura y respuesta horizontal del eje con profundidad de grieta 40 % _____ 54

Fig. 4.30 Comparación entre eje sin fisura y respuesta vertical del eje con profundidad de grieta 40 % _____ 54

Fig. 4.31 Comparación entre eje sin fisura y respuesta horizontal del eje con profundidad de grieta 50 % _____ 55

Fig. 4.32 Comparación entre eje sin fisura y respuesta vertical del eje con profundidad de grieta 50 % _____ 55

Fig. 4.33 Evolución de la amplitud vibracional en dirección X. _____ 56

Fig. 4.34 Evolución de la amplitud vibracional en dirección Y. _____ 56

Fig. 4.35 Estabilidad en un 10% de fisura _____ 57

Fig. 4.36 Estabilidad en un 20% de fisura _____ 57

Fig. 4.37 Estabilidad en un 30% de fisura _____ 58

Fig. 4.38 Estabilidad en un 40% de fisura _____ 58

Fig. 4.39 Estabilidad en un 50% de fisura _____ 58

ÍNDICE DE TABLAS

| | |
|---|----|
| <i>Tabla 3.1 Parámetros físicos del sistema</i> | 18 |
| <i>Tabla 3.2 Contenido de la matriz X retornada por ode45()</i> | 27 |
| <i>Tabla 4.1 Tabla de rigidez vertical</i> | 29 |
| <i>Tabla 4.2 Tabla de rigidez horizontal</i> | 30 |

SIMBOLO Y ABREVIATURAS

| | | |
|---------------|---|------------|
| m | Masa del rotor | kg |
| c | Amortiguamiento | Ns/m |
| G | Función de respiro | $(-)$ |
| g | Gravedad | m/s^2 |
| k_η | Rigidez del eje dirección paralela | N/m |
| k_ξ | Rigidez del eje dirección normal | N/m |
| $k_{\xi\eta}$ | Par de rigidez del eje | N/m |
| Y | Vibración vertical | m |
| Z | Vibración horizontal | m |
| ω | Velocidad angular del eje | rad/s |
| ω_n | Velocidad crítica del eje | rad/s |
| Ω | Relación de velocidades ω/ω_n | $(-)$ |
| E | Excentricidad | m |
| θ | Ángulo de posición de la grieta | $(^\circ)$ |
| β | Ángulo entre grieta y desequilibrio del rotor | $(^\circ)$ |
| ϕ | Angulo de rotación instantáneo | $(^\circ)$ |
| I | Momento de área de inercia del eje | m^4 |
| L | Longitud del eje | m |
| d | Diámetro del eje | m |
| E | Módulo de Young | Gpa |
| e | Excentricidad de desbalance de masa | m |
| A | Área de sección transversal del eje | m^2 |
| r | Radio | m |
| t | Tiempo | s |
| δ | Deflexión | m |
| m_d | Masa del disco | kg |

RESUMEN

Este trabajo trata sobre la modelación de un eje fisurado, en el cual se desea obtener numéricamente las frecuencias de operación a las cuales debe trabajar para prolongar la vida del mismo y evitar deterioro. Este eje se modela de acuerdo a las ecuaciones de Lyapunov.

Se ha desarrollado una revisión detallada de las varias técnicas de detección de grieta presentadas en las últimas décadas. Puede ser visto que el área de detección de grietas esta activa y continuamente desarrollándose pues están emergiendo técnicas más nuevas mientras se gana un más claro y profundo entendimiento en los campos de la mecánica de la fractura, simulación y monitoreo. Se enfatiza que el futuro apunta a una metodología de detección flexible, multidisciplinaria y robusta para diversos tipos de rotores. Lo que conducirá a largo plazo a aumentar la total confiabilidad y seguridad de la maquinaria rotatoria en general.

Se estudia la respuesta vibratoria contra velocidad de operación a esperar ante diferentes profundidades de la grieta. Varias configuraciones de rotores son estudiadas con el fin de caracterizar los patrones de vibración de rotores agrietados y se hace un análisis numérico de la estabilidad no lineal del sistema, incluyendo todos los aspectos antes mencionados, mediante la teoría de Lyapunov.

Es desarrollada una solución numérica del presente sistema de rotor que permitirá deducir y determinar patrones de comportamiento confiables como resultado de la interacción entre la fisura y el desbalance. Así mismo, es propuesta una solución analítica aproximada del presente sistema ya que el modelo es capaz de producir muchos patrones de comportamiento difíciles de ser estudiados numéricamente debido al gran consumo de tiempo de cómputo y alta demanda de capacidad de cálculo que un estudio de este tipo requiere.

ABSTRACT

This work deals with the modeling of a fissured axis, in which it is desired to obtain numerically the operating frequencies to which it must work to prolong the life of the same and avoid deterioration. This axis is modeled according to the Lyapunov equations.

A detailed review of the various crack detection techniques presented in recent decades has been developed. The crack detection area is actively and continuously developing as newer techniques are emerging while gaining a clearer and deeper understanding in the fields of fracture mechanics, simulation and monitoring. It is emphasized that the future points to a flexible, multidisciplinary and robust detection methodology for various types of rotors. This will lead in the long run to increase the total reliability and safety of rotary machinery in general.

We study the vibrational response against operating speed to be expected at different depths of the crack. Several rotor configurations are studied in order to characterize the vibration patterns of cracked rotors and a numerical analysis of the nonlinear stability of the system, including all the above-mentioned aspects, is made by the Lyapunov theory.

A numerical solution of the present rotor system is developed that will allow to deduce and to determine reliable behavior patterns as a result of the interaction between the fissure and the imbalance. Also, an approximate analytical solution of the present system is proposed since the model can produce many patterns of behavior difficult to be studied numerically due to the great consumption of computing time and high demand of calculation capacity than a study of this type Required.

PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

El problema que se presenta en un eje de turbomaquinaria es la presencia de fisuras, dado que este tipo de fisuras puede generar daños irreparables y cuantiosos.

Dentro de las causas principales que generan las fisuras se menciona la aparición de la ortotropía en la microestructura del eje. Sobre todo, considerando que resulta casi imposible controlar los procesos de fabricación para lograr aceros totalmente homogéneos.

Otro de los aspectos que influye en la generación de fisuras son los desbalances (estáticos o dinámicos): cuando la masa se concentra en un punto, por pequeña que sea esta concentración, la fuerza tangencial a la que se somete el eje es muy elevada. Esta fuerza será un múltiplo escalar del vector de aceleración, por lo que la probabilidad de que se presente una fisura aumenta en función de los ciclos de trabajo a los que se somete el material.

El desgaste de un eje provocado por agentes abrasivos, erosivos y corrosivos está presente debido a la naturaleza de operación, en virtud de la gran diversidad de aplicaciones en las que estos elementos están involucrados. Por ejemplo, aquellas en las que se someten a flujos bifásicos, como combinaciones de vapores y gases que alteran la estructura del material, tendiendo a generar fisuras en él.

Por último, se tiene la propia naturaleza de este equipo, los ciclos de trabajo, las horas de operación generarán desgaste en este equipo y con ello contribuirán a la generación de fisuras.

Estas causas son las principales que, en combinación o por separado, generaran el principal problema presente en los ejes de turbomaquinaria. La presencia de fisuras puede ser fatal para estos equipos, como ilustra la siguiente imagen perteneciente al eje de una turbina de flujo combinado de un generador de electricidad.

Entre los efectos de las fisuras en los ejes se puede observar, antes de que este llegue a un colapso total, la presencia de inestabilidades en el eje que se manifiesta en que los desplazamientos en un elemento estructural no son proporcionales a las fuerzas aplicadas. Esto se pone de manifiesto al comprobar que, dentro de ciertos rangos de desplazamientos y fuerzas, las ecuaciones que modelan al elemento estructural presentan no linealidad.

Este comportamiento es también verificado con modelos físicos escalados o incluso en piezas reales de tamaño natural.

Otro de los efectos que genera la presencia de fisuras es la pérdida de la eficacia en las actividades productivas del eje, la generación de electricidad se verá comprometida, se puede presentar un mayor consumo en la potencia para realizar las actividades del eje.

Los paros no programados debidos a mantenimiento correctivo en el eje, los costos asociados a este paro no programado, la pérdida de producción súbita son otro de los efectos de la presencia de fisuras en el eje.

Dados los problemas, las causas que los originan y los efectos que se pueden tener al presentarse estas características en los ejes, es conveniente tener algún medio de predicción o corrección de los efectos de la presencia de las fisuras en los ejes.

OBJETIVO

Desarrollar un análisis de estabilidad de un eje con presencia de fisura a través del estudio de las ecuaciones características que gobiernan el comportamiento del mismo, con el uso del estudio de ecuaciones características, criterios matemáticos de estabilidad, y el uso de tecnologías computacionales y la técnica del elemento finito.

- Mediante el análisis vibratorio obtendremos los datos para que el eje pueda seguir operando de manera estable.
- Determinar con el análisis vibratorio los parámetros para que un eje se mantenga estable.
- Analizar los parámetros en el eje para determinar las condiciones en el rotor en el cual pueda tener una operación estable.
- Detectar si el eje fisurado tiene una operación confiable de la maquinaria rotatoria, para la toma de decisiones técnicas.

JUSTIFICACIÓN

En México como en otras partes del mundo, el equipo rotatorio para la extracción del petróleo y para la generación de energía eléctrica está envejeciendo, por lo tanto se requiere una supervisión estructural por monitoreo de vibraciones, ya que se incrementan las posibilidades de que los ejes rotatorios contengan fisuras debido a las cargas estáticas o dinámicas, al fenómeno de fatiga, esfuerzos térmicos, esfuerzos centrífugos o esfuerzos dinámicos a los que han sido sometidos a lo largo de su vida; sin descartar desde luego la existencia de fisuras provocadas en el proceso de fabricación y que se acentúan más con el transcurso del tiempo. En la actualidad, la probabilidad de que existan fisuras por fatiga ha aumentado, ya que las máquinas se mantienen funcionando más tiempo debido a los programas de prolongación de su vida útil, y también porque cada vez son más las máquinas que se utilizan cíclicamente (aprovechamiento máximo).

En lo que respecta a equipos rotatorios industriales, dada la naturaleza de los mismos, se pueden presentar diversos tipos de fallas en estos, como es el caso de desalineamiento, desbalance, pandeo, presencia de fisuras, por mencionar algunas. Las consecuencias de fallas no previstas en equipos rotatorios, se pueden clasificar en accidentes o pérdidas económicas, dada la necesidad de optimizar los procesos de mantenimiento, diseño y fabricación, la detección de fallas en equipos es un factor fundamental para lograr este objetivo. Conocer las características y los efectos de las fisuras permitirá realizar modelos de ejes más precisos, con lo cual se pueda obtener datos más certeros sobre los parámetros de daño, la confiabilidad y el ciclo de vida del producto.

Las máquinas con ejes fisurados serán cada vez más frecuentes en la industria nacional conforme los lapsos entre mantenimientos mayores del equipo rotatorio se incrementen. Afortunadamente en las turbomáquinas una fisura puede crecer de manera estable, sin explotar súbita y catastróficamente, gracias a las altas temperaturas de operación, sin embargo, en equipo que opera a temperatura ambiente, una fisura se propaga más rápidamente. En ambos casos, si la fisura no se detecta a tiempo, catástrofes como las ocurridas en otros países, traerán consecuencias muy graves en México.

Al desarrollar un modelo matemático que prediga las zonas de inestabilidad para un eje fisurado cualesquiera que sean sus características de diseño permite tomar acciones correctivas para este problema sin la necesidad de realizar paros de los ejes, con lo cual las pérdidas económicas disminuyen considerablemente, se pueden tomar acciones correctivas para este problema antes de que este sea demasiado costoso o tarde para corregir. Es un modelo que no implica experimentación de algún tipo, solo recabar datos, por lo tanto, su costo de aplicación es bajo, de esta manera se generan conocimientos científicos en el país que pueden ser usados por empresas donde la presencia de estos elementos es fundamental.

Impacto económico

La generación de un modelo matemático que permita conocer las zonas de estabilidad sin necesidad de realizar paros programados de los equipos disminuye considerablemente los costos de reparación o cambio de estos ejes, los costos asociados a la generación de electricidad por mencionar un ejemplo se mantienen en niveles óptimos, las empresas consumen menor cantidad de recursos en lo que respecta a intercambio, reparación, mantenimiento y puesta en marcha de estos equipos.

Impacto tecnológico

Este modelo matemático genera conocimiento teórico que puede ser llevado a la práctica, se genera un conjunto de teorías que es ciencia y esta puede ser transmitida a la comunidad de ingenieros o tecnólogos que trabajan con este tipo de equipos, contribuyendo con ello al aumento en las técnicas de predicción.

Impacto social

Al generar conocimientos científicos o técnicos contribuimos al desarrollo y bienestar de la sociedad en general, se abre el campo a nuevas visiones y perspectivas de futuros ingenieros, y la sociedad en general goza de los beneficios de estos conocimientos.

HIPOTESIS

Al realizar el modelo matemático del comportamiento y zonas de estabilidad de un eje fisurado, donde se determinen las inestabilidades de la ecuación de comportamiento de dicho eje, con los datos que obtenemos del análisis vibratorio, sabemos si el eje puede operar de manera estable.

INTRODUCCIÓN

La rotodinámica es la rama de la mecánica aplicada especializada en el estudio del comportamiento y el diagnóstico de estructuras rotatorias. Se usa comúnmente para analizar el comportamiento de estructuras que van desde motores aeronáuticos o turbinas de vapor hasta motores de automóviles o discos duros de ordenador. En su nivel más básico, la rotodinámica se refiere a una o más estructuras mecánicas (rotores) apoyadas en cojinetes y bajo la influencia de fenómenos internos, que giran en torno a un eje, la estructura de soporte se llama estator. Según aumenta la velocidad de rotación, a menudo la amplitud de la vibración pasa por un máximo, denominado “velocidad crítica”, esta vibración aumenta aún más si el sistema no está equilibrado, se manejan a diario ejemplos de este fenómeno como el equilibrado de los neumáticos en un automóvil, si la amplitud de esta vibración es excesiva, su puede producir un fallo catastrófico.

La presencia de fisuras en un elemento mecánico provoca un aumento de la flexibilidad local del elemento, produciéndose cambios en su comportamiento estático y dinámico que se traducen en el incremento de los desplazamientos, disminución de las frecuencias de vibración y modificación en las órbitas que describen sus secciones, entre otros.

Las máquinas rotativas, tales como turbinas de vapor o gas, compresores, motores de combustión interna o eléctricos, son los componentes más extendidos en la industria, y su elemento más importante es el eje, árbol o rotor. Los fallos que más daños producen en este tipo de maquinaria suelen tener su origen en el fallo de los ejes. Estos, a su vez suelen estar provocados por la presencia de fisuras, unido al tipo de cargas a las que están sometidos y el fenómeno de fatiga.

Un eje fisurado puede pasar desapercibido durante largos períodos de tiempo, favoreciendo el crecimiento de las fisuras por fatiga, hasta alcanzar un tamaño crítico. Es entonces cuando se produce la rotura repentina o fallo por fractura del eje. Dado que las consecuencias de operar una máquina con defectos (fisuras) entraña un alto riesgo y puede resultar catastrófico, resulta de gran interés detectar e incluso identificar a tiempo fisuras en estos ejes antes de que se alcancen los tamaños críticos y de que se produzca el fallo.

Los ejes fisurados han sido objeto de intensos estudios e investigaciones desde la década de 1960. A lo largo de estos 50 años se han alcanzado importantes logros, el conocimiento del comportamiento dinámico de los ejes fisurados ha permitido detectar la presencia de fisuras y detener muchos ejes antes de que se produjeran fallos por rotura. En muchos de estos ejes la fisura ya se había propagado, alcanzando en algunos casos una profundidad de hasta el 50% del diámetro, lo que evidentemente es una situación muy crítica. Teniendo en cuenta que generalmente se cree que la velocidad de propagación aumenta exponencialmente, en muchos de estos casos, sólo unos días más de operación hubieran sido suficientes para provocar un fallo catastrófico, perdiendo completamente la máquina y con riesgo muy alto para el personal y resto de equipos.

Los costes de reparación de las máquinas e instalaciones son elevadísimos, además de las pérdidas derivadas de tener la producción parada durante un período de tiempo que puede llegar a ser de varios años. Cuando una fisura se detecta a tiempo, el rotor se puede sustituir en un plazo corto (días o semanas) suponiendo un coste económico asequible. Esta situación explica el creciente interés por el comportamiento de las fisuras y particularmente el de los ejes fisurados. A partir de los años 80, investigadores de todo el mundo han contribuido con artículos estudiando diferentes aspectos relacionados con las fisuras y los ejes rotatorios.

Es fácil darse cuenta de la gran importancia que tienen estos estudios e investigaciones para el desarrollo y perfeccionamiento de lo que conocemos como “mantenimiento predictivo” frente al mantenimiento paliativo y al preventivo. Se trata de conocer con exactitud el momento más adecuado para sustituir el elemento en estudio. Tratando de minimizar la incertidumbre, para ello, se utilizan métodos que no apliquen, o por lo menos no de forma tan directa, datos estadísticos, aunque está sobradamente demostrado que funcionan correctamente, siempre existe un factor de duda debido a la misma definición de la estadística.

Estado del arte

1 Antecedentes

El primer análisis de un eje rotatorio lo realizó W. J MacQuorn Rankine en 1869. Predijo que a partir de una cierta velocidad de giro, que él llamó “whirling speed”, o “velocidad de giro”, el eje se deforma considerablemente, y comienza a girar en torno a esta nueva posición. Se puede demostrar que por encima de esta “velocidad de giro”, la desviación radial del modelo de Rankine, aumenta sin límite [1]. Hoy en día, esta velocidad se denomina velocidad umbral de la inestabilidad divergente. La investigación en este campo progresó significativamente al final del siglo XIX con las contribuciones de Laval y otros. De Laval inventó una turbina de vapor de una etapa y tuvo éxito en su operación. Inicialmente empleó un rotor rígido, pero después utilizó un rotor flexible y mostró que era posible operarlo por encima de la velocidad crítica[2].

En un principio, la mayor preocupación de los investigadores y diseñadores era predecir la velocidad crítica, porque el primer problema que tenía que enfrentarse en el diseño de maquinaria rotatoria era evitar la resonancia. En 1894, Dunkerley derivó una fórmula experimental que proporcionaba la velocidad crítica más baja de un sistema multirrotor. Él fue el primero en usar el término de velocidad crítica para la velocidad rotatoria resonante. Holtzer propuso en 1921 un método aproximado para calcular las frecuencias naturales y las formas de los modos de vibraciones torsionales.

Ejes giratorios agrietados han sido objeto de estudios e investigaciones desde la 1970, aunque algunos casos de fallo también se presentaron durante la década de 1950, por lo tanto, ahora tenemos una historia que dura unos 60 años. Logros importantes se han hecho durante estos años, el conocimiento del comportamiento dinámico de rotores agrietados ha permitido la presencia de grietas para ser reconocida y rotores rotos que se detuvieron a tiempo antes de fallas catastróficas. Inspecciones precisas revelaron que las grietas ya habían propagado hasta una profundidad de casi el 50% del diámetro en muchos ejes que es obviamente una situación muy crítica. Teniendo en cuenta el hecho de que en general se cree que la propagación de la velocidad aumenta de manera exponencial, en muchos de estos casos, algunos más días de operación habrían sido suficientes para provocar una falla catastrófica, con la pérdida del tren de la máquina completa y altos riesgos para las personas y otros equipos; también la pérdida de

producción de la unidad, antes de la sustitución con una nueva unidad, es una pérdida económica comparable.

Cuando una grieta se descubre a tiempo, el rotor agrietado puede ser sustituido por un rotor de repuesto en pocos días o semanas, con pérdidas económicas asequibles. Esta situación explica el creciente interés en el estudio de las grietas en general y ejes agrietados en particular. A partir de la década de 1980 hasta hoy en día los investigadores de todas partes del mundo han contribuido con diferentes temas relacionados con grietas en ejes rotativos.

El número total de documentos son cerca de 1000 y sigue aumentando. Sólo muy pocos trabajos presentan resultados experimentales y, en general estos son relacionados a sencillos diseños de máquinas o equipos de ensayo, se asemeja al rotor Jeffcott de Laval rotor. No siempre estos resultados pueden extenderse a rotores reales.

Los primeros estudios plasmados en la literatura fueron las vibraciones causadas en la fase de flexión utilizando el enfoque de la mecánica de fractura para el cálculo de la pérdida de rigidez debida a los modelos de grietas. La respiración es típica para hacer girar los ejes agrietados, donde la transición desde situación grieta cerrada se rige por la rotación del eje. Es entonces evidente que vamos a tener la rigidez del eje completo en situación grieta cerrada y una rigidez reducida en situación grieta abierta.

Más tarde surgió el interés también para modelos de efectos de acoplamiento cruzado como excitación de vibraciones de torsión y axial, ejes con múltiples grietas oblicuas o helicoidales grietas, modelos más precisos de los mecanismos de la respiración y de la conducta de fisura; El comportamiento no lineal de los ejes con profundas grietas, identificación y diagnóstico de grietas, métodos con precisión cada vez mayor hasta los presentados en los últimos años.

Jean Jacques Sinou [3] en 2007 explica en un artículo la estabilidad de un sistema de un rotor que presenta una grieta con respiración transversal, su estudio considera los efectos de la profundidad de la grieta, la ubicación de la grieta y la velocidad de rotación del eje. El método de equilibrio armónico, en combinación con un procedimiento de seguimiento de camino, se utiliza para calcular la respuesta periódica de un modelo no lineal de un sistema de rotor agrietado. La estabilidad de los movimientos periódicos del rotor se estudia en el dominio de la

frecuencia mediante la introducción de los efectos de una perturbación en la solución periódica para el sistema de rotor agrietado.

Se muestra que las zonas de inestabilidad aumentan considerablemente cuando la grieta se profundiza, y que la posición y la profundidad de la grieta son los principales factores que afectan no sólo el comportamiento no lineal del sistema de rotor, sino también las diferentes zonas de inestabilidad dinámica en la solución periódica para el rotor agrietado. También se investigaron los efectos de algunos otros parámetros del sistema (incluyendo la posición del disco y la rigidez de los soportes) en la estabilidad dinámica de la respuesta periódica no lineal del sistema de rotor agrietado [3]

Qinkai Han [4] reportó que cuando el rotor gira a una velocidad constante, la grieta transversal abre y se cierra alternativamente, debido a la gravedad, y por lo tanto un "efecto de la respiración" se produce esta variación en la rigidez del eje es de tiempo periódico. La excitación paramétrica de la rigidez variable en el tiempo provoca inestabilidad y la vibración severa bajo ciertas condiciones de funcionamiento. La investigación actual sobre todo centrada en el rotor con sola grieta transversal, hay pocos estudios sobre el rotor de múltiples sistemas agrietados. De hecho, la interacción entre las múltiples excitaciones paramétricas con varios escalonamientos y amplitudes, que son inducidas por las múltiples grietas transversales de respiración, haría que el comportamiento de inestabilidad del sistema se diferencia claramente del sistema de rotor único agrietada. Por otra parte, cómo las regiones de inestabilidad cambian con diversos mecanismos de fisura de respiración. Así, la inestabilidad paramétrica de un sistema de rotor con dos grietas transversales de respiración se estudia. En primer lugar, las ecuaciones de elementos finitos del movimiento se establecen para el sistema de rotor agrietado. Dos tipos de mecanismos de fisura de respiración, de los cuales uno es más preciso y el otro es empírico, se adoptan en la formulación de elementos finitos. Luego, se introduce el método generalizado para determinar los límites de las regiones primarias y secundarias inestabilidad. Sobre la base de estos, análisis de la inestabilidad de un sistema de rotor de soporte usado práctica con individual y dos grietas se llevan a cabo, respectivamente. Las regiones de inestabilidad inducida por la sola grieta transversal con nuevos y viejos para respirar mecanismos se comparan entre sí. Para el sistema de rotor de dos craqueada, las variaciones se observan y analizan en las fronteras inestables con profundidades de fisura, ángulos de orientación y posiciones detalle. Se muestra a partir de los resultados que la inestabilidad

dinámica del sistema de rotor de soporte de dos grietas, de hecho, tener algunas características únicas que difieren de la del sistema de rotor único agrietada.

Baozhong Yang [5] en 2014 introduce el método de descomposición de modo empírico (EMD), para mejorar la precisión de la predicción de la respuesta no lineal del rotor agrietado durante un período a largo plazo. El método EMD se aplicó a descomponer la respuesta no lineal en serie de funciones del modo intrínsecas (FMI). En consecuencia, se obtuvieron los resultados de predicción de FMI, basado en el exponente de Lyapunov local de máxima (LLE). Mediante la adición de todos los resultados de predicción de FMI, la respuesta no lineal de rotor agrietada se puede predecir, llamado el método de predicción del FMI.

En comparación con la respuesta predicha directamente por el máximo exponente local de Lyapunov, cuando la etapa de predicción es menor que el tiempo de predicción máxima que se calcula por el inverso multiplicativo de máxima exponente Lyapunov, el método FMI tiene la misma precisión de la predicción. Cuando la etapa de predicción es mayor que el tiempo de predicción máximo, el método de predicción FMI es más ventajoso que el método de predicción de Lyapunov. Prueba de rotor Bently RK4 se utiliza para validar la ventaja del método de predicción del FMI.

Zyad N. Haji [6] en 2014 analiza la variedad de enfoques que se han desarrollado para la identificación y localización de grietas en un sistema, que explotan frecuencias naturales, requieren un modelo de elementos finitos para obtener las frecuencias naturales del rotor intacto como datos de referencia. De hecho, tales enfoques pueden dar resultados erróneos acerca de la ubicación y profundidad de una grieta si un inexacto modelo de elementos finitos se utiliza para representar un modelo no fisurado. Un nuevo enfoque para la identificación y localización de grietas en los sistemas de rotor, que no requiere el uso de las frecuencias naturales de un rotor intacto como datos de referencia, se presenta en este papel.

El enfoque, llamado frecuencias naturales ortogonales (ONF's), se basa únicamente en las frecuencias naturales del rotor agrietado no giratorio en las dos vibraciones de flexión lateral $x-z$ y aviones $y-z$. El enfoque utiliza las frecuencias naturales rotas en el horizontal plano $x-z$

como los datos de referencia en lugar de las frecuencias naturales intactas. Además, un disco errabundo es atravesado a lo largo del rotor con el fin de mejorar la dinámica del rotor en la ubicación de la grieta. En cada localización espacial del disco errabundo, los dos ONF's del sistema de rotor de discos se determinan a partir de la cual se calcula la relación de ONF correspondiente.

V. Sudheer Kumar [7] en 2015 analizó el comportamiento dinámico del rotor analizando vibraciones en estructuras giratorias axialmente simétricas. La vibración en rotación maquinaria es causada principalmente por el desequilibrio, desalineamiento, holgura mecánica, el crack del eje, y otras disfunciones. Los diagnósticos de fallas de rotor han ido ganando importancia en los últimos años. Para examinar las características de vibración de eje agrietado, se utilizó un eje de acero con montada en su centro y soportado por dos rodamientos de disco. Una grieta artificial fue introducida en detectar las características de vibración del rotor. Inicialmente, los datos de la firma se obtuvieron con ninguna grieta usando analizador de espectro.

Allí después de fisura se introdujo con profundidades que van desde 1 mm a 6 mm en el rotor de 25 mm de diámetro. Un cambio significativo en característica de vibración fue examinado cuando la profundidad de la grieta ha excedido 3mm. Al observar los primeros tres amplitudes máximas de cojinetes derecho e izquierdo, un diferente en los valores se observó. Esta indiferencia en la magnitud de la amplitud de pico es debido al efecto combinado de acoplamiento y la posición de la grieta. El trabajo ampliado por suponiendo modelo de un simplificado montaje experimental está diseñado de ANSYS y el análisis armónico en diferentes combinaciones de profundidades de grieta y ubicaciones de grieta.

2 Marco Teórico

2.1 Rotor Jeffcott

Para establecer algunos conceptos y definiciones importantes que proveen información de utilidad general, es conveniente considerar el rotor Jeffcott, un modelo muy simplificado de un rotor a alta velocidad que retiene muchas de las características esenciales de sistemas más complejos en su respuesta al desbalance. En dicho rotor la masa central está instalada en un elemento flexible sin masa, soportado sobre dos chumaceras como se muestra en la Fig. 2.1.

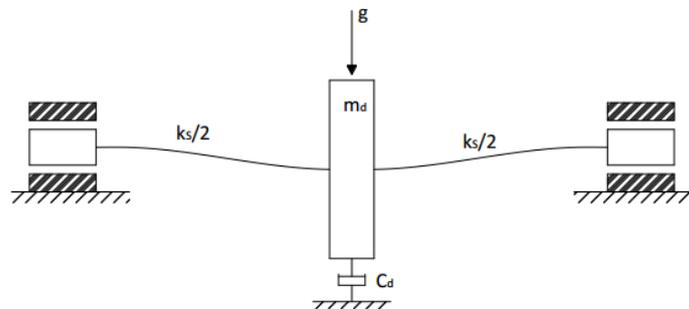


Fig. 2.1 Modelo de rotor Jeffcott

Donde g representa la gravedad, m_d , la masa del disco, y k la rigidez del eje.

Jeffcott extendió el análisis de Foppl incluyendo amortiguamiento externo (C_d), y confirmó la predicción de este, demostrando que existen soluciones estables por encima de la velocidad crítica. Aún hoy se utiliza su modelo de rotor en muchos trabajos e investigaciones.

2.2 Introducción al diagnóstico y detección de ejes fisurados

Los ejes se encuentran entre los componentes sujetos a quizás a las más arduas condiciones de trabajo en lo se refiere a equipo rotatorio de alto rendimiento para uso general usado en plantas de proceso tales como; compresores de alta velocidad, turbinas del vapor y de gas, generadores, bombas, etc. Aunque generalmente son absolutamente robustos y bien diseñados, los ejes en operación son a veces susceptibles a serios defectos que se desarrollan sin mucho aviso previo evidente. Los ejes son los primeros candidatos a grietas de fatiga debido a la naturaleza

rápidamente fluctuante de los esfuerzos de flexión, la presencia de numerosos concentradores de esfuerzo y los posibles defectos de diseño o de fabricación. Las grietas se definen como cualquier discontinuidad involuntaria en el material del eje. Las amplias variaciones en temperatura y medio ambiente durante la operación también contribuyen a las condiciones que conducen a una eventual falla por fatiga, un evento de dicha catástrofe se observa en Fig. 2.2.



Fig. 2.2 Catástrofe debido a falla en rotor

Las consecuencias de la falta total del eje pueden ser catastróficas con enormes costos en pérdidas de tiempo, consecuente daño al equipo y potencial lesión al personal. La falla total ocurre cuando el espécimen se ha fracturado totalmente en dos o más porciones. Un defecto o un desperfecto, en contraste, se puede definir arbitrariamente como cualquier característica que hace a un componente menos conveniente para su uso previsto. La operación confiable y segura del equipo confía en el mantenimiento proactivo ayudado por recientes tecnologías de diagnóstico.

Los operadores y el personal de mantenimiento de la maquinaria crítica de la planta están particularmente interesados en la detección temprana de los síntomas que pueden conducir a la falla de ejes en servicio. En materiales dúctiles, tales como aceros de baja/media aleación usados para los ejes de turbomaquinaria, las grietas se inician como minúsculas discontinuidades que crecen de tamaño cuando el eje es sujeto a esfuerzos cíclicos. Es importante detectar estas grietas antes de que alcancen su tamaño crítico y causen la falla total del eje. La presente sección se ocupa de los tipos y las causas de las grietas en rotores y también de los fundamentos sobre la propagación de grietas, seguida por una revisión de la literatura publicada en inglés en las últimas décadas en los campos de detección de grietas en ejes y la

valoración de su severidad. También se repasan algunos artículos clásicos debido a su perdurable contribución. Aquellos interesados en un estudio de la literatura no incluida aquí pueden referirse a las excelentes revisiones de la literatura hechas en este tema por Dimarogonas [8].

2.3 Método de espacio de estados

2.3.1 Estado

El estado de un sistema dinámico es el conjunto más pequeño de variables (denominadas variables de estado) tal que el conocimiento de esas variables en $t=t_0$, juntamente con el conocimiento de la entrada para $t \geq t_0$, determinan completamente el comportamiento del sistema en cualquier tiempo $t \geq t_0$.

2.3.2 Variable de estados

Las variables de estado de un sistema dinámico son las variables que constituyen el conjunto más pequeño de variables que determinan el estado del mencionado sistema dinámico.

2.3.3 Espacio de estados

Se requieren al menos n variables x_1, x_2, \dots, x_n para describir completamente el comportamiento dinámico del sistema de orden n . Estas son las n variables de estado.

Conocidas estas variables n variables en el instante de tiempo inicial y las evoluciones de las entradas para tiempos $t \geq t_0$, el estado futuro del sistema queda completamente determinado. Es importante aclarar que las variables de estado pueden ser medibles o no, que representen magnitudes físicas o solo matemáticas. Pero deben ser las mínimas n (equivalentes a los n elementos de almacenamiento de energía hablando de sistemas dinámicos físicos para un sistema de orden n).

2.3.4 Ecuaciones en el espacio de estado

Para la representación del modelo dinámico de sistemas en el espacio de estado se usan tres tipos de variables.

- Las variables de entradas.
- las variables de salida.
- las variables de estado.

La ventaja del uso en representación en espacio estado es que éste puede en su modelado representar sistemas tanto continuos como discretos, lineales o no lineales variables o invariantes en el tiempo y generalmente usados en notación matricial. Se usará en este trabajo solo para sistemas lineales a coeficientes constantes invariantes en el tiempo, que, en el campo temporal, se puede expresar por el siguiente sistema de ecuaciones:

$$x_1' = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n + b_{11}u_1 + b_{12}u_2 + \dots + b_{1m}u_m \quad (1)$$

$$x_2' = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n + b_{21}u_1 + b_{22}u_2 + \dots + b_{2m}u_m \quad (2)$$

$$x_n' = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n + b_{n1}u_1 + b_{n2}u_2 + \dots + b_{nm}u_m \quad (3)$$

2.4 Análisis en Ansys

Cada vez más ingenieros están usando Modeladores de sólidos con el Método de los elementos finitos para solucionar problemas cotidianos de estados de tensiones, deformaciones, transferencia de calor, flujo de fluidos, electromagnetismo, entre otros. ANSYS Workbench, uno de los programas de modelaje de sólidos, simulación y optimización más integrales y extendidos.

El proceso pasa por temas de creación de geometría, análisis tensionales, transferencia de calor y modos de vibración. También trata de la generación del mallado de los elementos finitos. Tal programa ha sido desarrollado sobre un marco que permite introducir una nueva manera de trabajar con tus proyectos de forma esquemática.

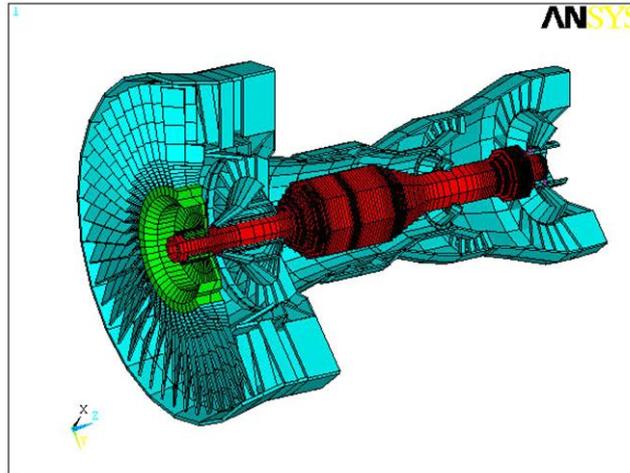


Fig. 2.3 Análisis en ANSYS Workbench

2.4.1 Desing Modeler.

En la sección de creación de geometrías se crea y editan geometrías en preparación para el análisis en ANSYS Mechanical, cubriendo tópicos cómo:

- La interfaz de usuario
- Creación de bocetos
- Creación de geometrías 2D ò 3D.
- Importar datos desde otros modeladores
- Modelar con parámetros

2.4.2 Análisis mecánico.

En las secciones siguientes nos concentraremos en el módulo de simulación mecánica. Acá aprenderás como usar este módulo de forma efectiva para construir un modelo de simulación mecánica, analizarlo e interpretar los resultados, cubriendo tópicos como:

- Análisis estáticos estructurales
- Análisis de modos de vibración
- Análisis térmicos
- Casos de estudio con múltiples escenarios

2.4.3 Análisis estructural

Es una herramienta de Ansys para resolver situaciones muy particulares en diseño mecánico como elementos estructurales lineales, no lineales y análisis dinámico. Con este módulo puedes evaluar el comportamiento, asignar materiales y resolver ecuaciones. Puedes resolver análisis térmicos, acoplamiento físicos que involucren acústica, elementos piezoeléctricos e interacción térmica con eléctrica, análisis estructurales como el mostrado en la Fig. 2.4. Ansys Mechanical es una solución puntual de análisis de alto desempeño que puedes usar como plataforma de solución.

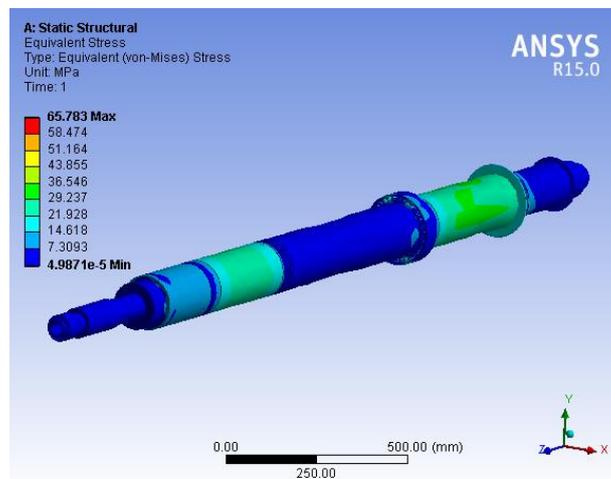


Fig. 2.4 Ejemplo de análisis estructural

2.5 Estabilidad

La estabilidad es una de las características más importantes de los sistemas dinámicos. Al analizar la estabilidad de dichos sistemas, surgen diferentes problemas según la manera en que se la caracterice y los sistemas en consideración. Por ejemplo, considerando sistemas lineales y estacionarios, existen métodos para poder determinar su BIBO-estabilidad, como el criterio de la respuesta al impulso, el criterio de Routh y el de Nyquist. Sin embargo, cuando se tratan sistemas no lineales, estos métodos no tienen validez.

La teoría de estabilidad juega un rol central en teoría de sistemas e ingeniería. Existen distintos tipos de problemas de estabilidad en los sistemas dinámicos (ISS, IOS, PE, etc.). Particularmente el curso abordará al análisis de estabilidad de los puntos de equilibrio.

La estabilidad de puntos de equilibrio generalmente se caracteriza en el sentido de Lyapunov, quien fue un matemático e ingeniero ruso que estableció las bases de la teoría que hoy lleva su nombre.



Fig. 2.5 Alexander Lyapunov (1857-1918)

La riqueza dinámica de los sistemas no lineales presenta ciertos fenómenos que no se evidencian al estudiar los sistemas lineales [9]. Uno de estos fenómenos es la existencia de *múltiples puntos de equilibrio aislados*. Un sistema lineal puede tener un solo punto de equilibrio aislado, y por lo tanto un solo estado de régimen estacionario que –si el punto es asintóticamente estable, atrae al estado del sistema independientemente del estado inicial. En cambio, los sistemas no lineales pueden tener varios puntos de equilibrio, y la convergencia a uno estable depende del estado inicial. Debido a esto, resulta importante estudiar la estabilidad de los diferentes puntos de equilibrio de los sistemas no lineales para poder entender mejor el comportamiento del mismo.

La teoría de Lyapunov se refiere principalmente a los dos métodos propuestos por Lyapunov: el método indirecto y el directo.

Método Indirecto: Conocido también como método de linealización, establece que las propiedades de estabilidad de un sistema no lineal en la vecindad de un PE son esencialmente las mismas de su aproximación lineal.

Método Directo: Es una herramienta para el análisis de sistemas no lineales. En su inicio, el método directo es una generalización de los conceptos de energía asociados con sistemas

mecánicos. La idea es construir una función escalar que represente la energía del sistema, con la finalidad de ver si ésta decrece.

La limitación del método directo recae en el hecho de que generalmente es difícil encontrar una función de Lyapunov para determinado sistema.

Los resultados o teoremas de estabilidad de Lyapunov proveen de condiciones suficientes para establecer la estabilidad de los puntos de equilibrio.

Se aclara el hecho de que, si no se puede establecer la estabilidad de los puntos de equilibrio por los métodos de Lyapunov, no implica que el sistema es estable o inestable, según lo que se quiera demostrar.

Aquí se analiza la estabilidad de los puntos de equilibrio de los sistemas no lineales mediante el estudio del comportamiento del estado en un entorno de los mismos. Para ello se presenta el concepto de estabilidad en el sentido de Lyapunov como así también una introducción los métodos de Lyapunov para el análisis de estabilidad.

2.5.1 Estabilidad de los Puntos de Equilibrio

- Un punto de equilibrio se dice estable si todas las soluciones que se inicien en las cercanías del punto de equilibrio permanecen en las cercanías del punto de equilibrio; de otro modo el punto de equilibrio es inestable.
- Un punto de equilibrio se dice asintóticamente estable si todas las soluciones que se inicien en las cercanías del punto de equilibrio no sólo permanecen en las cercanías del punto de equilibrio, sino que además tienden hacia el equilibrio a medida que el tiempo se aproxima a infinito.

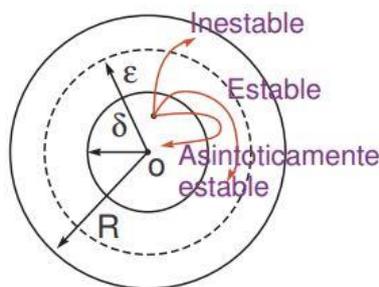


Fig. 2.6 Tipos de estabilidad

2.5.2 Estabilidad de trayectorias

En este caso la estabilidad se define en términos de la desviación respecto a una trayectoria determinada al perturbar el sistema.

Considere una trayectoria determinada $x_f(t)$ del sistema, $\dot{x}(t) = f(x, u, t)$ para la entrada $u(t)$ y otras trayectorias $x(t)$ cercanas a $x_f(t)$ con la misma entrada $u(t)$.

El problema de estabilidad consiste en investigar la estabilidad de:

$$\Delta x(t) = x(t) - x_f(t) \quad (4)$$

$$\Delta \dot{x}(t) = f(x_f + \Delta x, u, t) - f(x_f, u, t) \quad (5)$$

$$\Delta \dot{x}(t) = g(\Delta x, t) \text{ con } g(0, t) = 0 \quad (6)$$

Ya que $f(x_f, u, t)$ y $u(t)$ son funciones fijas del tiempo.

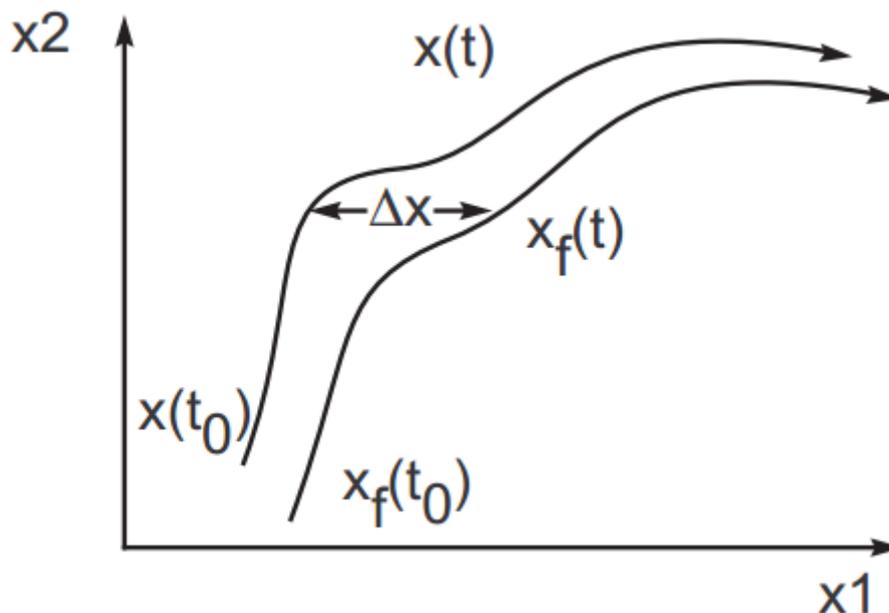


Fig. 2.7 Estabilidad de trayectorias

Desarrollo

En esta sección se presenta el desarrollo de los modelos matemáticos que servirán para caracterizar el comportamiento del sistema estudiado, de manera que a partir de dichos modelos se puedan realizar los programas computacionales necesarios para efectuar los cálculos y que permiten hacer una correcta predicción del comportamiento del sistema.

3 Modelo del Rotor Fisurado

El estudio se basó en el modelo de “Rotor Jeffcott Extendido Desequilibrado y Fisurado”. Este consiste en un modelo de rotor básico que posee las características fundamentales de los modelos de los rotores más complejos en las respuestas al desequilibrio.

Este modelo presenta las siguientes características (ver Fig. 3.1):

- Un eje flexible, uniforme, de masa despreciable y fisurado de forma transversal en la mitad de su longitud.
- Dos cojinetes idénticos, colocados en los extremos del sistema.
- No existe desalineamiento.

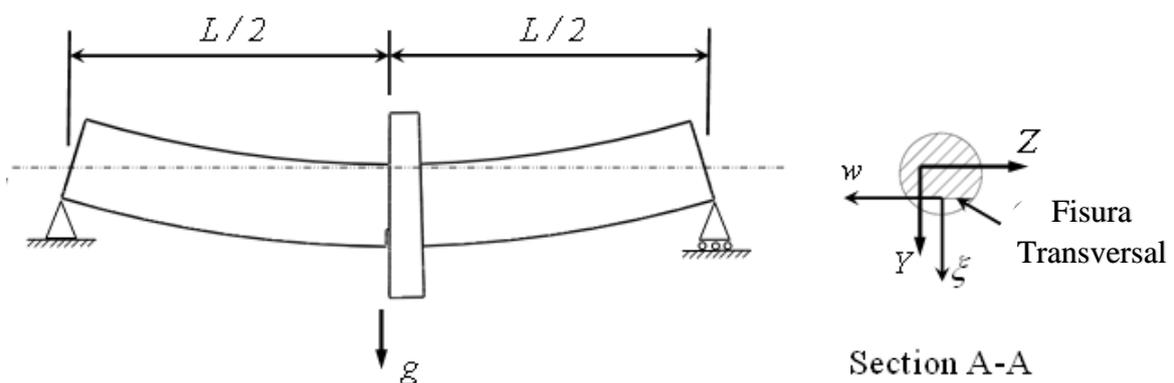


Fig. 3.1 Modelo de Rotor Jeffcott extendido y fisurado

En primer lugar, se analizó el sistema el cual muestra sus especificaciones suponiendo que no existe fisura, para después añadir la condición de eje fisurado. A continuación, se detalla el modelo analítico para el caso en el que el eje no está fisurado.

Se toma un sistema de referencia fijo en el centro geométrico del disco cuando el sistema está en reposo, haciendo coincidir el eje X con el eje del sistema. Cuando se pone a girar el disco junto con el eje, este se deformará, se observar en la figura (Fig. 3.2).

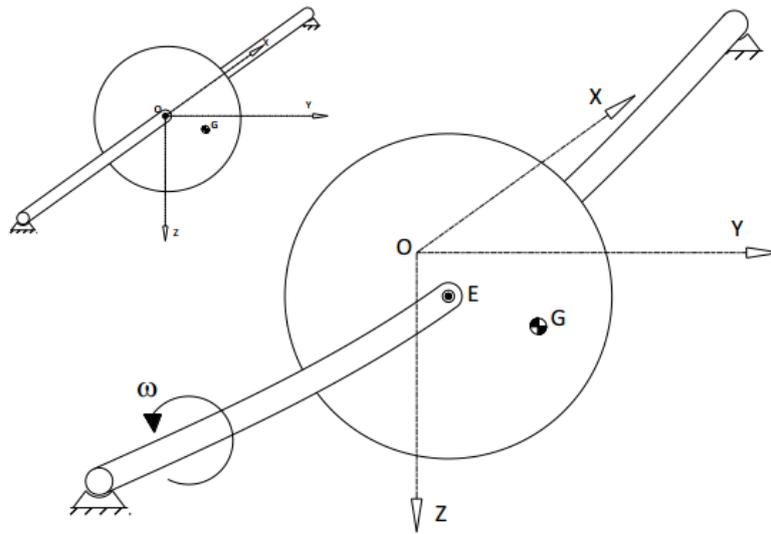


Fig. 3.2 Esquema del Rotor Jeffcott con eje flexible

La solución en términos de y , z como funciones del tiempo es lo que se suele medir en las instalaciones de turbomaquinaria, por todo esto, este sistema de coordenadas es el más adecuado para plantear y resolver las ecuaciones de movimiento del Rotor Jeffcott.

Para plantear las ecuaciones de movimiento hay que tener en cuenta que el eje tiene rigidez a flexión (k), masa (m), y que la resistencia que ofrece el aire ante el eje girando se aproxima mediante un coeficiente de amortiguamiento (c).

Las ecuaciones diferenciales y su solución se presentan a continuación, considerando una velocidad angular constante e igual a ω .

Al plantear el equilibrio de fuerzas hay que tener en cuenta que las ecuaciones tendrán una componente debida al comportamiento elástico del eje, otra debida al amortiguamiento, y otra debida a las fuerzas de inercia.

$$\begin{aligned}
m\ddot{Y} + c\dot{Y} + (k_{\xi} + k_{\eta})\frac{Y}{2} + \frac{G}{2}\{(k_{\xi} - k_{\eta})\cos 2\theta - \\
2k_{\xi\eta}\sin 2\theta\}Y + \frac{G}{2}\{(k_{\xi} - k_{\eta})\sin 2\theta + \\
2k_{\xi\eta}\cos 2\theta\}Z = me\omega^2\cos(\theta + \beta) - mg
\end{aligned} \tag{7}$$

$$\begin{aligned}
m\ddot{Z} + c\dot{Z} + (k_{\xi} + k_{\eta})\frac{Y}{2} + \frac{G}{2}\{(k_{\eta} - k_{\xi})\cos 2\theta - \\
2k_{\xi\eta}\sin 2\theta\}Z + \frac{G}{2}\{(k_{\xi} - k_{\eta})\sin 2\theta + \\
2k_{\xi\eta}\cos 2\theta\}Y = me\omega^2\cos(\theta + \beta)
\end{aligned} \tag{8}$$

Donde:

| | | |
|---------------|---|---------|
| m | Masa del rotor | kg |
| c | Amortiguamiento | Ns/m |
| G | Función de respiro | (-) |
| g | Gravedad | m/s^2 |
| k_{η} | Rigidez del eje dirección paralela | N/m |
| k_{ξ} | Rigidez del eje dirección normal | N/m |
| $k_{\xi\eta}$ | Par de rigidez del eje | N/m |
| Y | Vibración vertical | m |
| Z | Vibración horizontal | m |
| ω | Velocidad angular del eje | rad/s |
| e | Excentricidad | m |
| θ | Ángulo de posición de la grieta | (°) |
| β | Ángulo entre grieta y desequilibrio del rotor | (°) |

El rotor Jeffcott de masa despreciable, se considera montado sobre cojinetes rígidos, con una fisura en la mitad de la longitud L del eje. De acuerdo con el modelo propuesto por Darpe [10], se asume una fisura de frente recto en el centro del eje de profundidad a . Se llamará Y, Z a los ejes del sistema de referencia fijo, y ξ, η a los ejes del sistema de referencia móvil o inercial en la sección de la fisura. corresponde con la dirección débil de la fisura como se puede ver en la figura (Fig. 3.3).

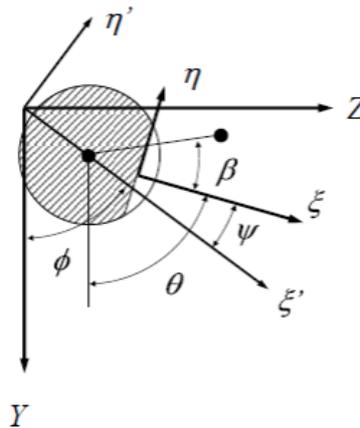


Fig. 3.3 Sistema de referencia

La flexibilidad total del eje se compone de dos partes, la primera es la flexibilidad del eje íntegro, sin fisura, y la segunda es la flexibilidad adicional introducida por la fisura. El valor de la flexibilidad cambia con el tamaño de la parte abierta de la fisura. Como el eje gira, la fisura se abre y cierra, por tanto, el tamaño de la parte abierta de la fisura cambia constantemente haciendo variar la flexibilidad del eje fisurado. Los términos cruzados de la rigidez $k_{\xi\eta}$ y $k_{\eta\xi}$, aparecen debido a la apertura parcial de la fisura.

Tabla 3.1 Parámetros físicos del sistema

| | |
|-------------------------------------|--------------------------|
| Longitud del eje | 0.69 (m) |
| Masa | 1.495 (kg) |
| Radio del eje | 6.35e-3 (m) |
| Excentricidad de desbalance | 30e-6 (m) |
| Módulo de Young | 210e9 (Pa) |
| Amortiguamiento Adimensional | 0.05 |
| Profundidad de la fisura | a/D= 0.1,0.2,0.3,0.4,0.5 |
| Gravedad | 9.81 (m/s ²) |

3.1 Modelo Matemático para eje fisurado

Para modelar el comportamiento de un eje fisurado se utiliza el razonamiento expuesto en el punto anterior, teniendo en cuenta que desde el momento en el que aparece la fisura, la flexibilidad del eje ya no es única. Esta tomará diferentes valores dependiendo de la posición relativa del eje en su movimiento de rotación.

3.1.1 Tipos de fisura

Se sabe que cuando en un rotor de una máquina se genera una fisura, la forma de esta es impredecible. Sin embargo, la existencia de una fisura en un eje rotatorio necesita ser modelada para ser considerada en las ecuaciones de movimiento del sistema en estudio.

Fundamentalmente se trabaja con dos tipos de fisuras. Las de frente plano, o recto, y las de frente elíptico. En la figura (Fig. 3.4.) se pueden ver ambos tipos. La mayoría de autores trabaja con fisuras de frente de recto. Aunque hoy en día se sabe que la realidad no se corresponde exactamente con esta hipótesis, es una buena aproximación. En este estudio se utilizarán fisuras rectas.

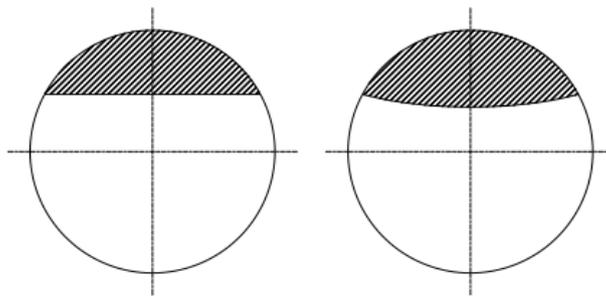


Fig. 3.4 Fisura recta y elíptica

Los sistemas rotatorios en estudio se consideran “*dominados por el peso*”, es decir, es la gravedad el factor que provoca que la fisura en el rotor se pueda abrir y cerrar según su posición angular cambie.

Se sabe que la orientación de la fisura depende del tiempo, y cambia de forma periódica durante cada ciclo de rotación del eje, y es por eso que la fisura se abre y se cierra continuamente durante el giro del rotor. Al fenómeno de apertura y cierre de la fisura se le conoce como “*breathing*” de la fisura.

El fenómeno de “*apertura y cierre*” de la fisura provoca que la rigidez del eje varíe en función de la posición angular en la se encuentre dicha fisura. De tal manera que la rigidez del eje fisurado será máxima cuando la fisura se encuentre cerrada, esto es, cuando la fisura esté en la parte de “*arriba*” del eje. En este caso, el eje fisurado alcanzará su máxima similitud con un eje íntegro o sin fisura. Por otro lado, la rigidez del eje fisurado será mínima cuando la fisura alcance su máxima apertura, la fisura estará en la parte de “*abajo*” del eje. Estos dos casos extremos se representan en las siguientes figuras (Fig. 3.5 y Fig. 3.6). Este razonamiento es válido sólo en condiciones estáticas, dado que al iniciar la rotación aparecen más factores que harán que la posición de la fisura en cada momento se altere ligeramente.

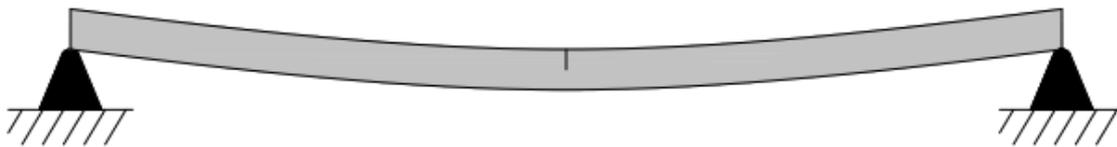


Fig. 3.5 Fisura cerrada debido a la acción de la gravedad y a la posición de la propia fisura

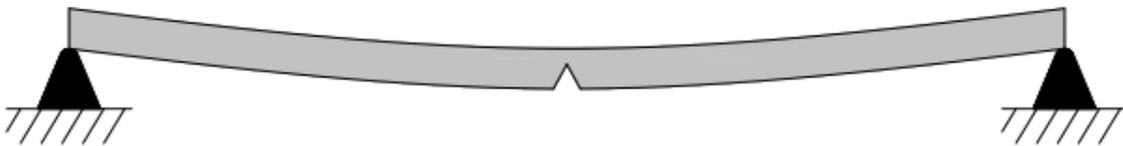


Fig. 3.6 Fisura abierta al máximo debido a la acción de la gravedad y a la posición de la propia fisura.

Por todo lo ya comentado, se hace necesario modelar la variación periódica de la rigidez del eje rotatorio debida a la fisura. Para ello, se supone que dicha variación de rigidez sólo depende del tiempo, y que el peso ejerce un efecto dominante.

Se hace necesario por lo tanto establecer una función periódica en el tiempo que caracterice el comportamiento de la fisura, y que será representado por: $G(t)=G(\phi)$. Donde ϕ representa el ángulo descrito por la rotación del eje.

Existen tres modelos para caracterizar el comportamiento de la fisura, que se presentan a continuación.

3.1.2 Modelo de fisura abierta

Es la función más simple de las consideradas, y sirve para conocer el comportamiento del sistema cuando la fisura permanece siempre abierta. La función queda de la siguiente manera.

$$G(\phi) = 1 \quad (9)$$

La gráfica correspondiente se observa a continuación (Fig. 3.7)

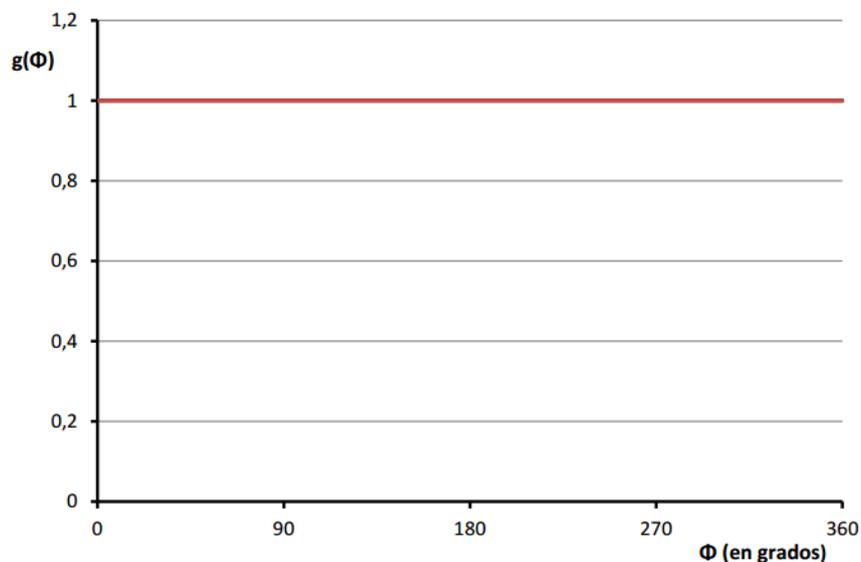


Fig. 3.7 Gráfica de la función tipo fisura abierta

3.1.3 Modelo de fisura Mayes & Davies

Mayes y Davies propusieron una función cosenoidal que representa muy bien el comportamiento de fisuras profundas ($\alpha \geq 0.25$). Con esta función se logra evitar el cambio brusco durante el proceso de apertura y cierre de la fisura, obteniendo una transición más suave, tal como ocurre en la realidad, sobre todo para fisuras profundas.

La función propuesta por Mayer y Davies se presenta a continuación:

$$G(\phi) = \frac{1 + \cos \phi}{2} \quad (10)$$

La gráfica de la función se puede observar a continuación (**Fig. 3.8**).

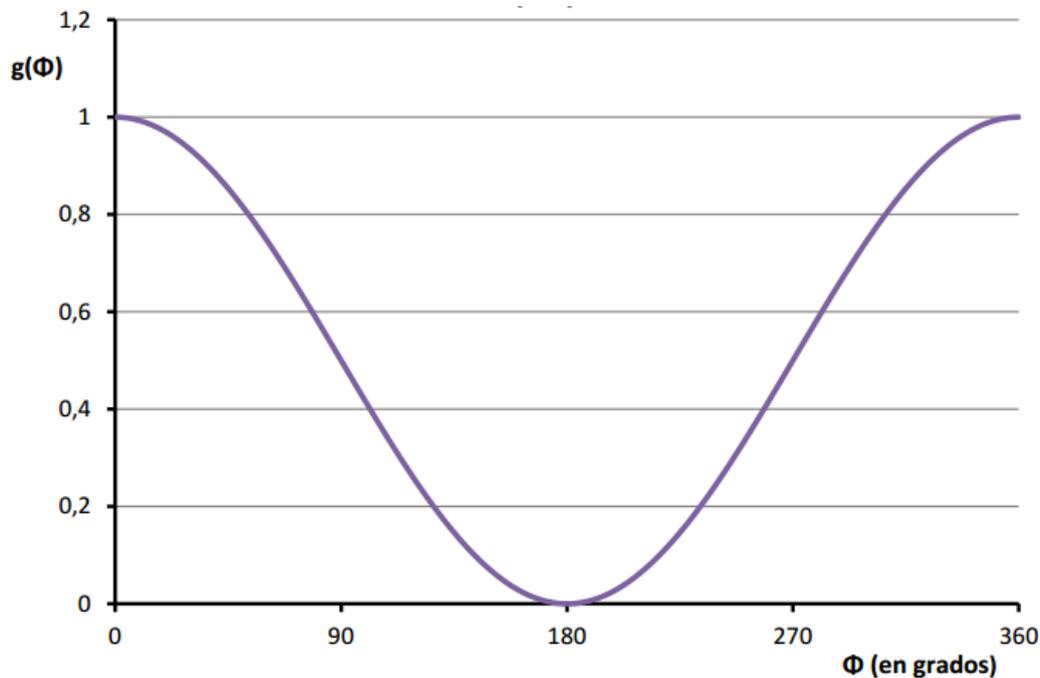


Fig. 3.8 Gráfica de la función tipo fisura abierta

3.1.4 Modelo de fisura No lineal de Chen.

Chen propuso una función cosenoidal basándose en la función de Mayes & Davies como se muestra en la ecuación (10), que representa el comportamiento de fisuras no lineales. Con esta función se logra evitar el cambio brusco durante el proceso de apertura y cierre de la fisura al igual que integra la variación de la amplitud en Y y Z como se muestra en las ecuaciones (11) y (12), obteniendo una transición compleja, tal como ocurre en la realidad, sobre todo para fisuras profundas.

$$\begin{aligned} \cos \psi &= \cos(\theta - \phi) = \cos(\theta) \cos(\phi) + \\ \sin(\theta) \sin(\phi) &= \begin{cases} \frac{y \cos(\theta(t)) + z \sin(\theta(t))}{\sqrt{y^2 + z^2}}, & \forall \sqrt{y^2 + z^2} \neq 0 \\ -1, & \forall \sqrt{y^2 + z^2} = 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (11)$$

$$F_{breathing}(\cos \psi) = \frac{1 + \cos(\psi)}{2} \quad (12)$$

3.2 Solución Numérica

En este Capítulo es realizada una serie de simulaciones numéricas de diversos casos o configuraciones del sistema y se observa fácilmente la influencia del ángulo de orientación β entre la dirección de la grieta y desbalance residual. Dicho ángulo de orientación relativo entre el desbalance residual y la grieta y su interacción, afectan drásticamente la respuesta de sistema haciendo la detección de grieta muy difícil. Sin embargo, la existencia de resonancias locales en diversos sub-armónicos o súper armónicos racionales o combinaciones de estos, permite una buena caracterización de los patrones o firmas de vibración reduciendo la influencia de la interacción entre vectores desconocidos; como es el caso de las magnitudes y orientaciones del desbalance residual y fisura del eje. El modelo de Gómez-Mancilla [11], tiene las ventajas de los sistemas lineales, sin embargo, el enfoque de equilibrio no trivial propuesto produce una respuesta de múltiples frecuencias la cual permite caracterizar ejes agrietados.

A lo largo de este Capítulo se analizan y discuten los resultados simulados numéricamente que tienen como objetivo la detección de grietas y la caracterización de los sistemas agrietados simples interactuando con el desbalance de masa omnipresente. Estos resultados son obtenidos mediante un programa escrito por el autor en MATLAB (Apéndice A) basado en las ecuaciones del sistema ecuaciones (7) y (8), previamente presentadas. Este programa permite obtener; diagramas orbitales, diagramas de Bode, FFT de las respuestas de vibración y gráficos de la respuesta en el tiempo. Los valores paramétricos normalizados usados en las simulaciones se encuentran comúnmente en la práctica; solamente se muestran y se discuten los resultados más significativos.

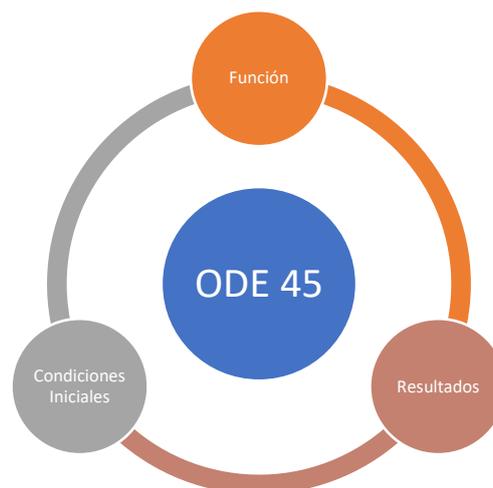
Basado en resultados numéricos donde se confrontan la solución numérica contra la solución numérica-analítica aproximada propuesta, se muestra a través de graficas de las respuestas orbitales del eje, que la aproximación implicada en el procedimiento numérico-analítico da una precisión adecuada para propósitos prácticos al investigar la interacción entre los desbalances de masa siempre presentes en la realidad y la fisura transversal localizada a la mitad del tramo del eje.

3.3 Solución Numérica de Ecuaciones Diferenciales con ode45 en Matlab

Esta función recibe 3 parámetros esenciales, el nombre de un archivo .m en el que se define la ecuación diferencial acompañado por un símbolo '@', el siguiente argumento, corresponde a un vector fila con dos valores entre los cuales queremos conocer la solución de la ED y como último parámetro recibe un vector de valores iniciales que contiene los valores iniciales necesarios para una correcta solución de la ED, En otras palabras el prototipo básico para usar ode45() es el siguiente:

$$[t, y] = \text{ode45}(@\text{FUNCION}, \text{tiempo_solución}, \text{condiciones_iniciales}); \quad (13)$$

y en este caso la solución se numérica se almacenará en el vector 'y' para cada uno de los instantes de tiempo presentes en el vector 't'.



Para dar solución a esta ecuación siempre será necesario dos scripts, uno donde definimos los parámetros de 'tiempo de solución' y 'condiciones iniciales', y pues, posteriormente hacemos el llamado a `ode45()`, como se muestra en las Fig. 3.9, Fig. 3.10 y Fig. 3.11:

```

%% MODELO DE ROTOR FISURADO
%% Luis Manuel Palacios Pineda / Aldo Antonio Camacho Ramirez
function dx=modelo_chen(t,x)
dx=zeros(4,1);
global omega_cap
%% Caracteristicas del eje
lspam=0.69; % longitud efectiva en metros
ltot=0.915; % longitud total del eje en metros
rho=7920*1.6354*(ltot/lspam); %Densidad en kg/m^3
E=210e9; %Modulo de Young del acero del eje, en Pascales
r=6.35e-3; %Radio del eje, en metros
A=pi*r^2; %Area de una seccion transversal del eje
d=r+r;
I=(pi/64)*(d^4);
A_D=0;
m=1.495; % Masa del rotor Kg
zeta=.05; %Amortiguamiento adimensional
K_n=-1026627.2*(A_D)^5 + 1477453.1*(A_D)^4 - 809564.13*(A_D)^3 + 202048.86*(A_D)^2 - 23181.432*(A_D) + 37761.498;
K_E=-1625416.5*(A_D)^5 + 2076933.7*(A_D)^4 - 1000238.2*(A_D)^3 + 202118.79*(A_D)^2 - 24045.886*(A_D) + 37725.884;
%K_EN=K_E/5;
K_EN=0;
K_int=(48*E*I)/(lspam^3); % Rigidez acoplada del eje
w=0.09; % Distancia a lo largo de la parte delantera de la grieta
beta=0; % Angulo entre la fisura y el rotor desbalanceado [°]
g=9.81; % Gravedad m/s^2
e=30e-6; % Desbalance
omega_n=sqrt(K_int/m); % Frecuencia Natural
omega=omega_n.*omega_cap; % velocidad de giro del rotor [rad/s]
tetha=omega*t; % Angulo de posición de la grieta [°]
co_phi=(x(1)*cos(omega*t)+x(3)*sin(omega*t))/sqrt((x(1))^2+(x(3))^2);
G=(1+(co_phi))/2; % Funcion de respiro (Chen)
    
```

Fig. 3.9 Código de Modelo de eje fisurado

```

E=210e9; %Modulo de Young del acero del eje, en Pascales
r=6.35e-3; %Radio del eje, en metros
A=pi*r^2; %Area de una seccion transversal del eje
d=r+r;
I=(pi/64)*(d^4);
A_D=0.1;
m=1.495; % Masa del rotor Kg
zeta=.05; %Amortiguamiento adimensional
K_n=-1026627.2*(A_D)^5 + 1477453.1*(A_D)^4 - 809564.13*(A_D)^3 + 202048.86*(A_D)^2 - 23181.432*(A_D) + 37761.498;
K_E=-1625416.5*(A_D)^5 + 2076933.7*(A_D)^4 - 1000238.2*(A_D)^3 + 202118.79*(A_D)^2 - 24045.886*(A_D) + 37725.884;
%K_EN=K_E/5;
K_EN=0;
K_int=(48*E*I)/(lspam^3); % Rigidez acoplada del eje
w=0.09; % Distancia a lo largo de la parte delantera de la grieta
beta=0; % Angulo entre la fisura y el rotor desbalanceado [°]
g=9.81; % Gravedad m/s^2
e=30e-6; % Desbalance
omega_n=sqrt(K_int/m); % Frecuencia Natural
omega=omega_n.*omega_cap; % velocidad de giro del rotor [rad/s]
tetha=omega*t; % Angulo de posición de la grieta [°]
co_phi=(x(1)*cos(omega*t)+x(3)*sin(omega*t))/sqrt((x(1))^2+(x(3))^2);
G=(1+(co_phi))/2; % Funcion de respiro (Chen)
c=zeta*2*m*omega_n; % Amortiguamiento rotor viscoso

%% Excitacion del sistema
F1=(m*e*omega^2*cos(omega*t-beta))-(m*g);
F2=m*e*omega^2*sin(omega*t-beta);

%% Modelo matematico expresado con metodo de ecuaciones de estados
dx(1)=x(2);
dx(2)=(1/m)*(F1-(c*x(2))-((x(1)/2)*(K_E+K_n))-((G/2)*((K_E-K_n)*cos(2*omega*t))-2*K_EN*sin(2*omega*t))*(x(1))-((G/2)*((K_E-K_n)*sin(2*omega*t)+2*K_EN*cos(2*omega*t))));
dx(3)=x(4);
dx(4)=(1/m)*(F2-(c*x(4))-((x(3)/2)*(K_E+K_n))-((G/2)*((K_n-K_E)*cos(2*omega*t))-2*K_EN*sin(2*omega*t))*(x(3))-((G/2)*((K_E-K_n)*sin(2*omega*t)+2*K_EN*cos(2*omega*t))));
    
```

Fig. 3.10 Código del método de espacio de estados en modelo de eje fisurado.

En este caso decidimos que queremos visualizar la solución en el intervalo de 0 a 30 segundos para la variable independiente (en este caso x), en la línea siguiente dijimos que la condición inicial sería $y(0)=30e-6$, en la línea siguiente se hace uso de `ode45()` sabiendo que los

argumentos que retorna es la variable independiente, seguida de la variable dependiente que contiene la solución y finalmente hacemos un plot() de ambos vectores para visualizar la solución.

Cabe resaltar que en la imagen anterior está presente el símbolo @ que acompaña el nombre del archivo donde se define (escribe) nuestra ecuación diferencial, y esto se debe a que con el @ sucede como si le pasáramos un puntero o dirección de donde se encuentra el archivo que define a la ED y de esta forma ode45() hará llamadas recursivas cuantas veces sea necesario, en nuestro caso el nombre del archivo es Modelo_chen y su contenido es el siguiente:

```
%% Solución del sistema
%% Luis Manuel Palacios Pineda / Aldo Antonio Camacho Ramirez
clc
clear all
global omega_cap
tf=30;
n=1000;
contador=0;
for omega_cap=1.5:0.1:2;
[T,Y] = ode45(@modelo_chen,[0 tf],[30e-6 30e-6 0 0]);
M=length(Y);
contador=contador+1;
F=Y(M-n:M,1);
K=Y(M-n:M,3);
A_X(contador)=(max(F) - (min(F)));
A_Y(contador)=(max(K) - (min(K)));
omega_c(contador)=omega_cap;
end
%% Grafica de resultados
figure (1)
plot(T,Y(:,1))
grid on
title('Amplitud 1 de vibración','FontSize',14)
xlabel('Tiempo [s]')
ylabel('x [m]')
grid on
```

Fig. 3.11 Código de solución de modelo de eje fisurado.

Como se puede ver el nombre de la función (y por ende del archivo) es Modelo_chen y dentro de este se define la ecuación diferencial que planteamos al principio, luego de guardados ambos archivos sin errores, procedemos a ejecutar el script encargado de llamar a ode45() con sus parámetros, obteniendo la solución como se ve en la

Fig. 3.12.

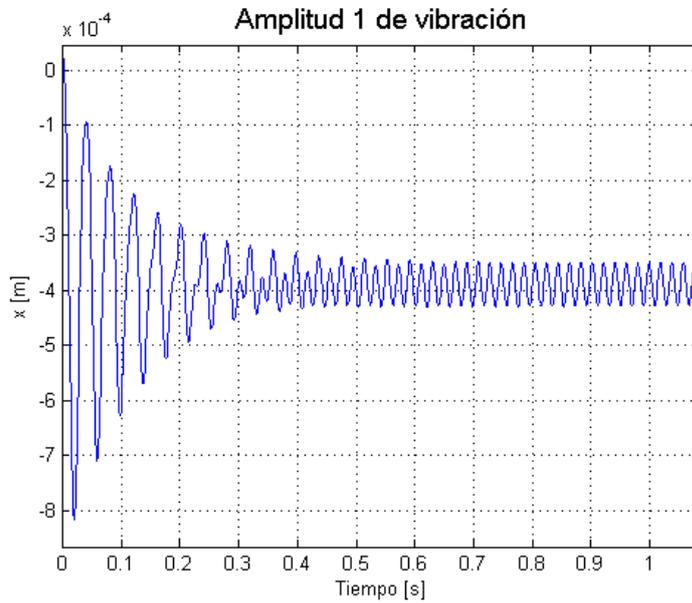


Fig. 3.12 Grafica de posición, retornada por ode45

Cuando se realiza la ejecución del código que se encarga de llamar a la función *ode45()* se logra el siguiente resultado, donde se aprovechó el hecho de que la función *ode45()* retorna la solución para X1 y X2, recuerde que X1=x lo que quiere decir que la solución de X1 (en este caso la primera columna de la matriz principal X) representará la solución de $x \rightarrow$ posición, y X2 corresponde a x' lo que quiere decir que la columna 2 de la matriz principal X contendrá a x' o que quiere decir que $X(:,2)$ contiene la velocidad.

Para ilustrar mejor lo retornado por *ode45()* entonces mostramos en la siguiente tabla el contenido de la matriz X:

Tabla 3.2 Contenido de la matriz X retornada por *ode45()*

| $x = X(:,1)$ | $x = X(:,2)$ |
|--------------|--------------|
| | |
| | |
| | |

4 Resultados

4.1 Cambio de rigidez por fisura

El cambio de rigidez en un eje fisurado, se muestra su evolución conforme la grieta crece, la cual fue obtenida mediante un análisis estructural en Ansys Workbench, como se muestra en la Fig. 4.1. con este análisis se obtuvo la deformación de las diferentes profundidades de grieta de los ensayos con los que se hizo este trabajo.

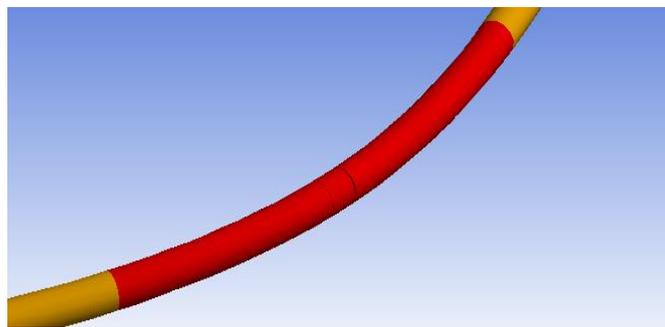


Fig. 4.1 Análisis de elemento finito

Se implemento a la simulación un análisis de contacto, en este método se particiono el eje dibujándolo en SolidWorks Fig. 4.2, con esto se simula que el eje esta fisurado, después con la condición bonded se corrobora que cada una de las piezas del eje no tengan deslizamiento y en la parte donde se representa la fisura se ocupa la condición friccionalless Fig. 4.3, con este método se obtuvieron buenos resultados para obtener una ecuación que me arroje la rigidez a diferentes profundidades de grieta y poder incorporar la ecuación a el programa en Matlab.



Fig. 4.2 Dibujo en SolidWorks de partición de eje

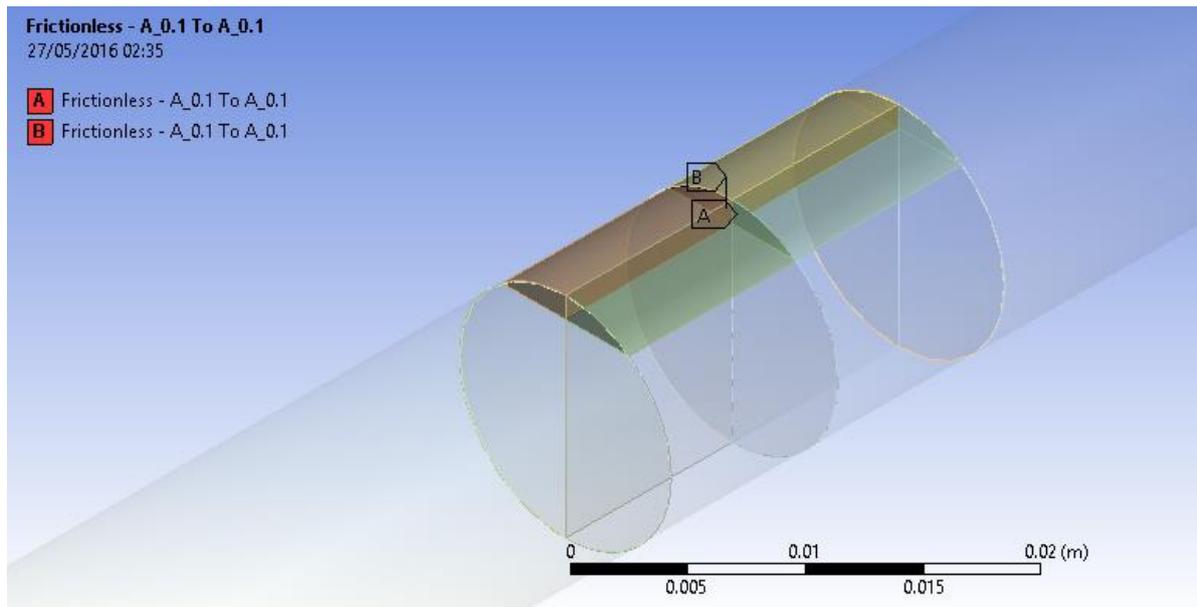


Fig. 4.3 Simulación de contacto

Fue posible cuantificar de la rigidez que sufre un eje cuando se aplica una fuerza perpendicular y paralela al frente de la fisura de 100 Newton para obtener la deformación, con la formula $K = F / \delta$ se obtuvieron dos tablas las cuales nos sirvieron para obtener el polinomio de rigidez como se muestra en las siguientes tablas (Tabla 4.1 y Tabla 4.1 Tabla de rigidez vertical Tabla 4.2). Se muestra la tendencia de la rigidez del eje fisurado conforme se aumenta el tamaño de la fisura como se muestra en la Fig. 4.4. con la misma fuerza aplicada en cada ensayo.

Tabla 4.1 Tabla de rigidez vertical

| RIGIDEZ VERTICAL | | | |
|------------------|------------|-----------------|---------------|
| A/D | FUERZA [N] | DEFORMACIÓN [m] | RIGIDEZ [N/m] |
| 0 | 100 | 0.0026507 | 37,725.88 |
| 0.1 | 100 | 0.0027372 | 36,533.68 |
| 0.2 | 100 | 0.0027931 | 35,802.51 |
| 0.3 | 100 | 0.0028927 | 34,569.78 |
| 0.4 | 100 | 0.0030343 | 32,956.53 |
| 0.5 | 100 | 0.0033094 | 30,216.96 |

Tabla 4.2 Tabla de rigidez horizontal

| RIGIDEZ HORIZONTAL | | | |
|--------------------|------------|-----------------|---------------|
| A/D | FUERZA [N] | DEFORMACIÓN [m] | RIGIDEZ [N/m] |
| 0 | 100 | 0.0026482 | 37,761.50 |
| 0.1 | 100 | 0.002718 | 36,791.76 |
| 0.2 | 100 | 0.0027199 | 36,766.06 |
| 0.3 | 100 | 0.0027318 | 36,605.90 |
| 0.4 | 100 | 0.0027537 | 36,314.78 |
| 0.5 | 100 | 0.0027975 | 35,746.20 |

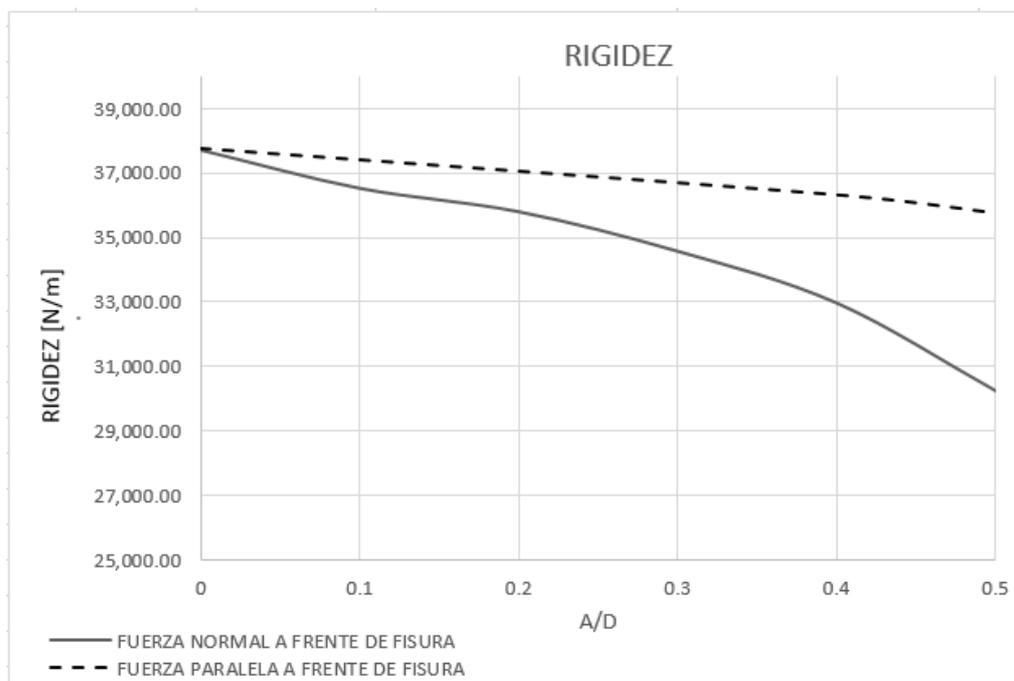


Fig. 4.4 Respuesta de la rigidez de eje fisurado con una fuerza perpendicular y normal al frente de la fisura.

Con los datos obtenidos se obtienen dos polinomios de grado 5 los cuales incorporamos en el modelo matemático como ecuaciones de rigidez como se muestra en las ecuaciones (14) y (15) dichas ecuaciones entregan el comportamiento de rigidez perpendicular y normal al frente de la fisura.

$$k_{\eta} = -1026627.2 * A_D^5 + 1477453.1 * A_D^4 - 809564.13 * A_D^3 + 202048.86 * A_D^2 - 23181.432 * A_D + 37761.498 \quad (14)$$

$$k_{\xi} = -1625416.5 * A_D^5 + 2076933.7 * A_D^4 - 1000238.2 * A_D^3 + 202118.79 * A_D^2 - 24045.886 * A_D + 37725.884 \quad (15)$$

4.2 Simulaciones Numéricas

En este Capítulo es realizada una sucesión de simulaciones numéricas de múltiples configuraciones del sistema y se distingue fácilmente la influencia de profundidad de grieta. Afectan drásticamente la respuesta de sistema haciendo la detección de grieta muy difícil. Sin embargo, la existencia de resonancias locales en diversos sub-armónicos o súper-armónicos racionales o combinaciones de estos, permite una buena caracterización de los patrones o firmas de vibración reduciendo la influencia de la interacción entre vectores desconocidos; como es el caso de las magnitudes y orientaciones del desbalance residual y fisura del eje. El modelo de Gómez-Mancilla [12], tiene las ventajas de los sistemas lineales, sin embargo, el enfoque de este trabajo se basa en estudio de las ecuaciones características que gobiernan el comportamiento no lineal del sistema .

A lo largo de este Capítulo se analizan y discuten los resultados simulados numéricamente que tienen como objetivo la detección de grietas y la caracterización de los sistemas agrietados. Estos resultados son obtenidos mediante un programa escrito por el autor en MATLAB (Apéndice A) basado en las ecuaciones del sistema ecuaciones previamente presentadas. Este programa permite obtener; diagramas orbitales, diagramas de Bode, gráficos de la respuesta en el tiempo. Los valores paramétricos normalizados usados en las simulaciones se encuentran comúnmente en la práctica; solamente se muestran y se discuten los resultados más significativos.

El modelo de respiro de grieta para las diferentes profundidades de fisura fue seleccionado de acuerdo a los antecedentes ampliamente divulgados en la literatura que sugieren que el modelo

de respiro de forma cuadrada propuesto por Gasch [13] es más conveniente para grietas poco profundas y por otro lado el modelo cosenoidal atribuido a Mayes y Davies [14] es apropiado para grietas profundas. Partiendo de este hecho se seleccionó el modelo de Chen para obtener las respuestas del sistema con profundidad de grieta de 10 % a 50% y el modelo de Mayes y Davies para profundidades idénticas para hacer la comparación de los modelos de fisura lineal con el no lineal.

Finalmente, la elección del modelo de respiro nos muestra que es importante en la dinámica de los sistemas rotores agrietados. Para ello en este Capítulo es demostrado, se presentan figuras donde puede observarse como las características de vibración en las resonancias locales son afectadas por la selección del modelo de respiro, en particular aquellas que ocurren a resonancias locales bajas; es decir, a valores de velocidad de operación pequeños comparados con la velocidad crítica flexionante. También las amplitudes y las formas de las orbitas cambian debido a las variaciones de fisura y el cambio de velocidad. En cambio, alrededor de la velocidad crítica flexionante, ambos modelos exhiben grandes amplitudes y no son parecidas en su valor de amplitud.

4.3 Experimentos en el rotor fisurado

En este capítulo se describe la configuración de la instalación técnica utilizada para realizar los diferentes experimentos que hagan validos los resultados obtenidos mediante el análisis numérico analítico. Primeramente, se refiere las características del rotor, se detalla el sistema de adquisición de datos y el filtrado realizado a las señales obtenidas, además se presenta la relación de cada uno de los experimentos que se llevaron a cabo su duración y la fecha y hora de su organización. Al finalizar este capítulo se describen las principales conclusiones y la cercanía con que las predicciones numérico-analíticas representan al rotor experimental.

4.3.1 Configuración del rotor.

La Fig. 4.5 muestra la configuración del rotor experimental. El rotor se encuentra montado sobre dos soportes rígidos, es decir sobre dos baleros de bolas, lo anterior es necesario para disminuir la presencia de amortiguamiento en el sistema. Como se discutirán capítulos anteriores entre mayor cantidad de amortiguamiento menor es la tendencia a la inestabilidad del sistema.

La energía de entrada sistema la provee un motor controlado electrónicamente de la marca Spectra Quest que tiene un rango de operación hasta de 10000 r.p.m. Asimismo se utilizan sensores marca Bently de General Electric, mientras que para la adquisición de las señales se utiliza simultáneamente dos plataformas diferentes, el primero de ellos es el equipo ADRE de General Electric y el equipo Compact RIO de National Instruments.

En cada uno de los experimentos realizados se hizo una doble adquisición de datos, una para cada sistema. Lo anterior fue necesario para poder tener una manipulación completa de los datos obtenidos, debido a que mientras el equipo ADRE permite hacer un procesamiento de la señal altamente especializado impide tener acceso completo a la señal en el tiempo. Por el contrario, el equipo de Nacional Instruments permite tener un acceso completo esta señal.

Es de fundamental importancia poder acceder completamente la señal en el tiempo para poder aplicar las diferentes técnicas no lineales utilizadas en este trabajo para poder evaluar el cambio de la respuesta dinámica del rotor al variar la profundidad de la grieta y el ángulo beta. Adicionalmente esta doble adquisición permite contar con las herramientas de análisis disponibles en la plataforma ADRE.

El rotor cuenta con un mecanismo que permite reproducir y controlar la apertura la apertura de la fisura, y también permite modificar a voluntad el valor del ángulo entre el desbalance y el frente de la grieta. Este mecanismo se describe con detalle en la siguiente sección.



Fig. 4.5 Configuración del rotor experimental instrumentado para medir la respuesta dinámica con la presencia de una fisura transversal a la mitad del claro entre los soportes

En la Fig. 4.6 se presentan un esquema donde se señala con claridad cada uno de los elementos que componen el rotor experimental, incluidos cada uno de los componentes que lo integran.

Se muestra la posición de cada uno de los aparatos que integran el dispositivo experimental tales como el motor eléctrico, los soportes del rotor, y el dispositivo para reproducir la fisura en el rotor.

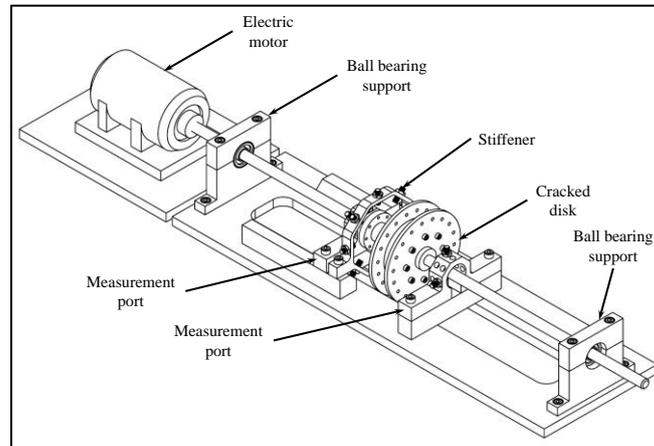


Fig. 4.6 Representación esquemática del rotor experimental. En la imagen se muestra la posición del motor eléctrico, de los soportes del eje, los soportes de medición y del mecanismo para reproducir la fisura en el eje

4.3.2 Mecanismo para la reproducción de una grieta controlada

En este trabajo se ha implementado un mecanismo que permite reproducir una grieta, es decir una fisura transversal sobre la superficie del rotor. Este dispositivo no sólo permite controlar la profundidad de la grieta, sino que también permiten modificar la posición angular entre el desbalance y el frente de la fisura.

En la Fig. 4.7 se presentan un par de fotografías con el detalle de este mecanismo. Dicho mecanismo consta de un par de bridas unidas por doce tornillos cuidadosamente colocados en la periferia del disco. En estas imágenes puede observarse la ubicación de los tornillos de fijación, así como los barrenos roscados para colocar los pesos que permiten modificar el desbalance del sistema. En esta fotografía también se observan la ubicación de los puertos de medición donde se colocan los sensores de proximidad.

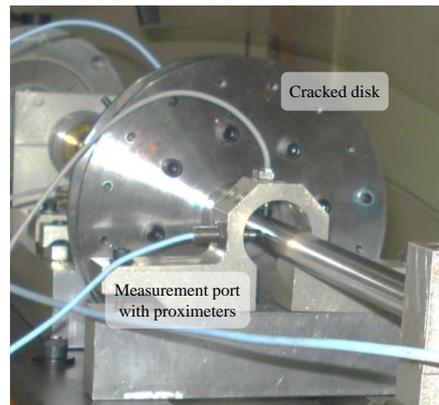


Fig. 4.7 En estas imágenes se muestran detalles del disco central en el rotor que permite simular la presencia de una fisura transversal de diferentes profundidades, de la misma manera que permite cambiar la posición angular del desbalance con respecto al frente

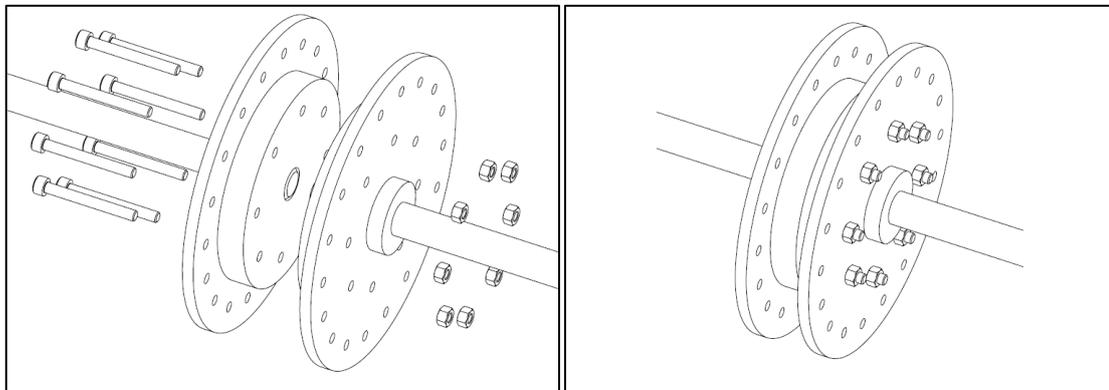


Fig. 4.8 Configuración del mecanismo para la reproducción de la grieta sobre el rotor experimental. La distribución y el apriete de cada uno de los tornillos determina la forma y la profundidad de la grieta

Se utilizaron doce tornillos en la brida que permite reproducir la grieta en la Fig. 4.8 se muestra con detalle la configuración de la junta atornillada. Es importante mencionar que la distribución óptima de los tornillos se consiga partir de un análisis de contacto que la vida. Este análisis se realizó con análisis de elemento finito permitieron conocer la apertura de la grieta dependiendo del número y la disposición de los tornillos que era necesario aflojar para conseguir una apertura determinada. Es importante mencionar que la configuración actual no sólo permite cierta apertura de la fisura, sino que también permite que el respiro pueda desarrollarse tal como ocurre en una fisura.

4.3.3 Adquisición de datos

Muchas aplicaciones requieren de medición del comportamiento de sistemas mecánicos, tales como temperatura y vibración. El uso de diferentes tipos de sensores requiere de un acondicionamiento de la señal antes de que el dispositivo de adquisición de datos pueda hacer

una medición de la señal de manera efectiva y precisa. Dicho condicionamiento de la señal incluye a la amplificación.

La amplificación incrementa el nivel de voltaje de tal manera que el convertidor analógico-digital pueda realizar un mejor trabajo, de tal forma que se incremente la resolución y sensibilidad de la medición. Adicionalmente se pueden utilizar acondicionadores de señal externos ubicados cerca de la fuente de la señal para mejorar la relación que existe entre la señal y el ruido, lo que hacen es amplificar el nivel de voltaje antes de que se vea afectado por el ruido del ambiente. El aislamiento es otro acondicionamiento que debe considerarse para tener una mejor medición. Esta característica permite transmitir la señal desde la fuente hasta el dispositivo de medición de tal forma que protege a los operadores y el equipo de medición.

El filtrado, por otra parte, rechaza ruido no deseado dentro de un rango de frecuencias específico. Algunas ocasiones un filtro de pasa bajos se utiliza para prevenir el aliasing de señales de alta frecuencia. Lo anterior se consigue utilizando un filtro que atenúe las señales con frecuencia por arriba de la frecuencia de Nyquist. La excitación se requiere para varios tipos de productores. Por ejemplo, galgas extensiométricas, acelerómetros y proximómetros requieren de un voltaje externo o una corriente de excitación.

El esquema de adquisición de datos y acondicionamiento de la señal se presente en la Fig. 4.9, aquí se muestra las conexiones realizadas y cada uno de los diferentes dispositivos utilizados para la obtención y la correcta medición de la dinámica del rotor. Es importante mencionar que este sistema de adquisición de datos permite controlar la velocidad y aceleración del rotor.

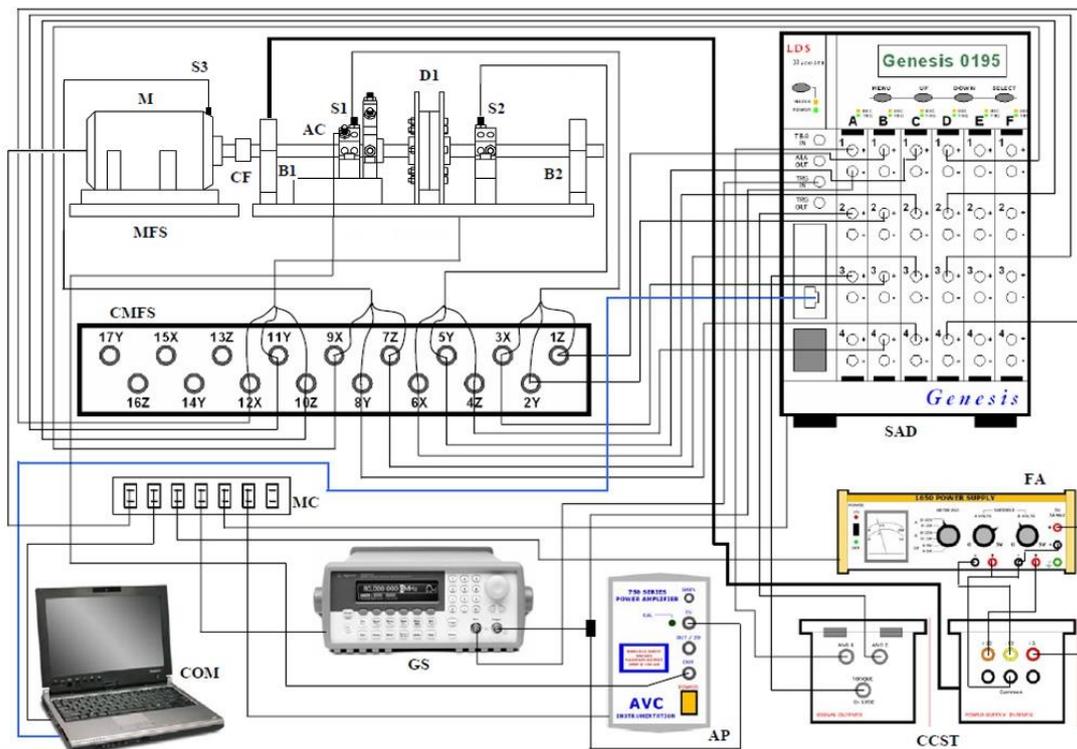


Fig. 4.9 El ama de bloques del sistema de adquisición de datos para medir la dinámica del rotor.

Tal como se enfatizado con anterioridad resulta fundamental el asegurar la correcta medición de la dinámica. Lo anterior es debido a que la naturaleza no lineal del sistema exige de una precisa medición para poder captar o diferenciar cada uno de los diferentes fenómenos que se presentan o que son originados por la fisura.

4.3.4 Desarrollo de los experimentos

Con la finalidad de realizar una comparación inicial entre el rotor experimental y el modelo matemático presentado en el capítulo cinco, se procede a realizar una comparación de la respuesta dinámica experimental y numérica. En la Fig. 4.10 se presenta una comparación de las amplitudes de vibración obtenidas numéricamente y experimentalmente, lo anterior con la finalidad de establecer un punto de partida para las comparaciones y el análisis que se realizará con el rotor fisurado. Como puede apreciarse la figura que existe una correlación completa entre los resultados, en la parte superior de la figura se presente el diagrama de bode obtenido experimentalmente; mientras que la parte inferior se muestran los resultados obtenidos numéricamente, a partir de la solución del modelo matemático.

Hay que destacar que una de las características innovadoras del modelo matemático que es la consideración de la ortotropía en los soportes, esta condición genera que aparezcan dos picos

de amplitud en la frecuencia crítica. Uno de estos picos de amplitud corresponde a la rigidez horizontal del soporte mientras que el otro corresponde a la rigidez vertical del mismo.

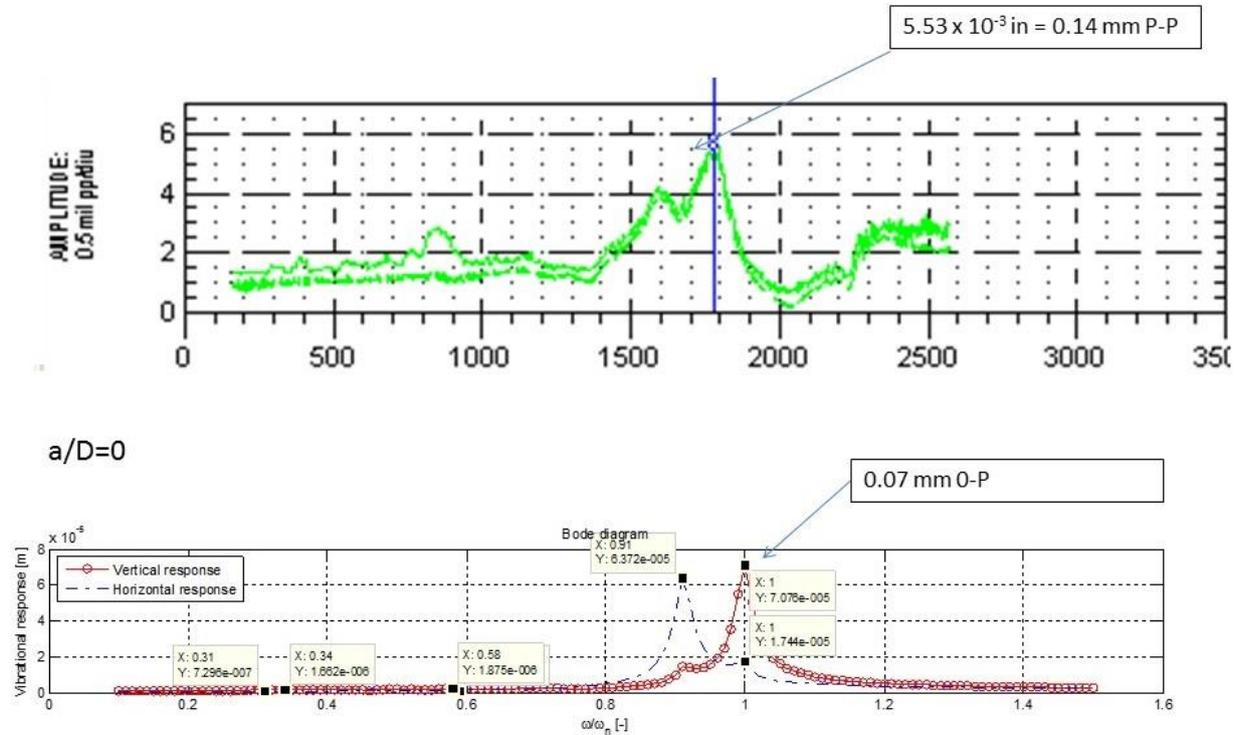


Fig. 4.10 Comparación entre la respuesta numérica y experimental de un rotor íntegro. Se presenta la comparación mediante las amplitudes registradas en un Diagrama de Bode

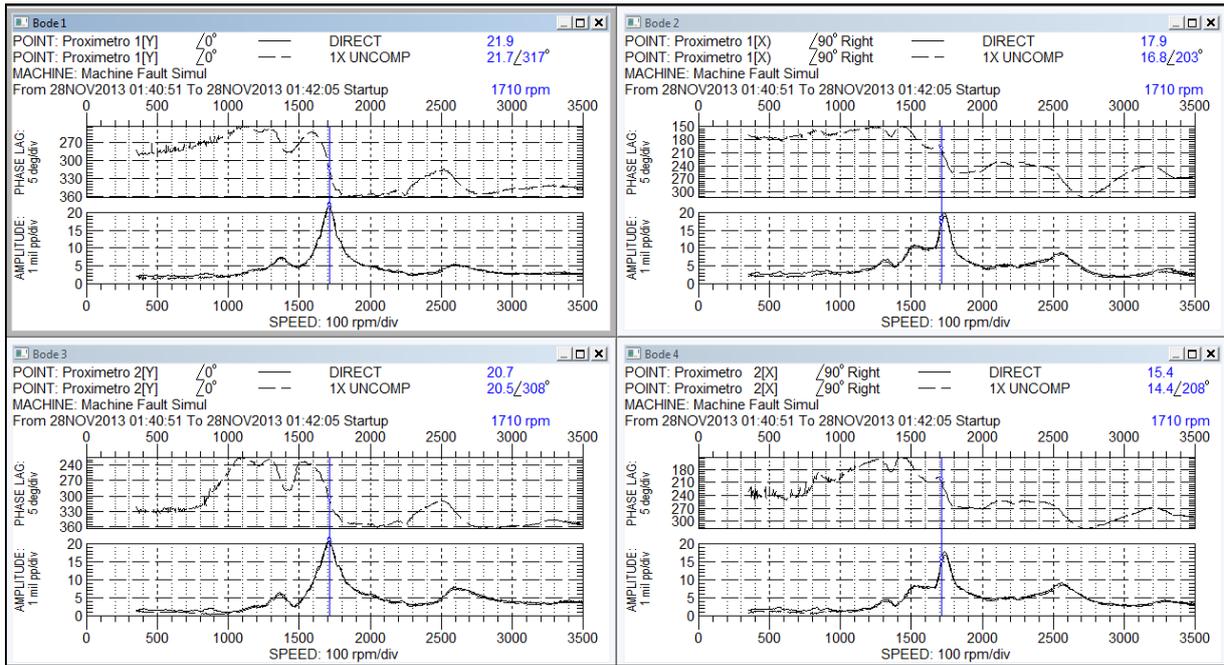


Fig. 4.11 Diagrama de bode del rotor con tres tornillos sueltos y $\beta = 0^\circ$.

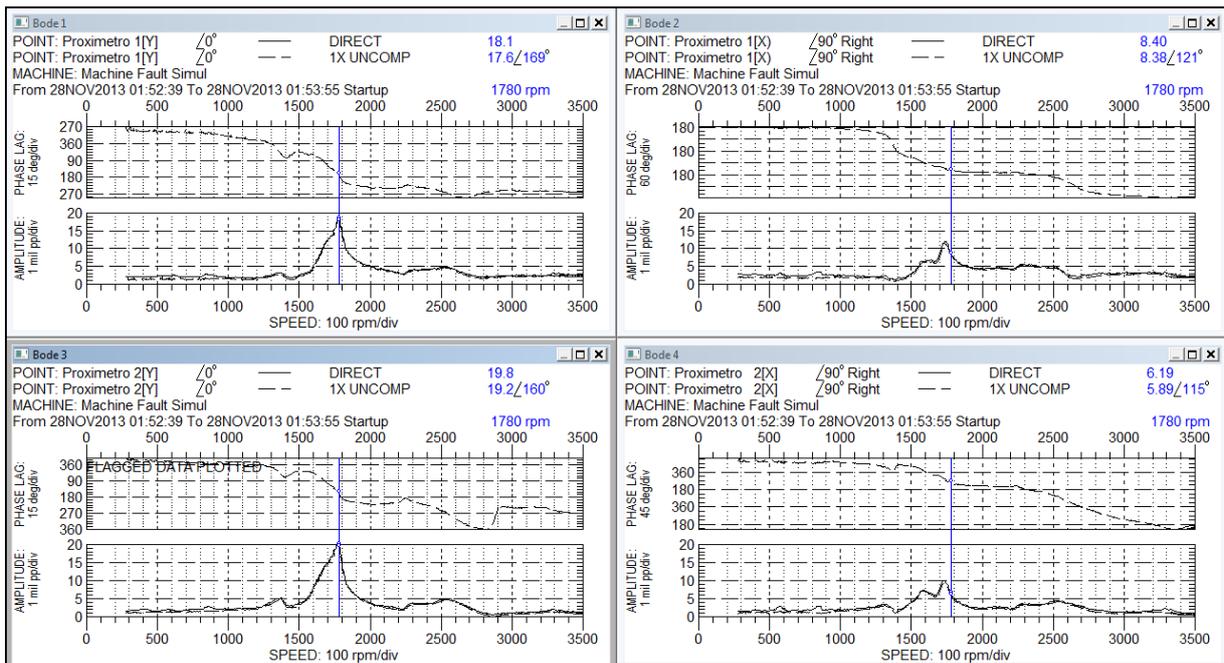


Fig. 4.12 Diagrama de bode para el rotor con tres tornillos sueltos y $\beta = 180^\circ$.

Mediante la representación del diagrama de bode mostrado en la Fig. 4.11 y Fig. 4.12 se observa la manera en cómo cambia la respuesta dinámica del rotor, tanto en amplitud como en la frecuencia en la que ocurre el pico de amplitud.

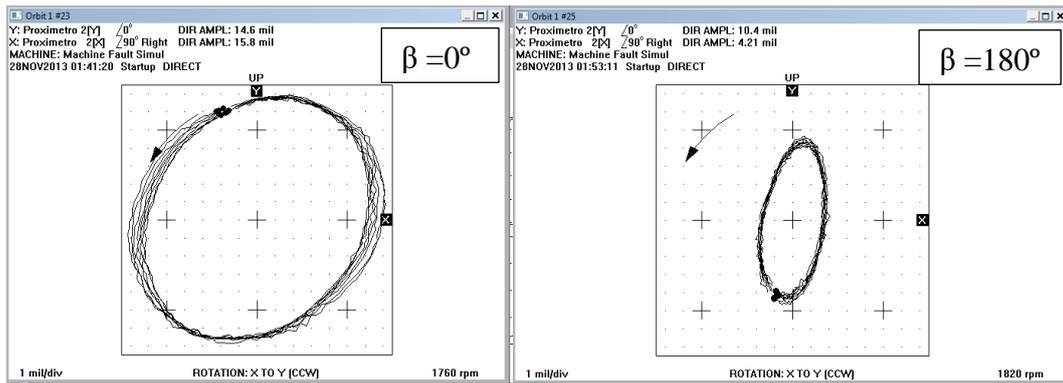


Fig. 4.13 Órbitas obtenidas a velocidades de resonancia para ambos casos, $\beta = 0^\circ$ and 180° . Se puede observar la diferencia en la amplitud y en el espesor orbital

Cabe recordar que el exponente de Lyapunov es una medida de entropía del sistema, lo anterior se ve reflejado en el espesor de la órbita. A mayor espesor orbital mayor entropía del sistema, en la Fig. 4.13 se puede apreciar que para un valor de beta igual a cero grados tanto la amplitud como el espesor orbital tienen mayor valor; un lo anterior implica por lo tanto un exponente de Lyapunov mayor para cero grados que para 180° .

4.4 Firma vibracional

A continuación, se presentan las firmas vibracionales del rotor a diferentes configuraciones de velocidad y profundidad de grieta para observar el cambio en la amplitud del eje. Con conocimientos básicos sobre las vibraciones y sus causas, y un correcto equipo de diagnóstico, un profesional de mantenimiento podrá determinar de forma rápida y precisa las causas y la gravedad de la mayoría de las vibraciones presentadas. A demás, le indicará recomendaciones para repararlas.

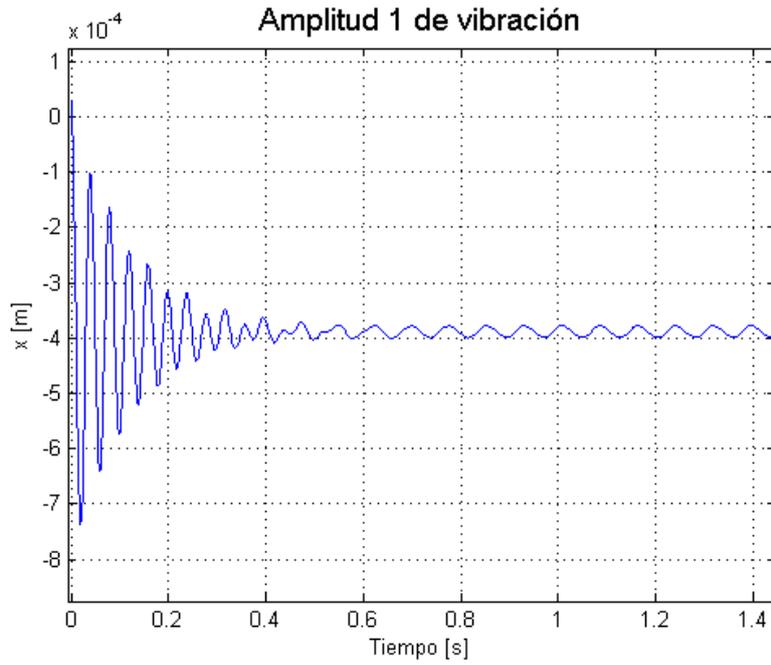


Fig. 4.14 Firma vibracional, configuración $\beta=0^\circ$, $\Omega=0$, $\omega=1.5\omega_n$.

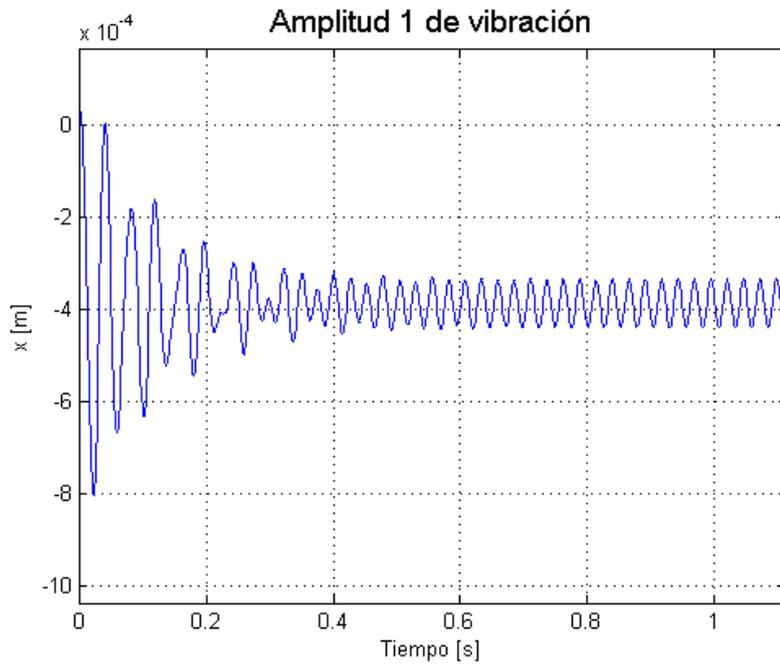


Fig. 4.15 Firma vibracional configuración $\beta=0^\circ$, $\Omega=0$, $\omega=1.5\omega_n$.

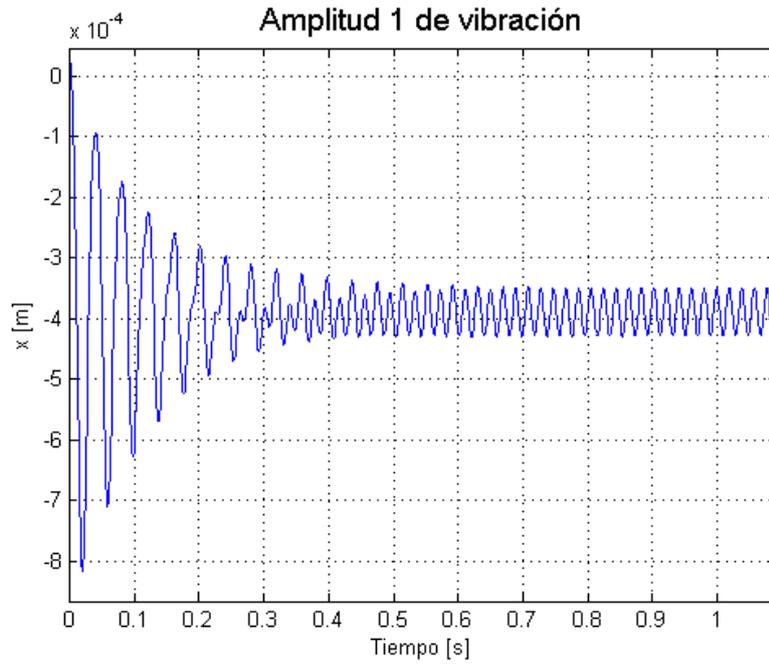


Fig. 4.16 Firma vibracional configuración $\beta=0^\circ$, $\Omega=0.1$, $\omega=2\omega_n$.

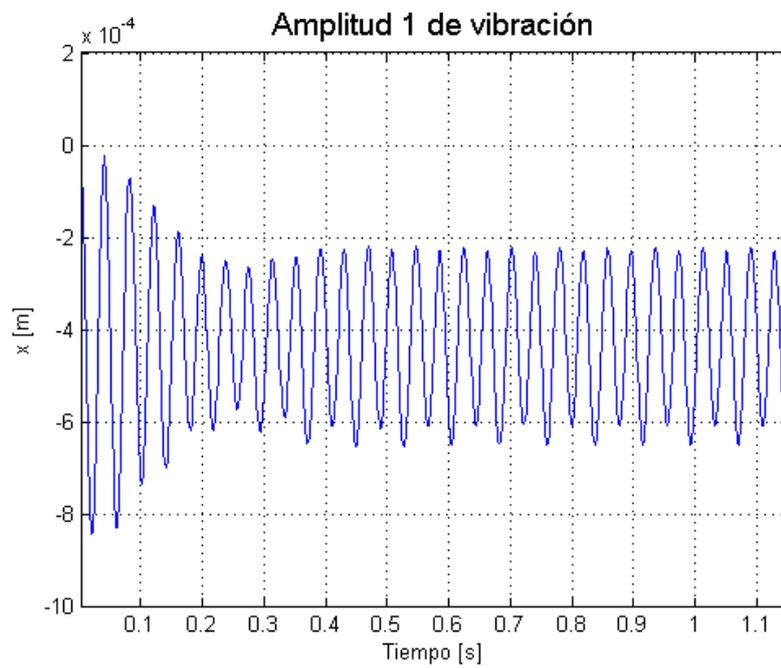


Fig. 4.17 Firma vibracional configuración $\beta=0^\circ$, $\Omega=0.5$, $\omega=0.5\omega_n$.

4.5 Evolución orbital

Sin duda, la garantía de disponibilidad exigida por las máquinas críticas presupone el empleo de técnicas de diagnóstico y tecnologías predictivas que garanticen tales propósitos. Los turbogeneradores resultan uno de los mejores ejemplos de este tipo de máquinas, justificándose en estos la instalación de sistemas de monitoreo, aunque muy costosos, son amortizados en un tiempo relativamente breve, dado el incremento drástico de la disponibilidad de las máquinas donde funcionen correcta y eficazmente.

Múltiples son los atributos positivos que caracterizan a los sistemas para el monitoreo y análisis de vibraciones en la maquinaria industrial. Sin embargo, en muchas ocasiones estos sacrifican su capacidad de análisis en el afán de resumir los resultados de las mediciones, con el ánimo de facilitar al especialista a su experiencia el chequeo de la evolución de los niveles de vibraciones en la máquina objeto de seguimiento. Por lo tanto, la continuidad en la producción, la preservación del capital invertido, la protección del medio ambiente y la reducción de los costos de operación, solo pueden ser garantizadas a través de un sistema de mantenimiento eficiente que permita la predicción del fallo y la planificación correcta de las actividades de mantenimiento y reparación.

Diversas son las formas en que pueden ser representadas las señales provenientes de los transductores de proximidad, incluyendo los formatos de Ploteo Polar y de Bode. Sin embargo, la correcta interpretación de la órbita del rotor contribuye de manera decisiva a entender el comportamiento dinámico del rotor, ya sea durante su estado transitorio o estacionario. Al emplear transductores de proximidad, como por ejemplo los transductores de corrientes, estos entregan señales eléctricas proporcionales al movimiento mecánico del rotor, en las cuales se distinguen dos componentes:

- Una componente directa, proporcional a la posición promedio del centro del rotor, con respecto a la posición del transductor.
- Una componente alterna, proporcional al movimiento oscilatorio relativo del rotor con respecto al transductor.

Los transductores de proximidad encuentran su mejor aplicación en máquinas con cojinetes de deslizamiento bajo lubricación líquida, tal es el caso de turbinas, compresores y algunos tipos de bombas. El sistema de medición más modesto que pueda ser empleado en este tipo de máquinas, deberá incluir dos transductores de proximidad ubicados ortogonalmente en cada uno de los cojinetes del rotor. Si además de esto se incluye un transductor de referencia, podrá incrementarse de manera significativa el alcance de la actividad de diagnóstico. Es interés del presente trabajo, la componente alterna a que se hizo referencia anteriormente, por constituir esta la base del Ploteo Orbital. Esta componente alterna proveniente del transductor de proximidad, es básicamente una señal periódica, pudiendo ser registrada en cada uno de los dos transductores instalados en cada cojinete. Claro está, aprovechando el transductor de referencia instalado, es posible filtrar la onda temporal, por ejemplo, a la frecuencia de rotación.

Ahora bien, la órbita del rotor podrá construirse, si se tiene en cuenta que se dispone de los registros temporales aportados por los dos transductores instalados en posiciones mutuamente ortogonales. Las señales provenientes de cada transductor son generadas de acuerdo con posiciones angulares específicas del rotor, todo lo cual permite cuantificar el movimiento transversal del rotor en el plano de ubicación de los transductores de proximidad. En otras palabras, la órbita se genera ploteando los pares de valores instantáneos $x(t)$, $y(t)$ o lo que es lo mismo, ploteando X vs. Y eliminando el eje de tiempo. De inestimable valor teórico-práctico resulta el poder disponer de las orbitas en las chumaceras ya que, conociendo la orientación de la órbita en cada cojinete, es posible determinar la configuración que adquiere el rotor vibrando a esta frecuencia. Realmente, la experiencia ha demostrado que los rotores de turbinas, dada su característica de flexibilidad dinámica pueden alcanzar las más disímiles formas de deflexión en operación razón por la cual resulta insuficiente la instalación de transductores de proximidad en posiciones alternas. Para ilustrar la sensibilidad de la órbita a los cambios debidos a la grieta son presentadas orbitas simuladas alrededor de $1/2$ de la resonancia haciendo uso del modelo anterior para los valores de orientación entre grieta y desbalance más representativos ($\beta = 0^\circ$) y el caso de los parámetros de la configuración con profundidad de grietas del 10% al 50%.

4.6 Configuración a diferentes profundidades de grieta

La figura siguiente exponen las formas orbitales, con una configuración de $\omega/\omega_n = 0.1$, $\beta = 0^\circ$, profundidad de grieta en 10%, las formas orbitales que trazarían 2 sensores colocados en las chumaceras: uno de ellos detectando las amplitudes de vibración en la dirección horizontal (X) y el otro en la dirección vertical (Y).

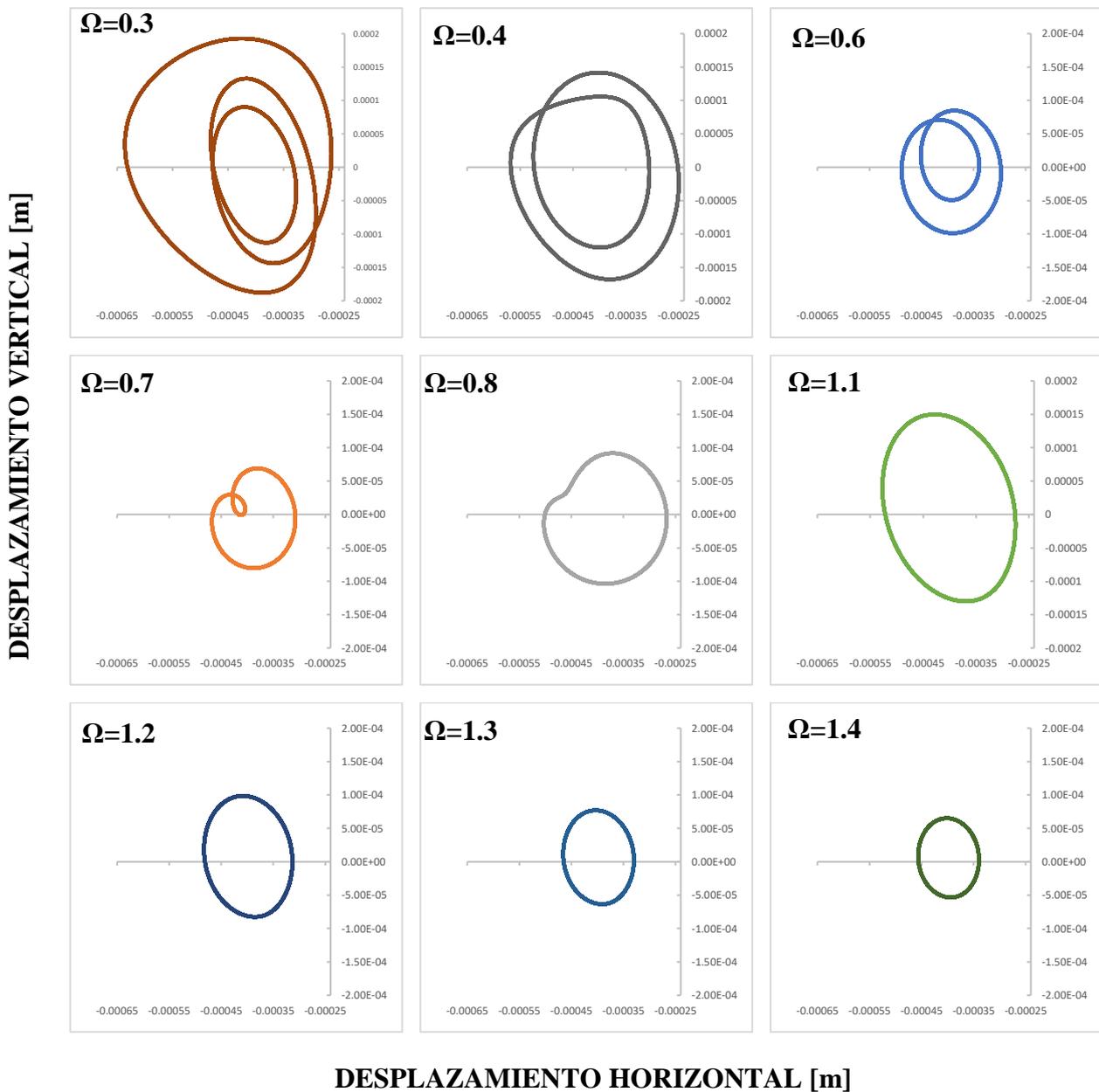


Fig. 4.18 Evolución de las orbitas del eje fisurado con una profundidad 10%, Orientación entre grieta y desbalance $\beta = 0^\circ$.

Configuración de $\omega/\omega_n = 0.2$, $\beta = 0^\circ$, profundidad de grieta en 20%, las formas orbitales que trazarían 2 sensores colocados en las chumaceras: uno de ellos detectando las amplitudes de vibración en la dirección horizontal (X) y el otro en la dirección vertical (Y).

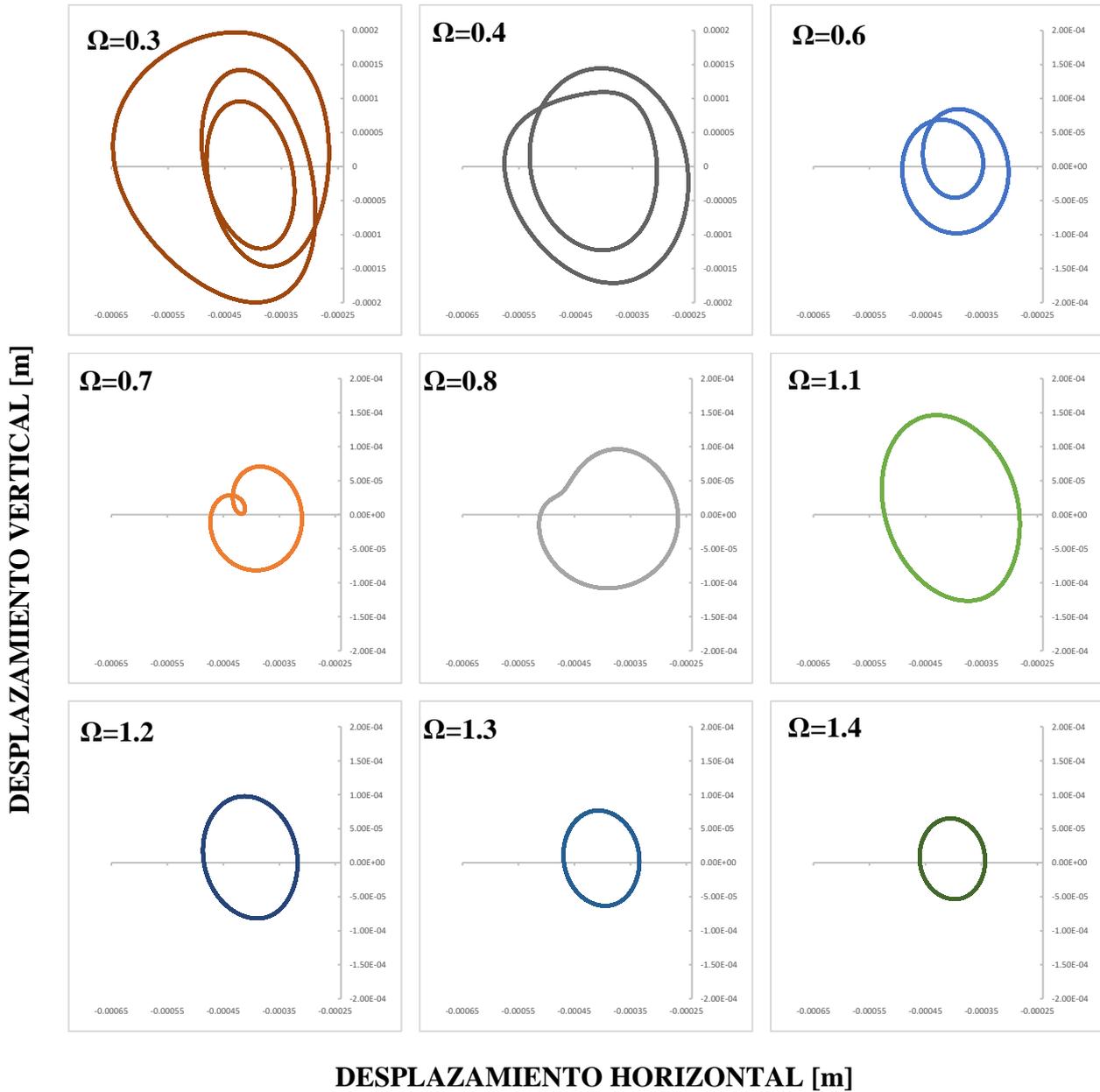


Fig. 4.19 Evolución de las orbitas del eje fisurado con una profundidad 20%, Orientación entre grieta y desbalance $\beta = 0^\circ$

Configuración de $\omega/\omega_n = 0.3$, $\beta = 0^\circ$, profundidad de grieta en 30%, las formas orbitales que trazarían 2 sensores colocados en las chumaceras: uno de ellos detectando las amplitudes de vibración en la dirección horizontal (X) y el otro en la dirección vertical (Y).

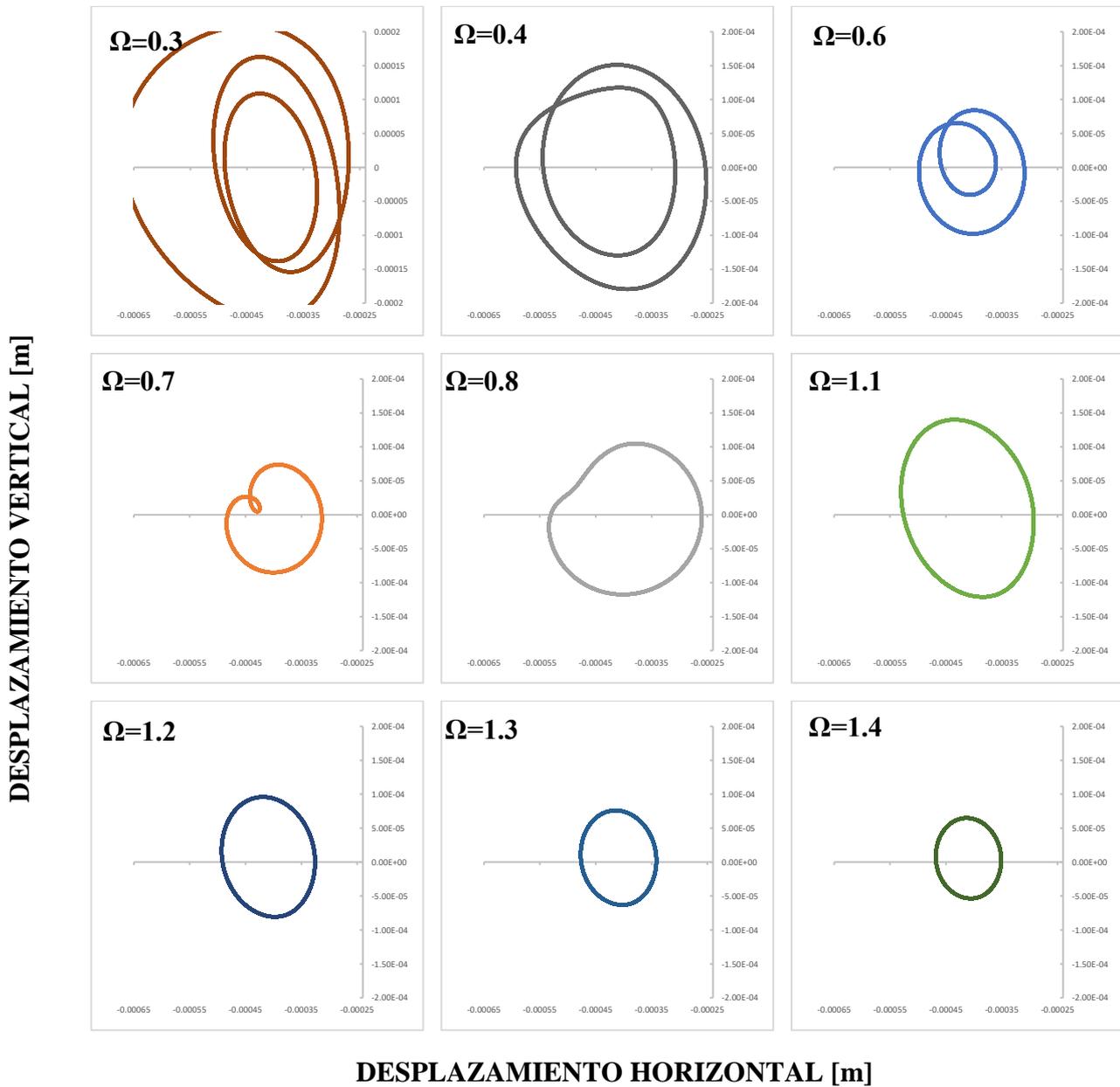


Fig. 4.20 Evolución de las orbitas del eje fisurado con una profundidad 30%, Orientación entre grieta y desbalance $\beta = 0^\circ$

Configuración de $\omega/\omega_n = 0.4$, $\beta = 0^\circ$, profundidad de grieta en 40%, las formas orbitales que trazarían 2 sensores colocados en las chumaceras: uno de ellos detectando las amplitudes de vibración en la dirección horizontal (X) y el otro en la dirección vertical (Y).

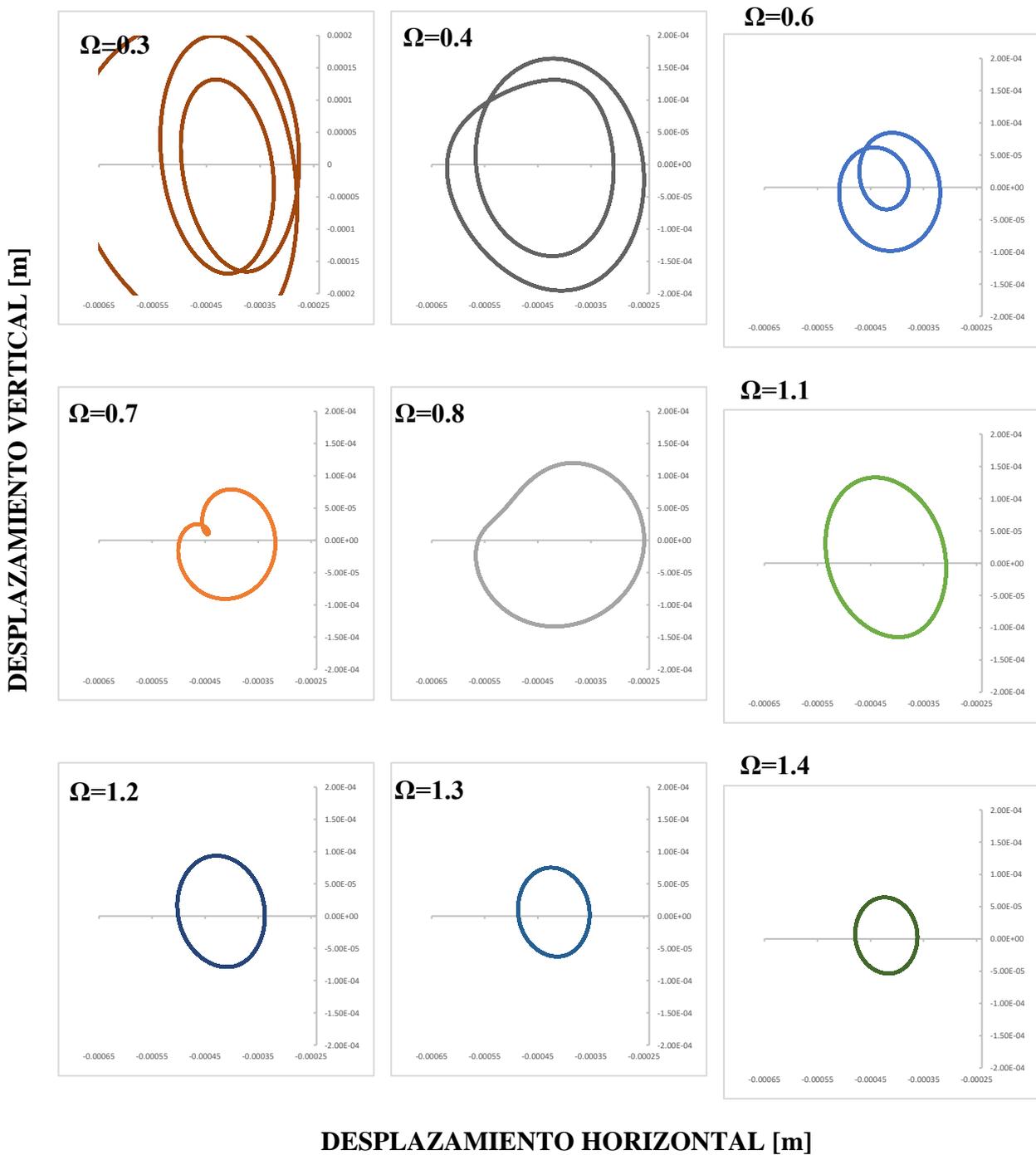


Fig. 4.21 Evolución de las orbitas del eje fisurado con una profundidad 40%, Orientación entre grieta y desbalance $\beta = 0^\circ$

Configuración de $\omega/\omega_n = 0.5$, $\beta = 0^\circ$, profundidad de grieta en 50%, las formas orbitales que trazarían 2 sensores colocados en las chumaceras: uno de ellos detectando las amplitudes de vibración en la dirección horizontal (X) y el otro en la dirección vertical (Y).

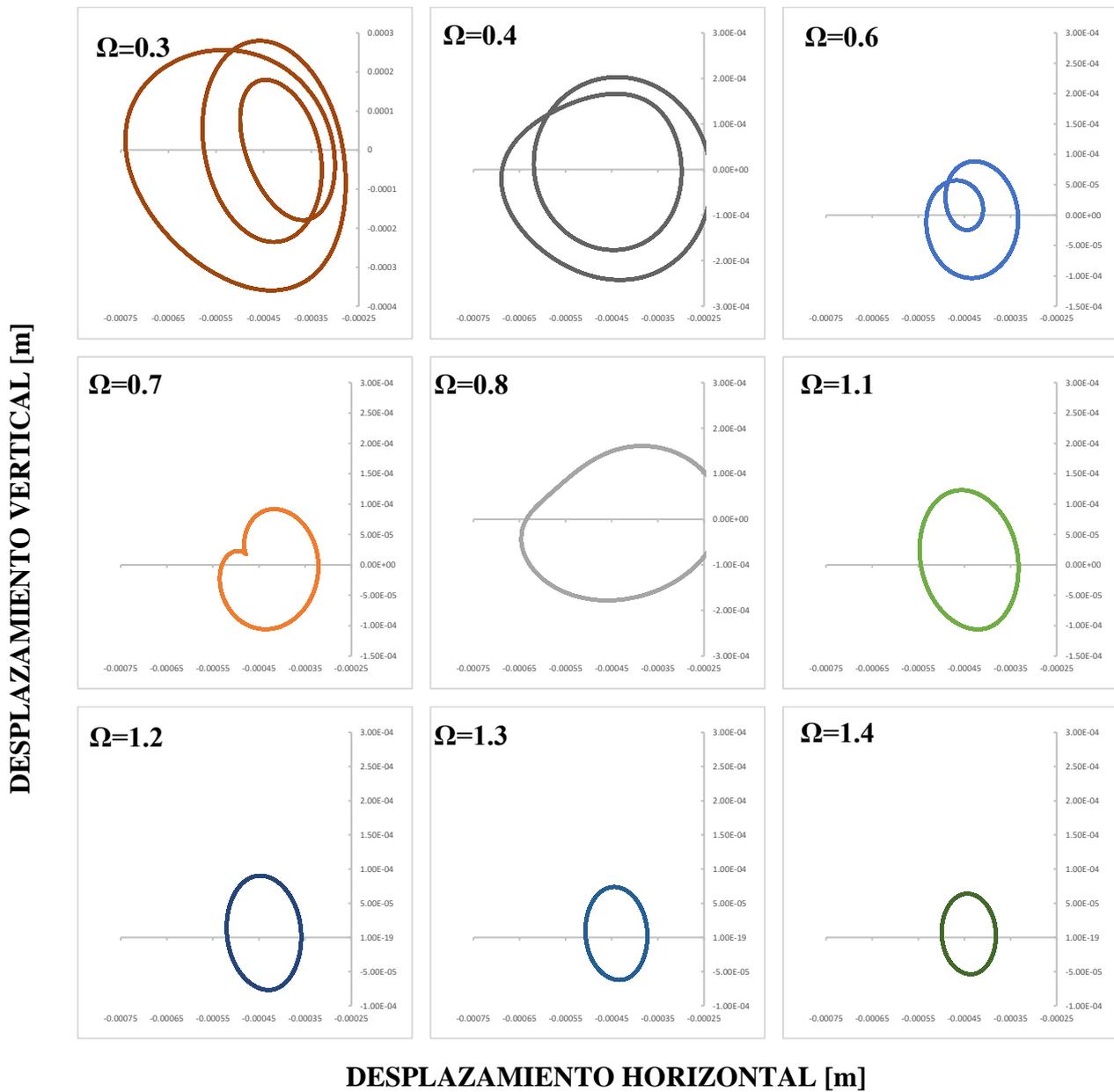


Fig. 4.22 Evolución de las orbitas del eje fisurado con una profundidad 50%, Orientación entre grieta y desbalance $\beta = 0^\circ$

4.7 Análisis de los diagramas de bode

En las siguientes graficas se estudia la respuesta vibratoria contra velocidad de operación (arranque o paro de la máquina) a esperar ante diferentes profundidades de grieta cuando la importante orientación angular relativa existente entre el vector desbalance del disco y el eje de la dirección de la grieta es variada y calculada para las diferentes direcciones ortogonales. La configuración de rotor propuesto es estudiada con el fin de caracterizar los patrones de vibración de rotores agrietados.

Según lo visto, la grieta y el desbalance residual (siendo ambos vectores desconocidos) pueden ocultar la presencia de la grieta y hacer difícil el uso de técnicas tradicionales de detección. Sin embargo, la existencia de resonancias locales en diversos subarmónicos o súper-armónicos racionales o combinaciones de estos, permite una buena caracterización de los patrones de vibración reduciendo la influencia de la interacción entre vectores desconocidos; por ejemplo, magnitudes y orientaciones del desbalance residual y fisura del eje. Para la detección de grieta los resultados indican que en vez de los componentes X y Y.[15]

Puesto que la mayoría de las máquinas tienen solamente medidores de vibración en los soportes de los cojinetes, los diagramas de Bode incluyen las respuestas en la localización de la chumacera en donde el patrón de vibración exhibe amplitudes de resonancias locales de magnitud similar.

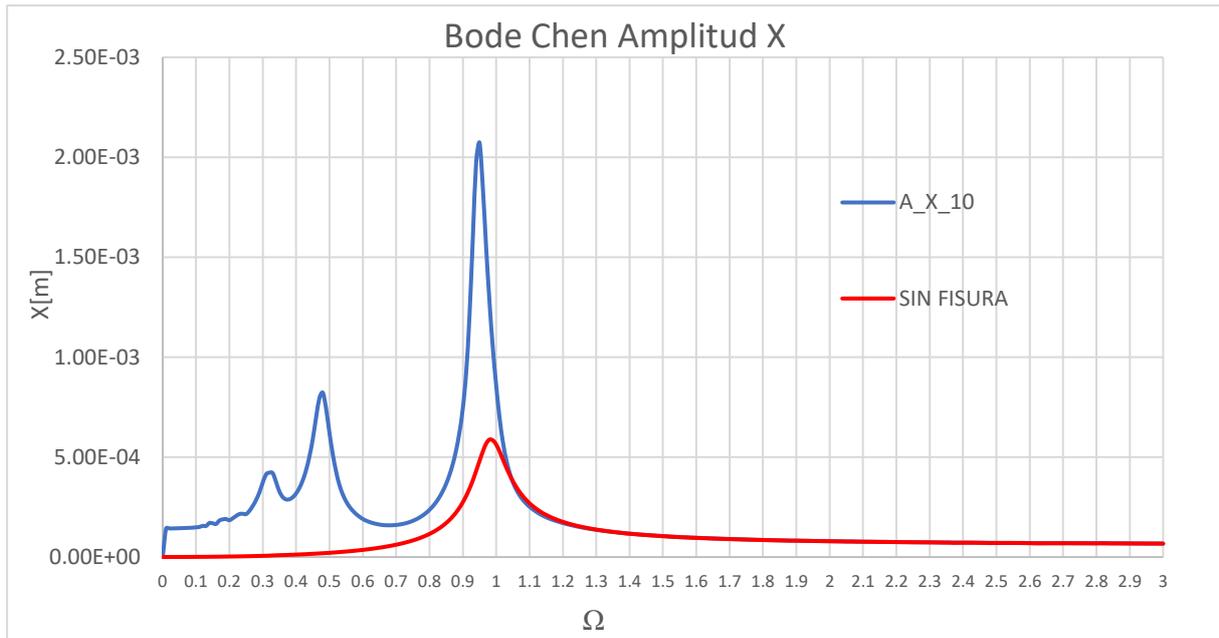


Fig. 4.23 Comparación entre eje sin fisura y respuestas horizontal del eje con profundidad de grieta 10 %

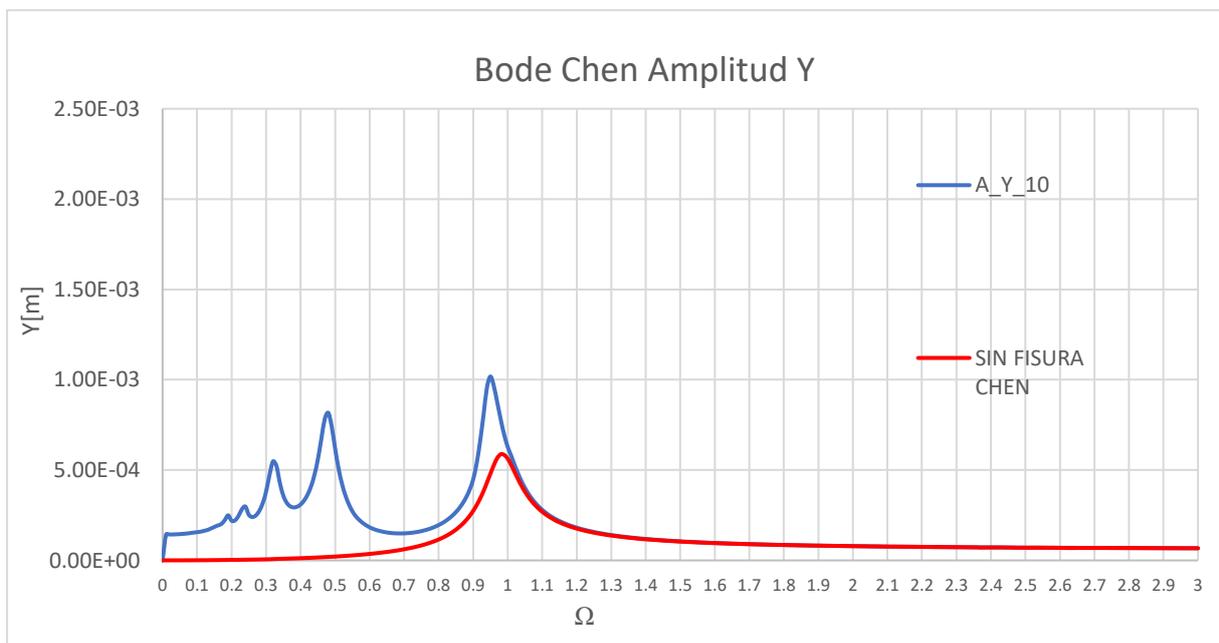


Fig. 4.24 Comparación entre eje sin fisura y respuesta vertical del eje con profundidad de grieta 10 %

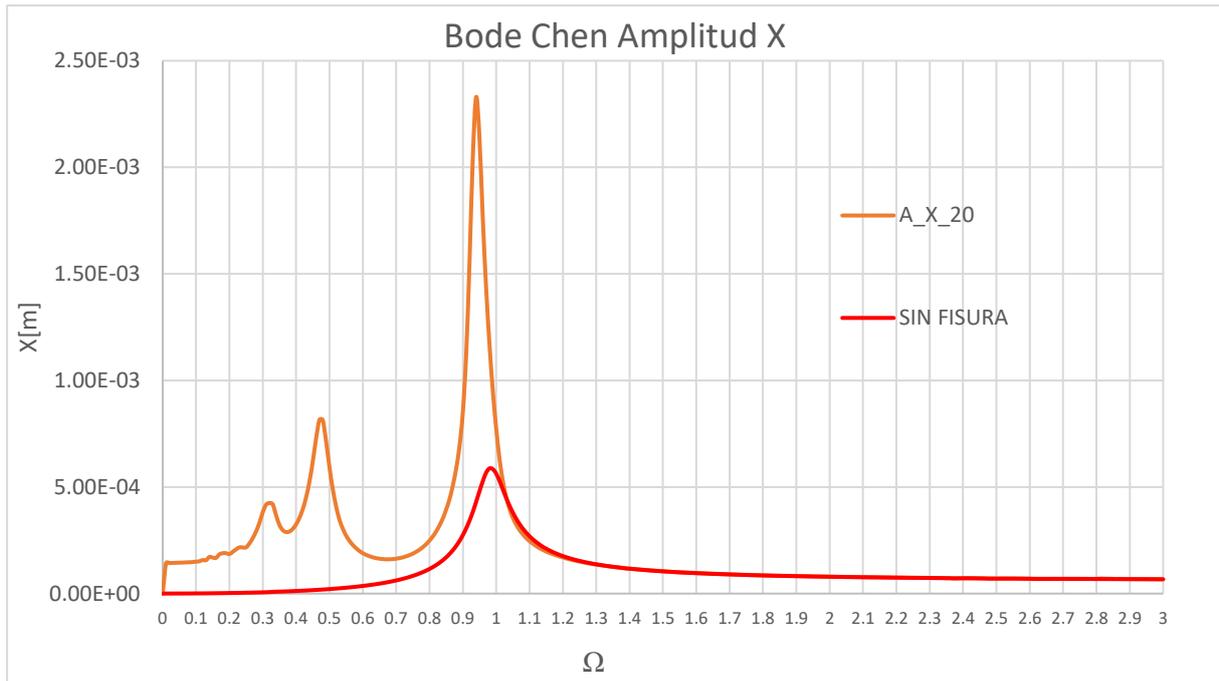


Fig. 4.25 Comparación entre eje sin fisura y respuesta horizontal del eje con profundidad de grieta 20 %

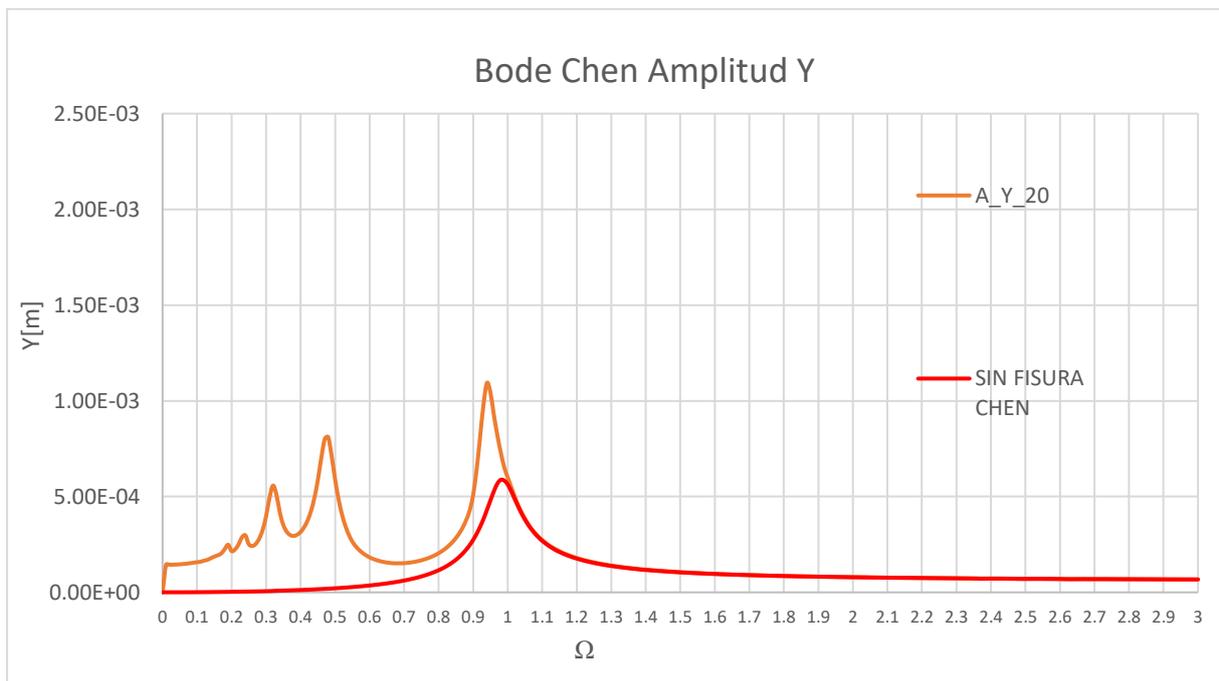


Fig. 4.26 Comparación entre eje sin fisura y respuesta vertical del eje con profundidad de grieta 20 %

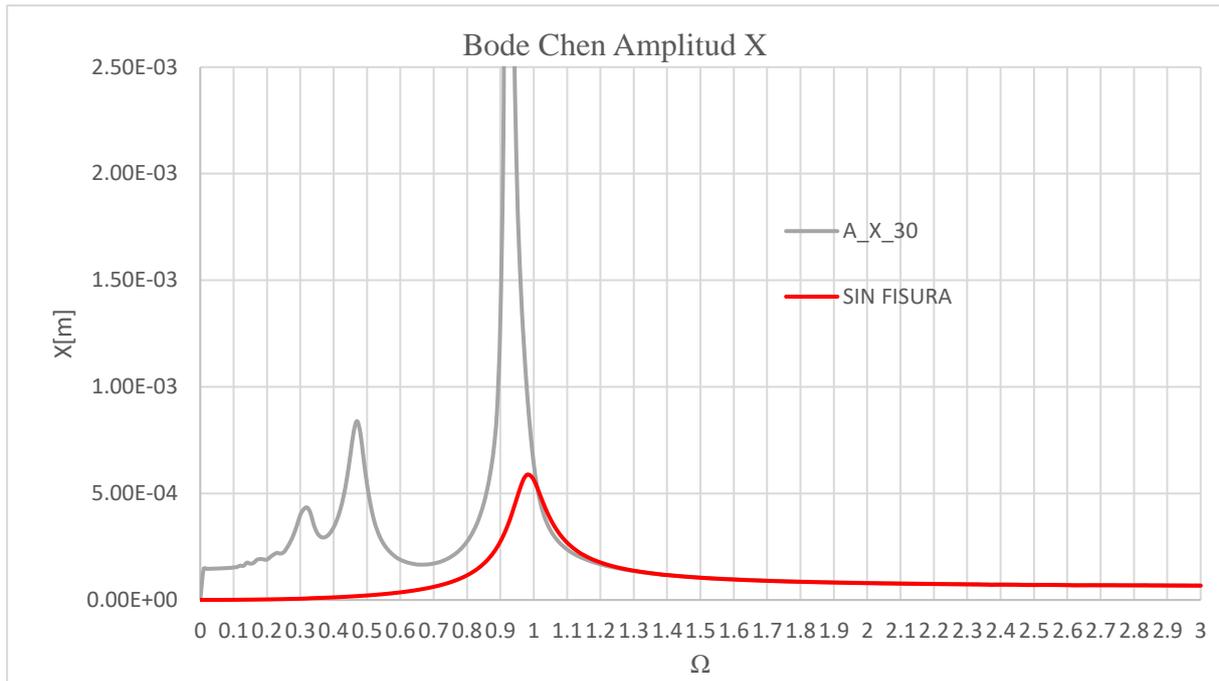


Fig. 4.27 Comparación entre eje sin fisura y respuesta horizontal del eje con profundidad de grieta 30 %

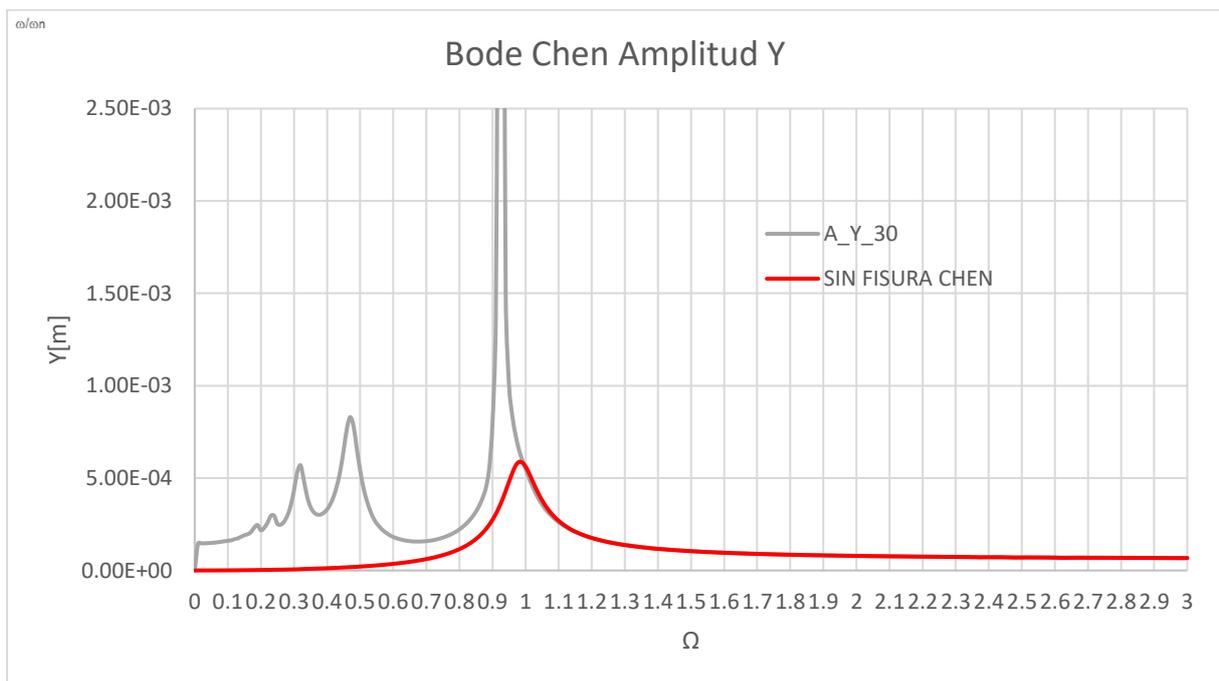


Fig. 4.28 Comparación entre eje sin fisura y respuesta vertical del eje con profundidad de grieta 30 %

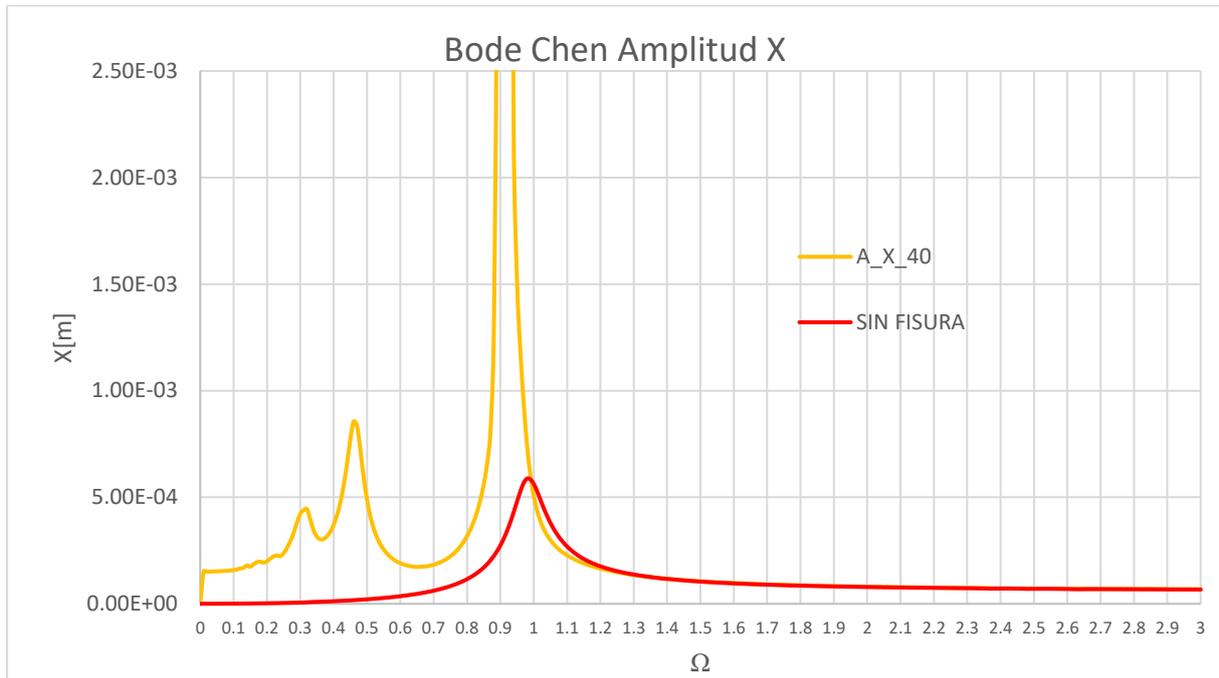


Fig. 4.29 Comparación entre eje sin fisura y respuesta horizontal del eje con profundidad de grieta 40 %

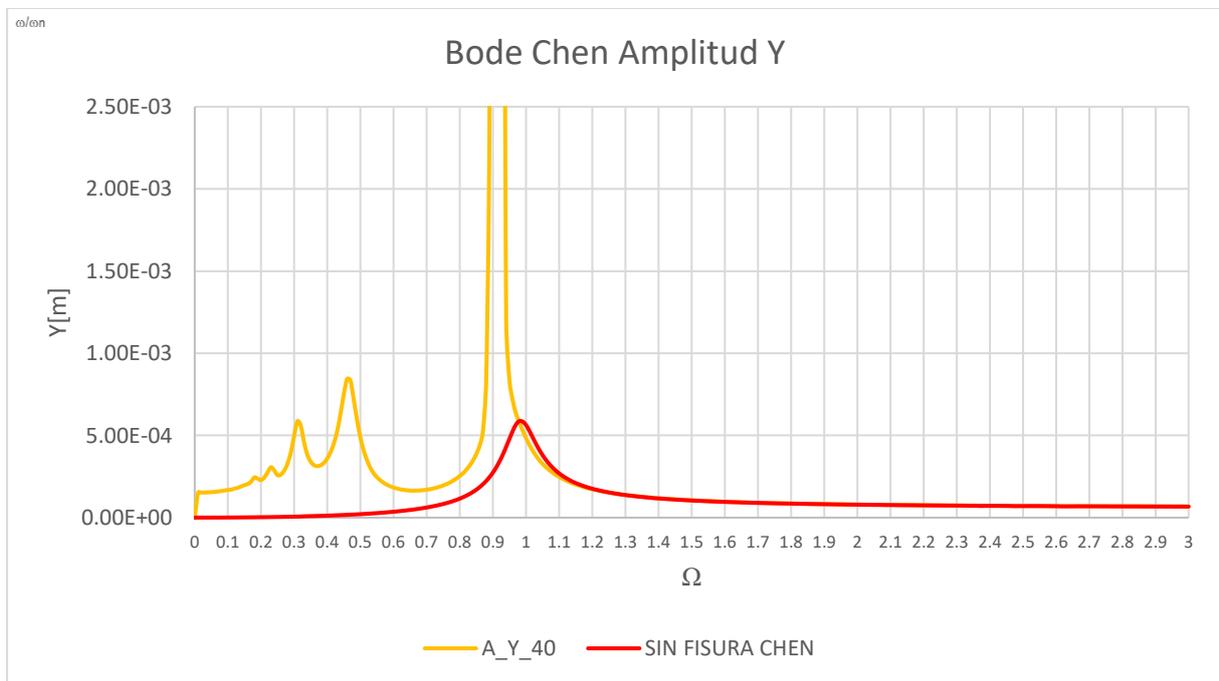


Fig. 4.30 Comparación entre eje sin fisura y respuesta vertical del eje con profundidad de grieta 40 %

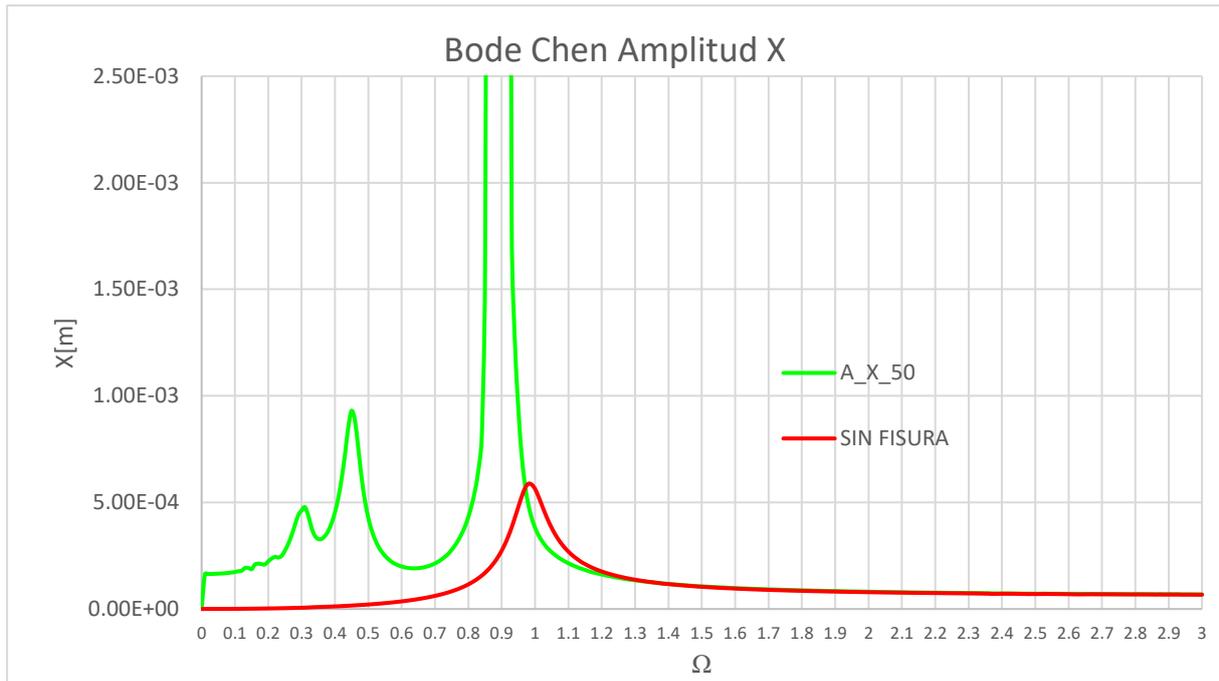


Fig. 4.31 Comparación entre eje sin fisura y respuesta horizontal del eje con profundidad de grieta 50 %

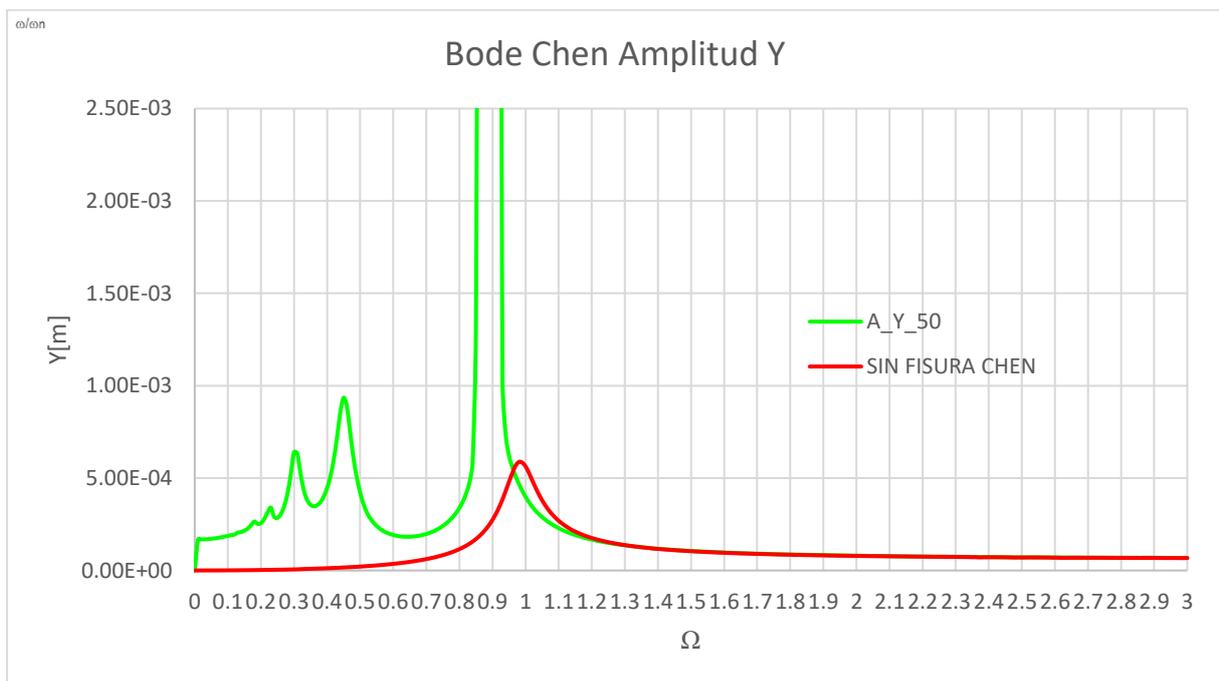


Fig. 4.32 Comparación entre eje sin fisura y respuesta vertical del eje con profundidad de grieta 50 %

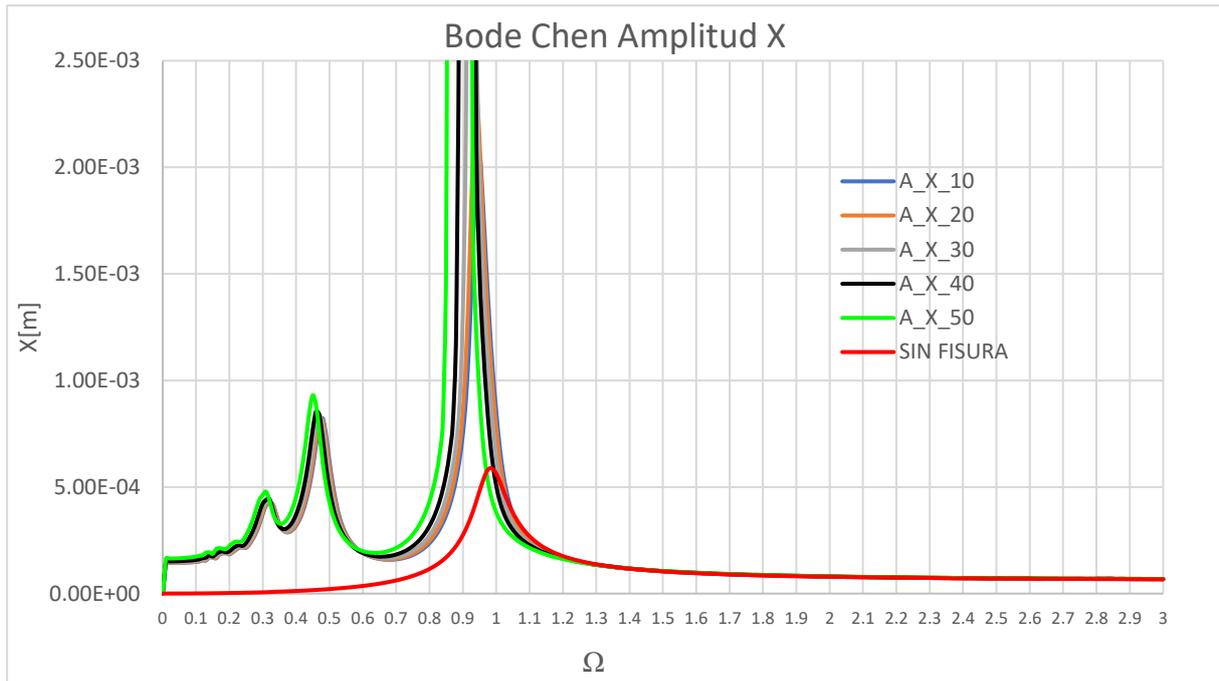


Fig. 4.33 Evolución de la amplitud vibracional en dirección X.

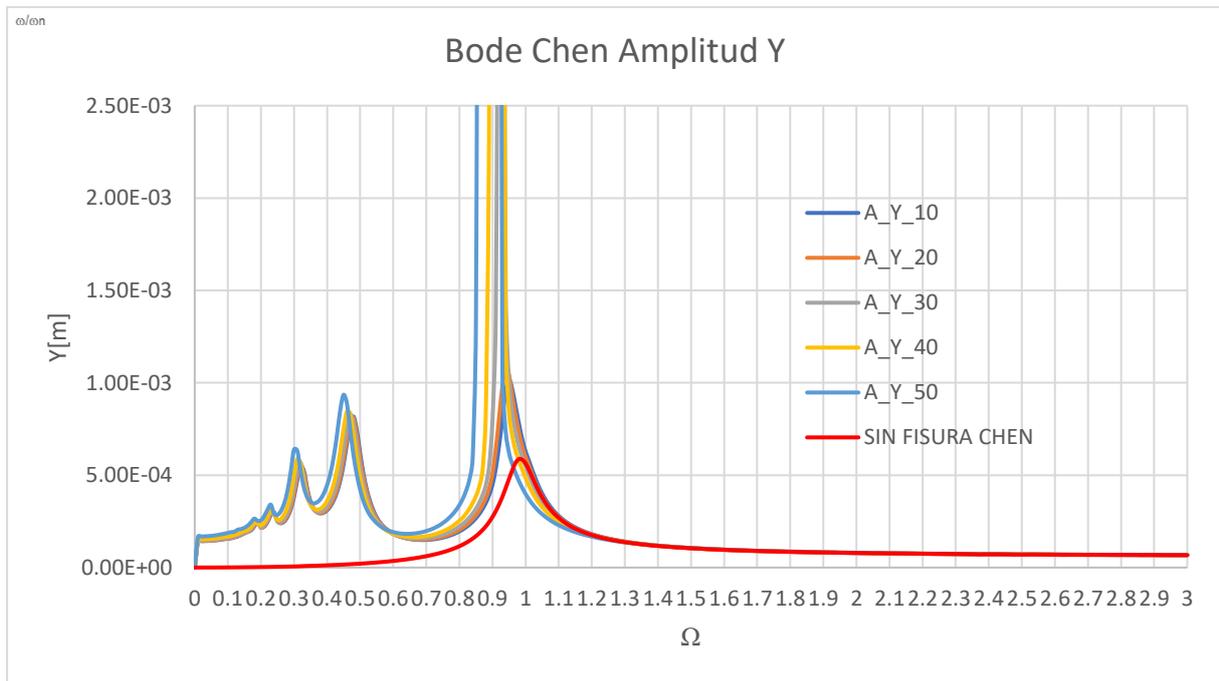


Fig. 4.34 Evolución de la amplitud vibracional en dirección Y.

4.8 Estabilidad

El comportamiento dinámico de los sistemas no lineales es mucho más rico que el de los lineales y su análisis mucho más complicado. Para el análisis de estabilidad, las técnicas basadas en la teoría de Liapunov tienen un lugar destacado. Entre las teorías que permiten el análisis de estabilidad de sistemas no lineales, la teoría basada en Liapunov tiene un lugar destacado por la riqueza en la descripción de los diversos conceptos de estabilidad y los métodos de análisis de estabilidad que establecen condiciones suficientes.

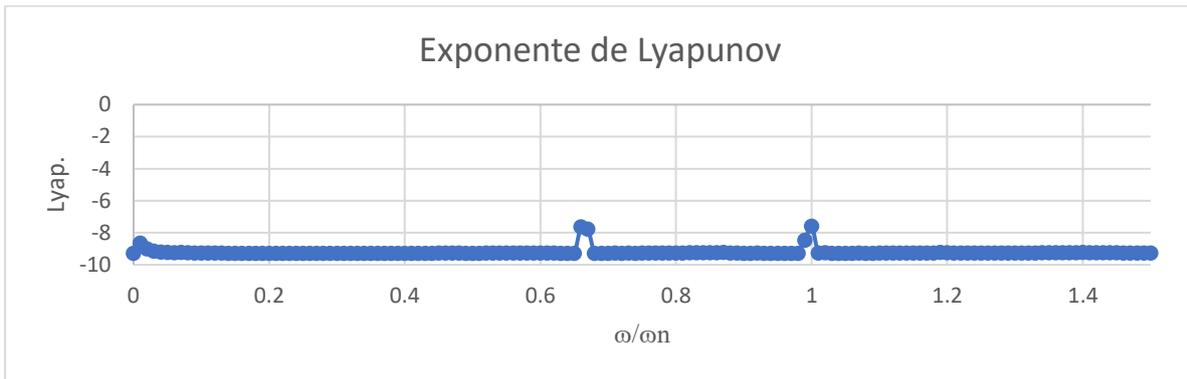


Fig. 4.35 Estabilidad en un 10% de fisura

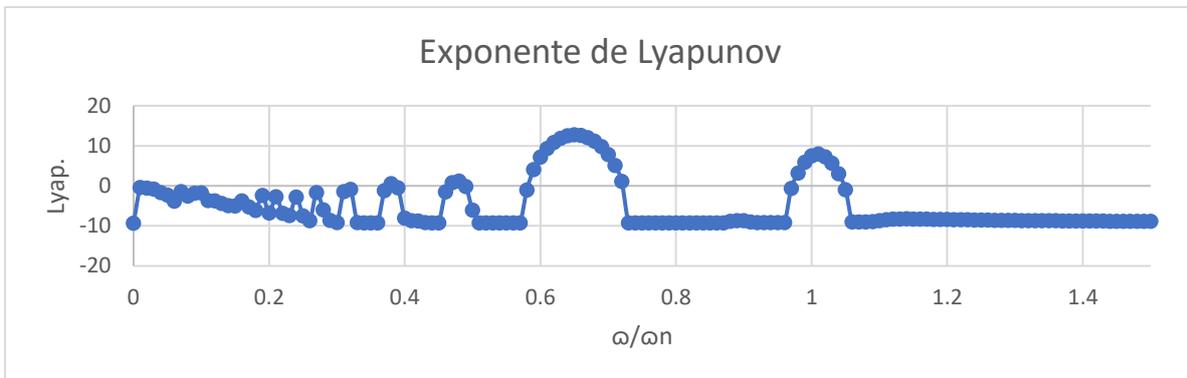


Fig. 4.36 Estabilidad en un 20% de fisura

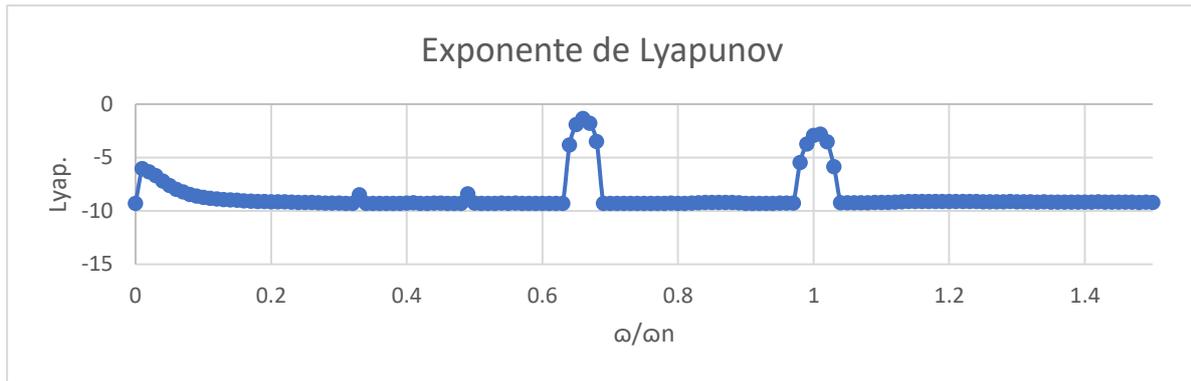


Fig. 4.37 Estabilidad en un 30% de fisura

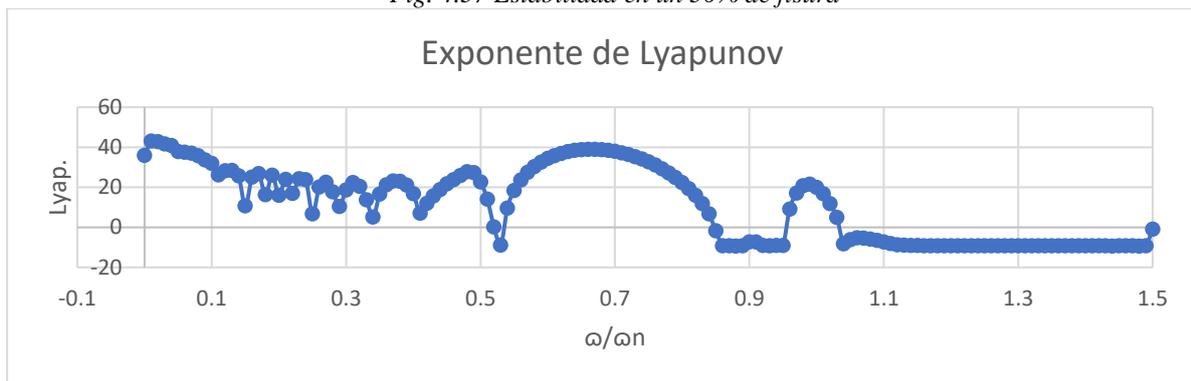


Fig. 4.38 Estabilidad en un 40% de fisura

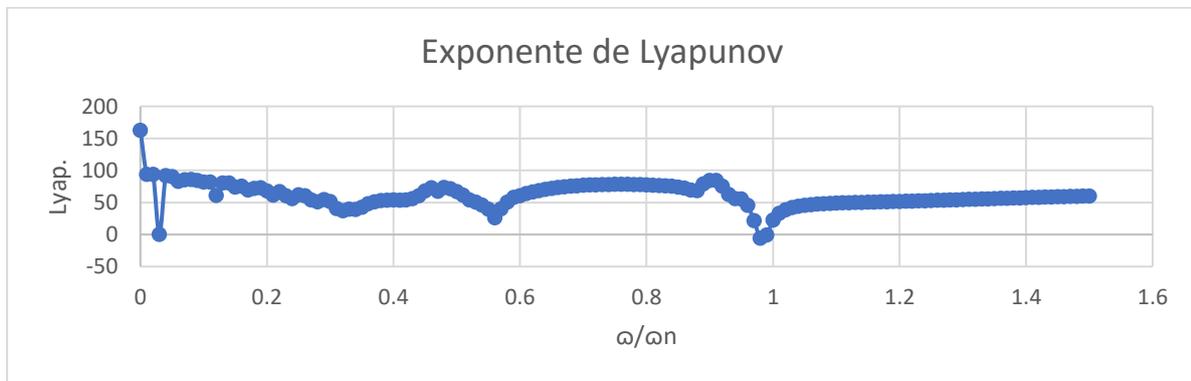


Fig. 4.39 Estabilidad en un 50% de fisura

El comportamiento del sistema cuando el eje esta fisurado a 30%, 40% y 50% es inestable en velocidades bajas y altas, a diferencia cuando el eje esta fisurado en un 20% o 10% de fisura, tiene mayores zonas de estabilidad como lo podemos observar en las gráficas de la Fig. 4.35, Fig. 4.36, Fig. 4.37, Fig. 4.38 y Fig. 4.39 analizando los exponentes de Lyapunov y el comportamiento de la grafica.

Conclusiones

- La detección temprana de fisura, es indispensable para asegurar una operación confiable de la maquinaria rotatoria y para la toma de decisiones técnicas relacionadas con la rehabilitación o sustitución del rotor, es importante determinar si el rotor puede seguir operando o es necesario retirarlo de servicio tomando en cuenta el impacto económico que puede tener esto.
- La detección de grietas es más factible durante barridos de frecuencia como en el caso del paro de la máquina, cuando varias resonancias locales de vibración que ocurren a fracciones racionales de la velocidad crítica fundamental pueden indicar problemas estructurales. Por lo tanto, en la tarea de detección de fisuras, el monitoreo de vibraciones durante el arranque o paro de una máquina es tan importante como el monitoreo en estado estable de operación, especialmente para máquinas tales como motores de aviones los cuales arrancan y paran muy frecuentemente y además operan a altas velocidades.
- Se analizan los patrones de vibración y la evolución de las órbitas rindiendo útiles resultados. Son trazadas las respuestas verticales y horizontales del disco y chumaceras, la evolución orbital alrededor del equilibrio no trivial y los diagramas de Bode generados por barrido de la frecuencia mientras se hace variar ortogonalmente la orientación del desbalance para una configuración del rotor que tiene diferentes influencias de grieta y desbalance. Resulta que la evolución orbital alrededor de $1/2$, $1/3$ y $1/4$ de la primera resonancia puede ser utilizada para detectar la presencia de grietas en rotores, incluso si la orientación entre grieta y desbalance es desconocida.
- El análisis de estabilidad de los sistemas no lineales es un problema mucho más complicado que en el caso lineal. El comportamiento puede ser tan rico que existen múltiples definiciones de estabilidad incluso cuando nos referimos exclusivamente a estabilidad de puntos de equilibrio.

5 Bibliografía

- [1] W. Rankine, “On the centrifugal force of rotating shafts,” *Engineer*, 1869.
- [2] A. Stodola, “Steam and gas turbines,” 1945.
- [3] J. Sinou, “Effects of a crack on the stability of a non-linear rotor system,” *Int. J. Non. Linear. Mech.*, 2007.
- [4] Q. Han and F. Chu, “Parametric instability of a Jeffcott rotor with rotationally asymmetric inertia and transverse crack,” *Nonlinear Dyn.*, 2013.
- [5] B. Yang and C. Suh, “Interpretation of crack-induced rotor non-linear response using instantaneous frequency,” *Mech. Syst. Signal Process.*, 2004.
- [6] Z. Haji and S. Oyadiji, “The use of roving discs and orthogonal natural frequencies for crack identification and location in rotors,” *J. Sound Vib.*, 2014.
- [7] V. Kumar, C. Harikrishna, and C. Sai, “Dynamic Analysis of a Cracked Rotor-An Experimental and Finite Element Investigation,” *Mater. Today*, 2015.
- [8] A. D. Dimarogonas, “Vibration of C R a C K E D Structures : a State of the Art Review,” *Eng. Fract. Mech.*, vol. 55, no. 5, pp. 831–857, 1996.
- [9] H. Khalil, “Nonlinear Systems,” 1996.
- [10] T. Patel and A. Darpe, “Vibration response of misaligned rotors,” *J. Sound Vib.*, 2009.
- [11] J. Gómez-Mancilla and A. Zambrano-Reyes, “Local resonance of crack-imbalance orientations and orbital evolution to detect rotor cracks: Part 1, numerical analysis,” *Conf. Proc. Soc. Exp. Mech. Ser.*, 2005.
- [12] J. Gomez-Mancilla, J. Sinou, and V. Nosov, “The influence of crack-imbalance orientation and orbital evolution for an extended cracked Jeffcott rotor,” *Comptes Rendus*, 2004.
- [13] R. Gasch, “A survey of the dynamic behaviour of a simple rotating shaft with a transverse crack,” *J. Sound Vib.*, 1993.
- [14] I. Mayes and W. Davies, “A method of calculating the vibrational behaviour of coupled rotating shafts containing a transverse crack,” *Vib.*, 1980.
- [15] A. Z. Reyes, “Estudio numerico analitico de la respuesta vibratoria de ejes fisurados,” 2008.

Apéndice A

```

%% MODELO DE ROTOR FISURADO
% Luis Manuel Palacios Pineda / Aldo Antonio Camacho Ramirez
function dx=modelo_chen(t,x)
dx=zeros(4,1);
global omega_cap
%% Características del eje
lspam=0.69; % longitud efectiva en metros
ltot=0.915; % longitud total del eje en metros
rho=7920*1.6354*(ltot/lspam); %Densidad en kg/m^3
E=210e9; %Modulo de Young del acero del eje, en
Pascales
r=6.35e-3; %Radio del eje, en metros
A=pi*r^2; %Area de una seccion transversal del eje
d=r+r;
I=(pi/64)*(d^4);
A_D=0.2;
m=1.495; % Masa del rotor Kg
zeta=.05; %Amortiguamiento dimensional
K_n=-1026627.2*(A_D)^5 + 1477453.1*(A_D)^4 - 809564.13*(A_D)^3 +
202048.86*(A_D)^2 - 23181.432*(A_D) + 37761.498;
K_E=-1625416.5*(A_D)^5 + 2076933.7*(A_D)^4 - 1000238.2*(A_D)^3 +
202118.79*(A_D)^2 - 24045.886*(A_D) + 37725.884;
K_EN=K_E/5;
% K_EN=0;
K_int=(48*E*I)/(lspam^3); % Rigidez acoplada del eje
w=0.09; % Distancia a lo largo de la parte
delantera de la grieta
beta=0; % Angulo entre la fisura y el rotor
desbalanceado [°]
g=9.81; % Gravedad m/s^2
e=30e-6; % Desbalance
omega_n=sqrt(K_int/m); % Frecuencia Natural
omega=omega_n.*omega_cap; % velocidad de giro del rotor [rad/s]
tetha=omega*t; % Angulo de posición de la grieta [°]
co_phi=(x(1)*cos(omega*t)+x(3)*sin(omega*t))/sqrt((x(1))^2+(x(3))^2);
G=(1+(co_phi))/2; % Funcion de respiro (Chen)
c=zeta*2*m*omega_n; % Amortiguamiento rotor viscoso
%% Excitacion del sistema
F1=(m*e*omega^2*cos(omega*t-beta))-(m*g);
F2=m*e*omega^2*sin(omega*t-beta);
%% Modelo matematico expresado con metodo de ecuaciones de estados
dx(1)=x(2);
dx(2)=(1/m)*(F1-(c*x(2)))-((x(1)/2)*(K_E+K_n))-((G/2)*((K_E-
K_n)*cos(2*(omega*t))-2*K_EN*sin(2*omega*t))*(x(1)))-((G/2)*((K_E-
K_n)*sin(2*omega*t)+2*K_EN*cos(2*omega*t))*(x(3)));
dx(3)=x(4);
dx(4)=(1/m)*(F2-(c*x(4)))-((x(3)/2)*(K_E+K_n))-((G/2)*((K_n-
K_E)*cos(2*omega*t)-2*K_EN*sin(2*omega*t))*(x(3)))-((G/2)*((K_E-
K_n)*sin(2*omega*t)+2*K_EN*cos(2*omega*t))*(x(1)));

```

Apéndice B

```
%% Solución del sistema
%% Luis Manuel Palacios Pineda / Aldo Antonio Camacho Ramirez
clc
clear all
global omega_cap
tf=30;
n=1000;
contador=0;
for omega_cap=0.3:0.01:0.3;
[T,Y] = ode45(@modelo_chen,[0 tf],[30e-6 30e-6 0 0]);
M=length(Y);
contador=contador+1;
F=Y(M-n:M,1);
K=Y(M-n:M,3);
A_X(contador)=(max(F))-(min(F));
A_Y(contador)=(max(K))-(min(K));
omega_c(contador)=omega_cap;
end
figure (5)
plot(omega_c,A_X)
grid on
title('Amplitud 1 de vibración','FontSize',14)
xlabel('Tiempo [s]')
ylabel('x [m]')
grid on

% Grafica de resultados
figure (1)
plot(T,Y(:,1))
grid on
title('Amplitud 1 de vibración','FontSize',14)
xlabel('Tiempo [s]')
ylabel('x [m]')
grid on

figure (2)
plot(T,Y(:,2))
grid on
title('Velocidad 1 de vibración','FontSize',14)
xlabel('Tiempo [s]')
ylabel('v [m/s]')
grid on

figure (3)
plot(Y(M-n:M,1),Y(M-n:M,3))
axis equal
grid on
title('Orbita','FontSize',14)
xlabel('x [m]')
ylabel('y [m]')
```

Apéndice C

```

function f=EE_corr_amort_str(t,X)
%
% Lorenz equation
%
%          dx/dt = SIGMA*(y - x)
%          dy/dt = R*x - y -x*z
%          dz/dt= x*y - BETA*z
%
% In demo run SIGMA = 10, R = 28, BETA = 8/3
% Initial conditions: x(0) = 0, y(0) = 1, z(0) = 0;
% Reference values for t=10 000 :
%          L_1 = 0.9022, L_2 = 0.0003, LE3 = -14.5691
%
% See:
% K. Ramasubramanian, M.S. Sriram, "A comparative study of computation
% of Lyapunov spectra with different algorithms", Physica D 139 (2000)
72-86.
%
% -----
% Copyright (C) 2004, Govorukhin V.N.
%% Este programa considera ORTOTROPIA medida del experimento
% Se agrega los valores de desbalance ex y ey se corrige lo
% anterior y se considera respiro de Papadoupulus

global beta cap_omega r a
% Values of parameters
%%
lspam=0.69; %L/D=43 % longitud efectiva en metros
E=210e9; % Modulo de Young del acero del eje, en Pascales
r=7.97e-3; % Radio del eje, en metros
L=lspam;
Iint=(pi*r^4)/4; % Momento de Inercia integro
c_adim=0.05; % Amortiguamiento adimensional
g=9.81;
%
%Datos adicionales
e=0.5*(25.4e-6); % Excentricidad de desbalance
%beta=(120/180)*pi; % Posición del desbalance relativo a la fisura
orto=1; % ortotropia
m=1*3.23; % masa del disco
Meje=1.42/1; % Masa del eje, en Kg
meq=(m+0.38*Meje)/1.35;% Masa equivalente

% Cambio de rigidez y sagueo del eje
Kint=(48*E*Iint)/L^3; % Rigidez eje
omega_n_1=sqrt(Kint/meq); %Frecuencia natural_1
omega=(cap_omega)*omega_n_1; % Velocidad de Giro del eje rad/seg
k_0=Kint;
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% Datos de la fisura %%%%%%%%%
%a=(0.4)*(2*r);
DeltaAlef=1.49953092E+00*(a/(2*r))^3 + 2.86402730E-02*(a/(2*r))^2 +...
4.63841615E-02*(a/(2*r)) - 4.98285853E-04;
Deltaeta=3.63562016E-01*(a/(2*r))^3-1.62779260E-02*(a/(2*r))^2+...
3.81891192E-03*(a/(2*r)) - 6.90771062E-05;
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
k_alef=(1-DeltaAlef)*k_0;

```

```

k_eta=(1-Deltaeta)*k_0;           %(1-Deltaeta)*k_0;
k_alef_eta=(DeltaAlef/5)*k_0;    %k_alef/50;
c=c_adim*2*sqrt(k_0*meq);        %*(1+0.1*((x(1))^2+(x(2))^2));
%% Amortiguamiento estructural
gamma_adim=0; % gamma_adim=c_adim/2;
gamma=gamma_adim*sqrt(k_0*meq);

%%
y=X(1); z=X(2); y1=X(3); z1=X(4);

Y= [X(5), X(9), X(13), X(17);
    X(6), X(10), X(14), X(18);
    X(7), X(11), X(15), X(19);
    X(8), X(12), X(16), X(20)];

f=zeros(16,1);

% MODELOS PARA RESPIRO DE GRIETA %%%%%%%%%%%
% CHENG BASICO *****
cos_psi=(y*cos(omega*t)+z*sin(omega*t))/((y)^2+(z)^2)^(1/2);
%
% CHENG - Mayes and Davis *****
G=(1+cos_psi)/2;
%%%%%%%%%%
F1=(1/2)*(k_alef+k_eta);
F2=(1/2)*((k_alef-k_eta)*cos(2*omega*t)-2*k_alef_eta*sin(2*omega*t));
F3=(1/2)*((k_alef-k_eta)*sin(2*omega*t)+2*k_alef_eta*cos(2*omega*t));
F4=e*meq*omega^2*cos(omega*t+beta)+meq*g;
%
F5=(1/2)*(k_alef+k_eta)/orto;
F6=(1/2)*((k_alef-k_eta)*cos(2*omega*t)+2*k_alef_eta*sin(2*omega*t));
F7=(1/2)*((k_alef-k_eta)*sin(2*omega*t)+2*k_alef_eta*cos(2*omega*t));
F8=e*meq*omega^2*sin(omega*t+beta);
%
f(1)=y1;
f(2)=z1;
f(3)=(1/meq)*(-(c+gamma)*y1-gamma*omega*z-F1*y-G*F2*y-G*F3*z+F4);
f(4)=(1/meq)*(-(c+gamma)*z1+gamma*omega*y-F5*z-G*F6*z-G*F7*y+F8);

%%
%Linearized system
a11=0;
a12=0;
a13=1;
a14=0;
%%%%%%%%%%
a21=0;
a22=0;
a23=0;
a24=1;
%%%%%%%%%%
a31=(1/meq)*(1/2*(-k_alef - k_eta) - 1/4*y*(cos(omega*t)/sqrt(y^2+z^2)-...
    (y*(y*cos(omega*t) + z*sin(omega*t)))/(y^2 + z^2)^(3/2))*...
    ((k_alef - k_eta)*cos(2*omega*t) - 2*k_alef_eta*sin(2*omega*t)) - ...
    1/4*(1 + (y*cos(omega*t) + z*sin(omega*t))/sqrt(y^2 + z^2))*...
    ((k_alef - k_eta)*cos(2*omega*t) - 2*k_alef_eta*sin(2*omega*t)) - ...
    1/4*z*(cos(omega*t)/sqrt(y^2 + z^2) - (y*(y*cos(omega*t) + ...
    z*sin(omega*t)))/(y^2 + z^2)^(3/2))*(2*k_alef_eta*cos(2*omega*t) + ...
    (k_alef - k_eta)*sin(2*omega*t)));

```

```

a32=(1/meq)*(-gamma*omega - 1/4*y*(sin(omega*t)/sqrt(y^2 + z^2) - ...
    (z*(y*cos(omega*t) + z*sin(omega*t)))/(y^2 + z^2)^(3/2))*...
    ((k_alef - k_eta)*cos(2*omega*t) - 2*k_alef_eta*sin(2*omega*t)) - ...
    1/4*z*(sin(omega*t)/sqrt(y^2 + z^2) - (z*(y*cos(omega*t) + ...
    z*sin(omega*t)))/(y^2 + z^2)^(3/2))*(2*k_alef_eta*cos(2*omega*t) +...
    (k_alef - k_eta)*sin(2*omega*t)) - 1/4*(1 + (y*cos(omega*t) + ...
    z*sin(omega*t))/sqrt(y^2 + z^2))*(2*k_alef_eta*cos(2*omega*t) +...
    (k_alef - k_eta)*sin(2*omega*t)));
%
a33=(-c - gamma)/meq;
%
a34= 0;
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
a41=(1/meq)*(gamma*omega - 1/4*z*(cos(omega*t)/sqrt(y^2 + z^2) - ...
    (y*(y*cos(omega*t) + z*sin(omega*t)))/(y^2 + z^2)^(3/2))*...
    ((k_alef - k_eta)*cos(2*omega*t) + 2*k_alef_eta*sin(2*omega*t)) - ...
    1/4*y*(cos(omega*t)/sqrt(y^2 + z^2) - (y*(y*cos(omega*t) + ...
    z*sin(omega*t)))/(y^2 + z^2)^(3/2))*(2*k_alef_eta*cos(2*omega*t) + ...
    (k_alef - k_eta)*sin(2*omega*t)) - 1/4*(1 + (y*cos(omega*t) + ...
    z*sin(omega*t))/sqrt(y^2 + z^2))*(2*k_alef_eta*cos(2*omega*t) + ...
    (k_alef - k_eta)*sin(2*omega*t)));

a42=(1/meq)*(-((k_alef + k_eta)/(2*orto)) - 1/4*z*(sin(omega*t)/...
    sqrt(y^2 + z^2) - (z*(y*cos(omega*t) + z*sin(omega*t)))/...
    (y^2 + z^2)^(3/2))*((k_alef - k_eta)*cos(2*omega*t) +...
    2*k_alef_eta*sin(2*omega*t)) - 1/4*(1 + (y*cos(omega*t) + ...
    z*sin(omega*t))/sqrt(y^2 + z^2))*((k_alef - k_eta)*cos(2*omega*t) + ...
    2*k_alef_eta*sin(2*omega*t)) - 1/4*y*(sin(omega*t)/sqrt(y^2 + z^2) - ...
    (z*(y*cos(omega*t) + z*sin(omega*t)))/(y^2 + z^2)^(3/2))*...
    (2*k_alef_eta*cos(2*omega*t) + (k_alef - k_eta)*sin(2*omega*t)));
%
a43= 0;
%
a44=(-c - gamma)/meq;

Jac=[a11 a12 a13 a14;
    a21 a22 a23 a24;
    a31 a32 a33 a34;
    a41 a42 a43 a44];

%Variational equation
f(5:20)=Jac*Y;

%Output data must be a column vector

```

Apéndice D

```

% Programa realizado por
% Luis Manuel Palacios Pineda
% Este programa calcula el exponente máximo de Lyapunov utilizando
% la subrutina de Vasiliy Govorukhin, que a su vez
% está basada en el trabajo de A. Wolf, J. B. Swift, H. L. Swinney, and J.
% A. Vastano,
% "Determining Lyapunov Exponents from a Time Series," Physica D,
% Vol. 16, pp. 285-317, 1985.
% Se agrega los valores de desbalance ex y ey
%
clear
clc
global r a cap_omega beta
%cap_omega=0.96;
i=0; j=1;
%nn=5; % No. de simulaciones para construir
gráfica
%beta_inf=0*pi/180; % Valor inicial de beta
%beta_sup=360*pi/180; % Valor final de beta
%beta_inc=(beta_sup-beta_inf)/(nn-1); % Incremento de beta
beta=(0/180)*pi;
r=7.97e-3;
a2=[0.1 0.2 0.3 0.4 0.5];
a2=a2.*2*r;
%%
for jj=1:length(a2)
    a=a2(jj);
    k=0;

    for cap_omega=0:0.01:0.1 % Velocidad de giro / la primera freq. nat.
        jj
        k=k+1
        % -----
        % Bucle para obtener la solución numérica. Se utiliza ODE45
        % -----
        [T,Res]=lyapunov(4,@EE_corr_amort_str,@ode45,0,0.5,100,[30e-6 30e-6
0 0],0);
        Lyap(k,jj)=max(Res(length(T),:))
        vec_beta(k)=cap_omega;
    end

end

end
%% Gráfica de exponente de Lyapunov
figure(1)
plot(vec_beta,Lyap)
grid on
title('Exponente de Lyapunov')
xlabel('\omega/\omega_n [-]')
ylabel('Lyap')
%% Indicador auditivo de que finalizó el programa
load gong.mat;
sound(y, Fs);

```