



ANÁLISIS MODAL EN SISTEMAS MECÁNICOS USANDO EXCITACIÓN TIPO IMPACTO

TESIS PARA OBTENER EL GRADO DE
MAESTRO EN INGENIERÍA MECÁNICA,
PRESENTA:

ING. HÉCTOR SABÁS SÁNCHEZ VILLEGAS

DIRECTOR:

DR. HUGO FRANCISCO ABUNDIS FONG

CO-DIRECTOR:

DR. LUIS GERARDO TRUJILLO FRANCO

SINODAL:

DR. EDGAR ERNESTO VERA CÁRDENAS

Pachuca de Soto, Hgo. Febrero de 2024.
63 páginas



Carretera México - Pachuca Km. 87.5, Col. Venta Prieta C.P. 42083 Pachuca de Soto,
Hidalgo. Tels. 771 7113073, 771 7113596, 771 7113140, 771 7115119 y 771 7113399
e-mail: depi@pachuca.tecnm.mx | tecnm.mx





Pachuca de Soto, Hidalgo, 14/febrero/2024
Circular No. 034/2024

**C. ING. HÉCTOR SABÁS SÁNCHEZ VILLEGAS
PRESENTE**

La que suscribe, jefa de la División de Estudios de Posgrado e Investigación, le comunica que los miembros de la Comisión Revisora, designada por el Consejo de Posgrado de la Maestría en Ingeniería Mecánica para examinar su Tesis:

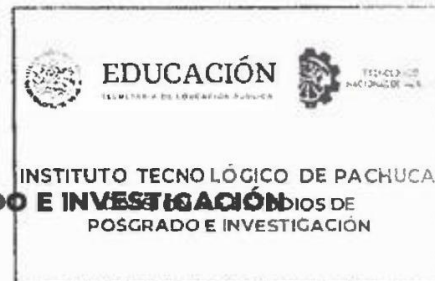
Análisis modal en sistemas mecánicos usando
excitación tipo impacto

se han reunido, y después de intercambiar opiniones manifiestan su aprobación de la Tesis, en virtud que satisface los requisitos señalados por las disposiciones reglamentarias vigentes y, en consecuencia, se autoriza su impresión

ATENTAMENTE

Excelencia en Educación Tecnológica
"El Hombre Alimentado e Ingeniero en Contacto con la Ciencia"

M.A. C. ELODIA CLAUDIA GUERRERO ORTIZ
JEFA DE LA DIVISIÓN DE ESTUDIOS DE POSGRADO E INVESTIGACIÓN



ccp. Archivo

ECCO/lmpp



Consejo de Posgrado de la Maestría en Ingeniería Mecánica ACTA

Siendo las 13:00 horas del 17 de febrero de 2023, el Consejo de Posgrado de la Maestría en Ingeniería Mecánica manifiesta la APROBACIÓN del tema de Tesis: *Análisis modal en sistemas mecánicos usando excitación tipo impacto*, con el siguiente contenido:

Resumen/Abstract

Contenido

Índice de cuadros, gráficas y figuras

1.- Introducción

2.- Estado del arte

3.- Marco teórico

4.- Materiales y métodos

5.- Resultados experimentales

Conclusiones

Bibliografía





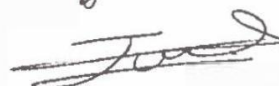
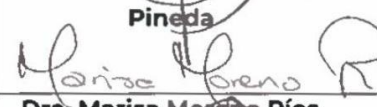

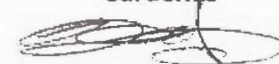
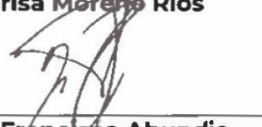
Apéndices

Para cubrir el requisito correspondiente a la Tesis para que el Ing. Héctor Sabás Sánchez Villegas obtenga el grado de Maestría en Ingeniería Mecánica, bajo la dirección del Dr. Hugo Francisco Abundis Fong.

ATENTAMENTE

Excelencia en Educación Tecnológica

"El Hombre Alimenta el Ingenio en Contacto con la Ciencia"

 Dr. Ignacio Ramírez Vargas	 Dr. Juan Serrano Arellano	 Dr. Luis Manuel Palacios Pineda
 Dra. Erika Osiris Ayala Dávila	 Dr. Edgar Ernesto Vera Cárdenas	 Dra. Marisa Moreno Ríos
 Dr. Armando Irvin Martínez Pérez	 Dr. Francisco Noe Demesa López	 Dr. Hugo Francisco Abundis Fong



Dedicatorias

Agradezco al Instituto Tecnológico de Pachuca por brindarme las herramientas necesarias para la elaboración de este proyecto.

A mis directores por su guía, paciencia y comprensión.

A CONAHCyT por el apoyo económico brindado a lo largo de este periodo.

A mis padres por ser los pilares y los principales impulsores de mi formación.

A mi familia, amigos y pareja por su apoyo incondicional.

Contenido

Resumen	viii
Abstract	ix
1. Introducción	1
1.1. Planteamiento del problema.....	1
1.2. Justificación.....	1
1.3. Objetivos	2
1.3.1. Objetivo General.....	2
1.3.2. Objetivos específicos	2
1.4. Hipótesis.....	3
2. Estado del arte.....	4
3. Marco teórico	6
3.1. Sistemas de un grado de libertad.....	6
3.1.1. Vibración libre de un sistema de un grado de libertad.....	7
3.1.2. Vibración forzada de un sistema de un grado de libertad.....	10
3.2. Sistemas de múltiples grados de libertad	11
3.3. Análisis modal.....	12
3.3.1. Definición de análisis modal.....	12
3.3.2. Función de respuesta en frecuencia FRF	12
3.3.3. Propiedades modales.....	13
3.3.3.1. Forma modal.....	13
3.3.3.2. Frecuencia natural.....	14
3.3.3.3. Amortiguamiento.....	15
3.4. Análisis Modal Experimental (EMA)	15
3.5. Visión general del Análisis Modal Experimental	15
3.5.1. Consideraciones básicas.....	16
3.5.2. Técnicas de excitación por impacto	17
3.5.3. Modelo matemático de una excitación por impacto	17
3.5.4. Martillo de impacto.....	19
3.5.4.1. Selección de punta.....	20
4. Materiales y métodos	21

4.1.	Evaluación de técnicas de identificación de parámetros modales.....	22
4.1.1.	Técnicas de análisis de respuesta transitoria.....	23
4.1.1.1.	Peak Picking	24
4.1.1.2.	Circle fit.....	25
4.1.2.	Sistema eléctrico vibratorio	26
5.	Resultados experimentales	28
5.1.	Prueba respuesta al impulso	29
5.2.	Prueba de decaimiento libre	31
5.3.	Viga en voladizo.....	33
5.3.1.	Análisis experimental.....	35
5.3.2.	Análisis numérico	38
5.3.3.	Comparación	41
5.4.	Gabinete de computadora.....	41
5.4.1.	Análisis experimental.....	42
5.4.2.	Análisis numérico	47
5.4.3.	Comparación	49
6.	Conclusiones	51
	Referencias	52
	Anexos.....	54
I.	CCE 2022.....	54
II.	Script usado en Matlab para el procesamiento de datos experimentales.....	60

Lista de Tablas

Tabla 1. Parámetros del sistema.....	28
Tabla 2. Parámetro modales teóricos	28
Tabla 3. Parámetros modales obtenidos para la prueba de impulse-response.	30
Tabla 4. Parámetros modales, prueba free decay.	32
Tabla 5. Comparación de resultados.	32
Tabla 6. Frecuencias Naturales del sistema de viga en voladizo obtenidas mediante el análisis experimental.....	36
Tabla 7. Frecuencias naturales del sistema viga en voladizo obtenidas mediante análisis numérico.	39
Tabla 8. Tabla comparativa entre análisis experimental y numérico de la viga en voladizo.....	41
Tabla 9. Frecuencias naturales del gabinete de computadora.	47
Tabla 10. Frecuencias naturales del gabinete de computadora con diferentes materiales.	48
Tabla 11. Tabla comparativa entre análisis experimental y numérico para el gabinete de computadora.....	50

Lista de Figuras

Figura 1. Diagrama esquemático de la prueba con martillo de impacto 1-sistema de estudio, 2-martillo de impacto (entrada), 3-Sensor (salida).....	1
Figura 2. Modelo de un sistema SDOF [11].	6
Figura 3. Oscilación de un sistema sub amortiguado.	8
Figura 4. Oscilación de un sistema críticamente amortiguado.	8
Figura 5. Oscilación de un sistema sobre-amortiguado.	9
Figura 6. Comparación de la oscilación de un sistema sub, críticamente y sobre amortiguado....	9
Figura 7. Sistema de n grados de libertad [13].	11
Figura 8. Diagrama de un sistema lineal y su función de respuesta [16].	13
Figura 9. Modelo simple de excitación-respuesta de una placa [11].	13
Figura 10. Formas modales de una placa simple [11].	14
Figura 11. Función de respuesta en frecuencia de una placa simple [11].	15
Figura 12. Diagrama esquemático de una prueba de impacto [13].	18
Figura 13. Martillo de impacto instrumentado [13].	19
Figura 14. Tiempo de pulso de entrada y espectro de frecuencias resultante para una punta metálica, una punta de plástico duro, una punta de plástico suave y una punta de goma [11].	20
Figura 15. Diagrama de flujo sobre la metodología para la aplicación de la técnica de análisis modal experimental basada en excitación con martillo de impacto.	21
Figura 16. Análisis modal de una señal eléctrica.....	23
Figura 17. Circle fit: método de extracción de parámetros modales.	25
Figura 18. Sistema eléctrico vibratorio.	26
Figura 19. Respuesta de impulso del sistema.	29
Figura 20. FRF del sistema, prueba impulse-response.	30
Figura 21. Formas modales implícitas del sistema.	31
Figura 22. Respuesta del sistema, prueba free decay.	31
Figura 23. FRF del sistema, prueba free decay.....	32
Figura 24. Equipo para prueba de impacto adquirido por el Instituto Tecnológico de Pachuca. 33	

Figura 25. Gráfica de impacto.	35
Figura 26. Gráfica de respuesta en el tiempo de la viga en voladizo.	36
Figura 27. Gráfica de funciones de respuesta en frecuencia de la viga en Voladizo.....	36
Figura 28. Diagrama de Nyquist.....	37
Figura 29. Modos de deformación obtenidos mediante el análisis experimental.....	37
Figura 30. Geometría de la viga en voladizo realizada en SOLIDWORKS.....	38
Figura 31. Condiciones de frontera.....	39
Figura 32. Modos de deformación obtenidos mediante ANSYS: a) Primer modo de deformación, b) Segundo modo de deformación, c) Tercer modo de deformación, d) Cuarto modo de deformación.	40
Figura 33. Gabinete de computadora usado para el análisis.....	42
Figura 34. Prueba con gabinete de computadora con sensor tipo IEPE.	42
Figura 35. Aplicación de la técnica y recolección de datos experimentales con sensor de tipo IEPE.	43
Figura 36. Funciones de respuesta en frecuencia obtenidas con sensor tipo IEPE.	44
Figura 37. Sensores piezoeléctricos.....	44
Figura 38. Prueba con gabinete de computadora con sensor piezoeléctrico.	45
Figura 39. Funciones de respuesta en frecuencia obtenidas con sensor piezoeléctrico.....	46
Figura 40. Geometría del gabinete de computadora. a) Vista sólida. b) Vista de estructura alámbrica.....	47
Figura 41. Modos de deformación. a) Primer modo, b) Segundo modo, c) Tercer modo, d) Cuarto modo.	49

Resumen

En este trabajo se determina el modelo modal de la respuesta vibratoria de distintas estructuras ingenieriles a partir del uso de la técnica de análisis modal experimental basada en la prueba con martillo de impacto, a fin de crear una experiencia documental que aporte conocimiento práctico sobre las principales ventajas y limitaciones de esta técnica en particular. Se realizan pruebas piloto con geometrías básicas para la calibración del equipo de adquisición de datos. Se eligen los especímenes de prueba y se les aplica la técnica para recopilar los datos experimentales, asegurándose de una correcta calibración de los filtros y de las frecuencias de muestreo para cada caso de estudio. Los datos experimentales obtenidos son sometidos a un post procesamiento mediante técnicas de extracción de parámetros modales como lo son: polinomios racionales, recolección de picos (Peak Picking), ajuste de curvas general (curve fitting), técnica de Ibrahim, entre otras. Se elaboran modelos de elemento finito con software especializado para una comparación de resultados teóricos y experimentales. Se presentan los resultados en un reporte detallado y a su vez se realiza un compendio con las experiencias adquiridas a modo de texto de consulta para futuras aplicaciones en la construcción experimental de modelos modales para la aplicación de esquemas de absorción de vibraciones.

Palabras clave: Análisis modal, martillo de impacto, curve fitting, peak picking.

Abstract

In this work, the modal model of the vibratory response of different engineering structures is determined using the experimental modal analysis technique based on the impact hammer test, in order to create a documentary experience that provides practical knowledge about the main advantages and limitations of this technique. Pilot tests are carried out with basic geometries for the calibration of the data acquisition equipment. The test specimens are selected, and the technique is applied to collect the experimental data, ensuring a correct calibration of the filters and the sampling frequencies for each study case. The experimental data obtained is subjected to post-processing using modal parameter extraction techniques such as: rational polynomials, peak picking, general curve fitting, Ibrahim technique, among others. Finite element models are developed with specialized software for a comparison of numerical and experimental results. The results are presented in a detailed report, and, at the same time, a compendium is made with the experiences acquired as a reference text for future applications in the experimental construction of modal models for the application of vibration absorption schemes.

Keywords: Modal analysis, impact hammer, curve fitting, peak pickin

1. Introducción

1.1. Planteamiento del problema

Dada una estructura ingenieril (elementos estructurales como: patines, gabinetes de montaje, estructuras tipo edificio, sistema rotor-chumacera) se determinará el modelo modal de su respuesta vibratoria (caracterización dinámica en términos de frecuencias naturales, razones de amortiguamiento y patrones de deformación) a partir de la aplicación de la técnica experimental basada en la prueba con martillo de impacto, en conjunto con la evaluación de, por lo menos, dos métodos de extracción de parámetros basados en el dominio de la frecuencia como son: a) Peak Picking, b) curve fitting. (ver Figura 1)

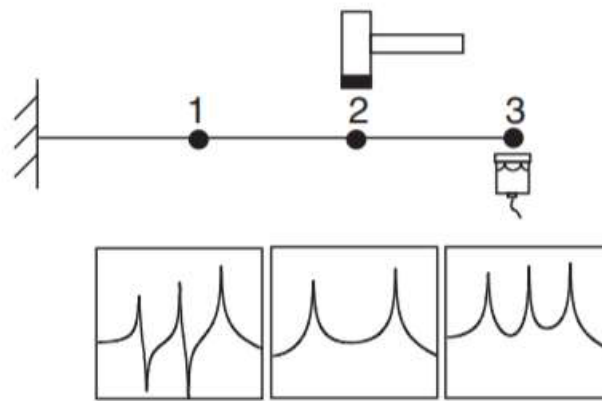


Figura 1. Diagrama esquemático de la prueba con martillo de impacto
1-sistema de estudio, 2-martillo de impacto (entrada), 3-Sensor (salida).

1.2. Justificación

El análisis modal experimental es una herramienta tecnológica de gran relevancia en la actualidad, debido a que su objetivo principal es la validación de los modelos matemáticos que describen el comportamiento dinámico de una muy amplia variedad de sistemas y estructuras mecánicas, cuya aplicación también es de la más amplia diversidad (industria automotriz, herramientas eléctricas, ingeniería civil, diseño mecánico, absorción de vibraciones, aeroespacial, etc.). En particular, la técnica de análisis modal experimental basada en el instrumento de laboratorio denominado martillo de impacto, es ampliamente utilizada en el desarrollo experimental de modelos dinámicos de sistemas mecánicos, altamente descriptivos en el contexto de las vibraciones. La técnica de martillo de impacto tiene la característica principal de requerir un solo sensor y una sola fuente de

excitación. Esta simplicidad, respecto de otras técnicas similares de análisis de vibraciones que requieren de fuentes de excitación más sofisticadas, hacen de la técnica de análisis modal basada en el uso del martillo de impacto, una técnica portátil, factible de ser aplicada en sitio sin la necesidad de cuantificar numerosas referencias o salidas que implican el uso de múltiples sensores cuya sincronización no siempre resulta sencilla. Estas características altamente positivas que son propias de la prueba con martillo de impacto solo son aprovechadas cuando la técnica se ejecuta, bajo la debida adaptación al contexto de cada caso de estudio y en pleno conocimiento y consideración de las limitantes que la misma tiene, por su propia naturaleza simple.

La reciente adquisición de equipo (acelerómetros piezoeléctricos, martillo de impacto, sistema de adquisición de datos) especializado y de alta calidad por parte de la División de Estudios de Posgrado e Investigación del Instituto Tecnológico de Pachuca permitirá la correcta evaluación de la técnica de análisis modal experimental propuesta, en un contexto que combina lo académico con el manejo de equipo profesional de adquisición de datos que cumple con altos estándares de calidad y posee certificados de calibración oficiales.

1.3. Objetivos

1.3.1. Objetivo General

Generar una experiencia documental de la aplicación de la técnica de análisis modal experimental basada en la prueba con martillo de impacto que aporte conocimientos prácticos acerca de las principales ventajas y limitaciones de esta técnica en particular.

1.3.2. Objetivos específicos

- Rediseñar y llevar a cabo los cambios pertinentes a las posibles plataformas experimentales que serán utilizadas en el presente trabajo de investigación (sistema rotor-chumacera y estructuras mecánicas flexibles discretizadas en diferentes grados de libertad).
- Aplicar de forma experimental la técnica en conjunto con métodos numéricos que permitan la construcción de modelos modales.
- Evaluar una técnica de extracción de parámetros modales en el dominio de la frecuencia de un grado de libertad y una de múltiples grados de libertad en las plataformas experimentales.

1.4. Hipótesis

La técnica de análisis modal, basada en el instrumento tecnológico conocido como martillo de impacto, es ampliamente utilizada en el desarrollo experimental de modelos dinámicos de sistemas mecánicos, cuyas características y aplicaciones son tan variadas que abarcan desde los sistemas mecatrónicos utilizados para la absorción de vibraciones hasta la caracterización de la respuesta dinámica de las estructuras civiles. El método de martillo de impacto tiene la característica principal de requerir un número mínimo de sensores y una sola fuente de excitación [1,2,3].

Esta simplicidad, respecto de las técnicas de análisis de vibraciones que requieren de fuentes de excitación más sofisticadas, hace de la técnica de análisis modal basada en el uso del martillo de impacto un proceso portátil y factible de ser aplicada en sitio, sin la necesidad de cuantificar numerosas referencias o salidas que implican el uso de múltiples sensores, cuya sincronización no siempre resulta sencilla. Estas características altamente positivas de la prueba con martillo de impacto solo son aprovechadas cuando la técnica se ejecuta bajo la debida adaptación al contexto de cada caso de estudio, en pleno conocimiento y consideración de las limitantes que la misma tiene a causa de su naturaleza simple.

La evaluación experimental de la técnica de análisis modal trae consigo la determinación puntual de dichas limitantes y su nivel de influencia en el desempeño final del método en casos de estudio que, si bien son casos académicos y concretos, pueden extenderse a otros casos análogos de mayor complejidad y diferente aplicación.

2. Estado del arte

El análisis modal experimental (EMA por sus siglas en inglés) ha cobrado relevancia dada su versatilidad y aplicaciones en estructuras de interés. En [1] reportan los resultados del EMA para la obtención de parámetros para la simulación de una estructura, posteriormente escalaron los modos de vibración a partir de la estimación de los residuos de la descomposición de la función de respuesta de frecuencia (FRF por sus siglas en inglés) de las mediciones. Y por último aplicaron la metodología a una estructura que actualmente se encuentra en uso (pasarela peatonal del Museo de la Ciencia de Valladolid, España). Como aporte lograron realizar la simulación de la respuesta dinámica sin la necesidad de usar la técnica conocida como actualización del modelo de elemento finito (FEM Updating en inglés)

En [2] se presenta un nuevo enfoque de la normalización de masa, desplazamiento y modos de deformación en un análisis modal experimental, logrando con esto eliminar la necesidad del uso de un sensor de movimiento. Modificaron la estrategia de cambio de masa usado en el análisis modal operacional (OMA por sus siglas en inglés) para ser usado en el EMA por deformaciones, de manera paralela investigaron los efectos de la precisión del enfoque propuesto.

En [3] se desarrolla un sistema de impacto automático para usar en lugar de la prueba con martillo de impacto en un EMA convencional y se demuestra la capacidad del sistema para alcanzar resultados similares al método tradicional, en términos de su capacidad de generar una fuerza de impacto única con una frecuencia natural similar.

En [4] se compara el condicionamiento numérico, la estabilidad y la estimación de los parámetros modales entre los modelos determinístico y estocástico del análisis modal experimental y se obtiene que los métodos de primer orden tienden a estar mejor condicionados con menos número de condiciones que los basados en modelos de polinomiales de alto orden.

En [5] se determinaron de manera experimental los parámetros modales para 2 vigas en voladizo de igual longitud y sección transversal, cuyos materiales fueron acero dulce y aluminio, usando como fuente de excitación la herramienta conocida como martillo de impacto. Posteriormente se comparan los resultados obtenidos con los valores calculados teóricamente demostrando la similitud entre ambos métodos. Se encuentra que los errores se debían a pequeñas variaciones del módulo de Young y de las dimensiones de la viga. Y se llega a la conclusión de que la frecuencia

natural y el amortiguamiento del aluminio es mayor a la del acero dulce para la misma sección transversal y longitud.

En [6] se calcula la respuesta dinámica de tres aisladores en estado libre a cualquier condición de carga generalizada, a partir de las propiedades modales obtenidas mediante la medición de la FRF y se demuestra que la transmisibilidad de acción de los aisladores para una fuerza aplicada de manera central proviene directamente de los parámetros de cuatro polos, mientras que se encuentran con problemas para definir la transmisibilidad de una fuerza descentrada.

En [7] los autores presentan una técnica de identificación en línea de parámetros modales para sistemas mecánicos lineales o predominantemente lineales de múltiples grados de libertad por medio de un esquema de estimación del tipo algebraico para el caso de análisis modal experimental con excitación del tipo impacto basado en herramientas matemáticas como el cálculo operacional de Mikusiński y el álgebra lineal. Posteriormente se evalúa el esquema de manera experimental aplicándola en una estructura tipo edificio de tres niveles con actuador piezoeléctrico adjunto una de sus columnas.

En [8] se propone el uso de hardware y software de código abierto integrados en un sistema de rotor-chumacera experimental utilizado para enseñar los fundamentos del análisis de vibraciones. Obtuvieron rangos de frecuencia para el comportamiento dinámico utilizando el método de elementos finitos para realizar un análisis modal. En este estudio se considera oportuno comparar los resultados obtenidos por el software con un método experimental para proporcionar a los estudiantes diferentes herramientas para realizar pruebas modales en diferentes entornos.

3. Marco teórico

3.1. Sistemas de un grado de libertad

Para que un estudio de vibraciones de un sistema dinámico sea posible es esencial conocer cuántos grados de libertad tiene antes de proceder con el análisis. El número de grados de libertad de un sistema vibratorio está definido por el número mínimo de coordenadas independientes requeridas para determinar completamente el movimiento de todas las partes del sistema para cualquier instante [9].

A pesar de que muy pocas estructuras pueden modelarse de manera realista mediante un sistema de un solo grado de libertad (Single Degree Of Freedom, SDOF por sus siglas en inglés), las propiedades de este sistema son importantes dado que las de un sistema de múltiples grados de libertad (Multi-Degree Of Freedom, MDOF por sus siglas en inglés) que es más complejo pueden ser representadas como la superposición lineal de una serie de características de un sistema SDOF [10].

En la figura 2 se presenta el modelo de un sistema SDOF. Donde m es la masa centralizada, c es el amortiguamiento viscoso, k es la rigidez lineal con una $x(t)$ describiendo el desplazamiento debido a la aplicación de una fuerza $f(t)$. Este es el modelo más básico y se utilizará como punto de partida para la teoría aquí esbozada. Solo se consideran supuestos lineales para el desarrollo de estas ecuaciones [11].

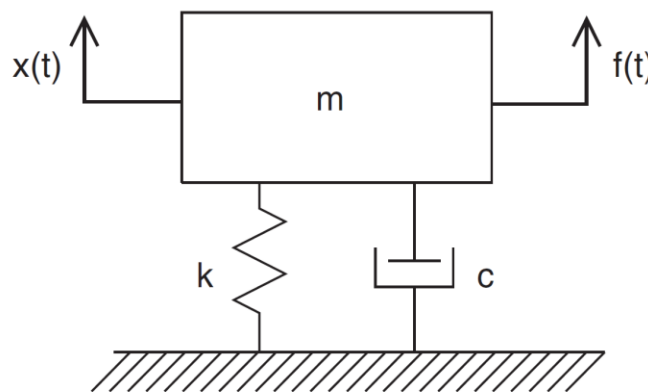


Figura 2. Modelo de un sistema SDOF [11].

A partir de este modelo se obtienen las ecuaciones de movimiento 3.1a y 3.1b, asumiendo que la masa del sistema se considera centralizada, la rigidez del resorte es proporcional al desplazamiento (resorte lineal) y que el amortiguador es proporcional a la velocidad [11].

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + c \frac{dx}{dt} + kx = f(t) \quad (3.1a)$$

Ecuación que puede ser reescrita como

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = f(t) \quad (3.1b)$$

3.1.1. Vibración libre de un sistema de un grado de libertad

Cuando un sistema se encuentra en vibración libre, tenemos que $f(t)$ es igual a cero, lo cual se podría entender como la ausencia de excitación. De esta manera al retomar la ecuación 3.1b nos queda la siguiente EDO homogénea [12]

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0 \quad (3.2)$$

Al resolver tenemos que las soluciones de esta ecuación característica están dadas por [11]

$$P_{1,2} = -\frac{c}{2m} \pm \sqrt{\left(\frac{c}{2m}\right)^2 + \frac{k}{m}} \quad (3.3)$$

La ecuación 3.3 puede ser evaluada para tres distintos casos y para esto se toma en cuenta la relación de amortiguamiento que se representa de la siguiente manera [12]

$$\zeta = \frac{c}{c_c} \quad (3.4)$$

Las características de la respuesta dependerán de los valores que tome ζ . Respecto a esto las tres situaciones de interés posible son: [12]

$\zeta < 1$ Sistema sub amortiguado, que se relaciona comúnmente con un comportamiento oscilatorio.

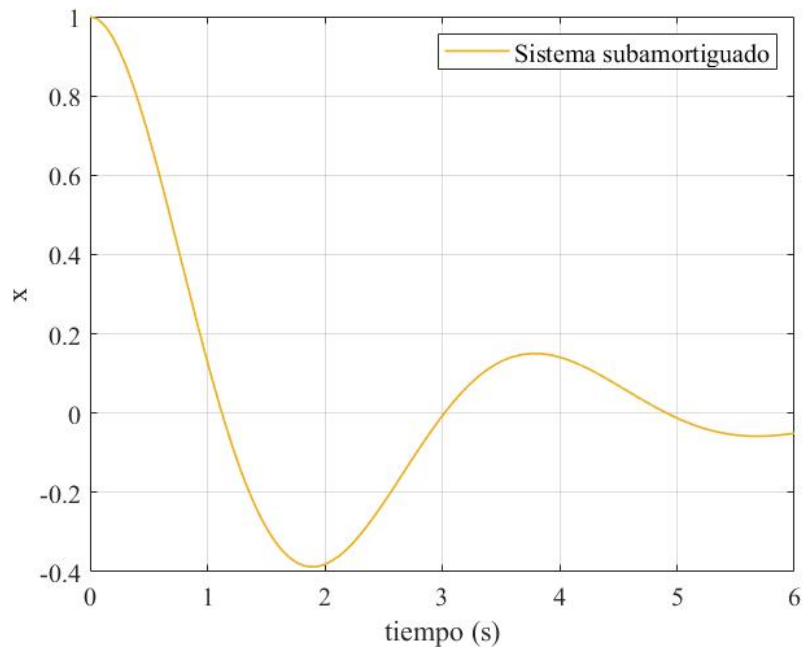


Figura 3. Oscilación de un sistema sub amortiguado.

$\zeta = 1$ Sistema críticamente amortiguado; presenta cierta similitud con la gráfica del sistema sobre-amortiguado, pero es el sistema que más rápido decae.

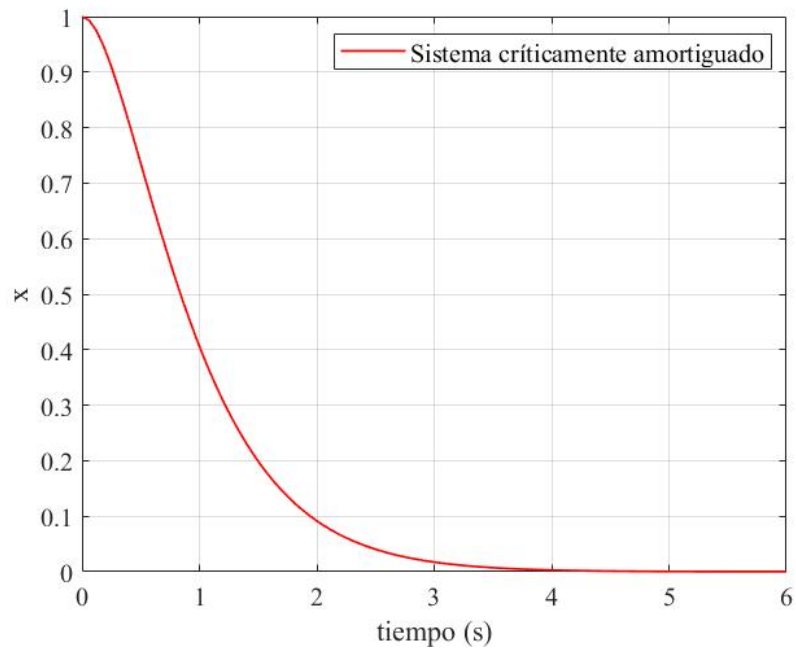


Figura 4. Oscilación de un sistema críticamente amortiguado.

$\zeta < 1$ Sistema sobre amortiguado; cuando la amortiguación es grande, la fuerza de fricción es tan grande que el sistema no puede oscilar (ver figura 5)

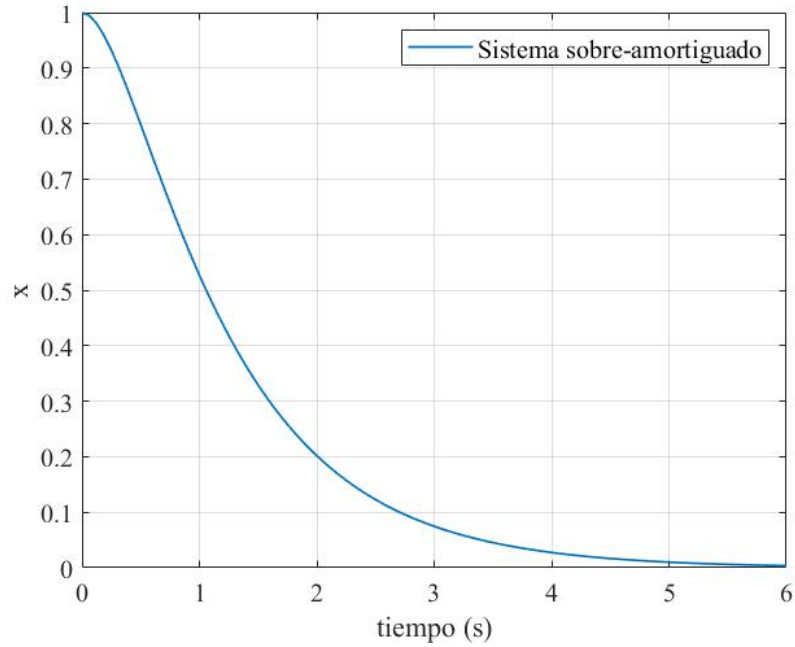


Figura 5. Oscilación de un sistema sobre-amortiguado.

Para una mejor comparación de los 3 casos se presenta en la figura un superposición de estas gráficas

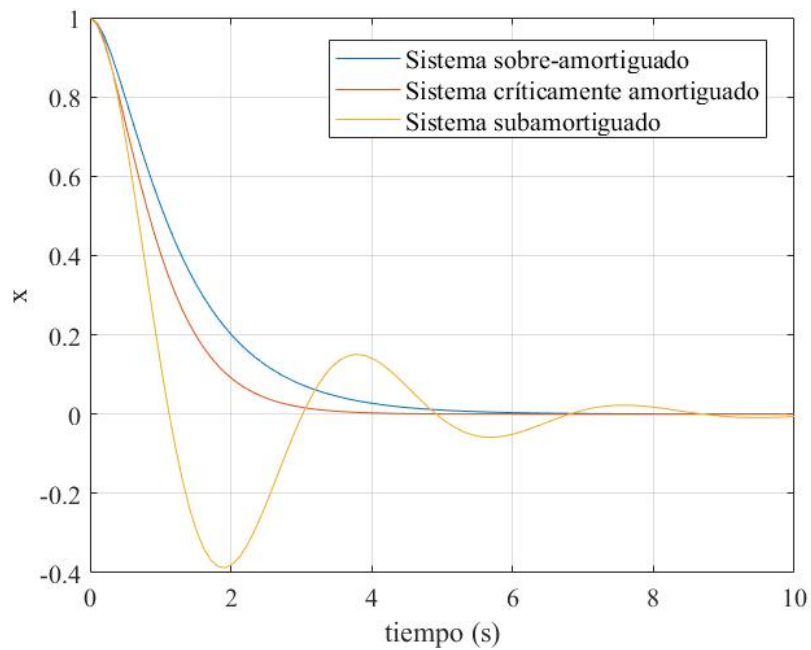


Figura 6. Comparación de la oscilación de un sistema sub, críticamente y sobre amortiguado.

A pesar de que todas las soluciones son relevantes, solo se considerará el caso del sistema sub amortiguado debido a que esta es una solución importante para quien realiza el análisis dinámico y para el análisis modal experimental. Para este caso las soluciones pueden expresarse se manera simplificada como: [11]

$$P_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm \sqrt{(\zeta\omega_n)^2 + \omega_n^2} = -\sigma \pm j\omega_d \quad (3.5)$$

Donde:

$\sigma = \zeta\omega_n$ factor de amortiguamiento

$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}}$ frecuencia natural

$\zeta = \frac{c}{c_c}$ porcentaje de amortiguamiento crítico

$c_c = 2m\omega_n$ amortiguamiento crítico

$\omega_d = \omega_n\sqrt{1 - \zeta^2}$ frecuencia natural amortiguada

3.1.2. Vibración forzada de un sistema de un grado de libertad

Un caso importante por considerar es el de la respuesta a una excitación armónica, dado que este tipo de excitación es frecuente en sistemas de ingeniería. Las fuerzas armónicas son comunes en máquinas rotatorias, y son producidas por una masa desbalanceada. Una buena comprensión de la respuesta del sistema a este tipo de excitación nos ayudará a entender mejor el comportamiento del sistema a otros tipos de excitación. La excitación armónica puede ocurrir en forma de fuerza o de desplazamiento [11,12].

Sin la necesidad de desarrollar el proceso matemático podemos escribir la respuesta de un sistema de un grado de libertad debido a una entrada del tipo armónica en términos de desplazamiento y fase (con la fuerza que precede al desplazamiento) como: [11]

$$x = \frac{F_0}{\sqrt{(k - m\omega^2)^2 + (c\omega)^2}} ; \varphi = \tan^{-1}\left(\frac{c\omega}{k - m\omega^2}\right) \quad (3.6)$$

3.2. Sistemas de múltiples grados de libertad

Para muchos sistemas estructurales y mecánicos se necesita más de una coordenada para describir su movimiento y vibración de manera adecuada [9]. El número de parámetros independientes requeridos para definir la distancia de todas las masas respecto de su posición de referencia es llamado el número de grados de libertad n y se representa en la figura 7 [13,14]. Si un sistema de n masas está restringido a moverse solamente en traslación en las direcciones X y Y , el sistema tiene $2n$ grados de libertad. Para cada grado de libertad se puede escribir una ecuación diferencial distinta [15]. De este modo la ecuación general del sistema tendrá la forma [11,13]:

$$[M]\{\ddot{x}\} + [C]\{\dot{x}\} + [K]\{x\} = \{F(t)\} \quad (3.7)$$

Donde M , C y K son las matrices de dimensiones $n \times n$ de masa, amortiguamiento y rigidez, respectivamente y los vectores F y x con sus respectivas primera y segunda derivada son los vectores de fuerza, velocidad, aceleración y posición de tamaño $n \times 1$ [11,13].

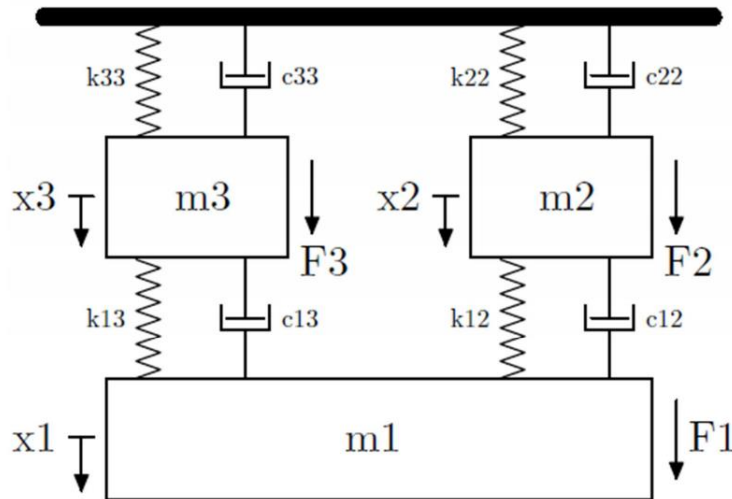


Figura 7. Sistema de n grados de libertad [13].

3.3. Análisis modal

3.3.1. Definición de análisis modal

El análisis modal es un procedimiento por el cual se describe una estructura en términos de frecuencias naturales, factores de amortiguamiento y patrones de desplazamiento conocidos como formas modales. Esta información es empleada para formular un modelo analítico que simule el comportamiento dinámico de determinados sistemas mecánicos y estructurales [9,11].

El análisis modal se basa en el hecho que la respuesta vibratoria de un sistema mecánico lineal invariante en el tiempo puede ser expresado como la combinación lineal de un conjunto de movimientos sinusoidales (que pueden ser representados por un sistema masa – resorte) los cuales se denominan modos de vibración [9].

Uno de los principales requerimientos en el tema de las pruebas modales es una completa integración de tres componentes:

- Las bases teóricas de la vibración.
- Una adecuada y precisa medición de las vibraciones.
- Un análisis realista y detallado de los datos obtenidos.

3.3.2. Función de respuesta en frecuencia FRF

El procedimiento de las pruebas modales implica medir la función de respuesta en frecuencia (FRF), que es la relación de la respuesta de salida a una fuerza aplicada en una estructura, mientras que ambas se miden simultáneamente en términos de desplazamiento, velocidad o aceleración [9,11].

La medición de las FRF se puede realizar colocando una excitación medida y localizada en la estructura en ausencia de otras excitaciones y midiendo las respuestas de vibración en una o más ubicaciones [11].

La FRF está en función de las propiedades físico-mecánicas y dinámicas del material que lo conforma, y las cuales deben permanecer invariantes con respecto al tiempo, para que la determinación de esta función tenga éxito [16].

A continuación, en la figura 1.1, se muestra un diagrama que define esta función:

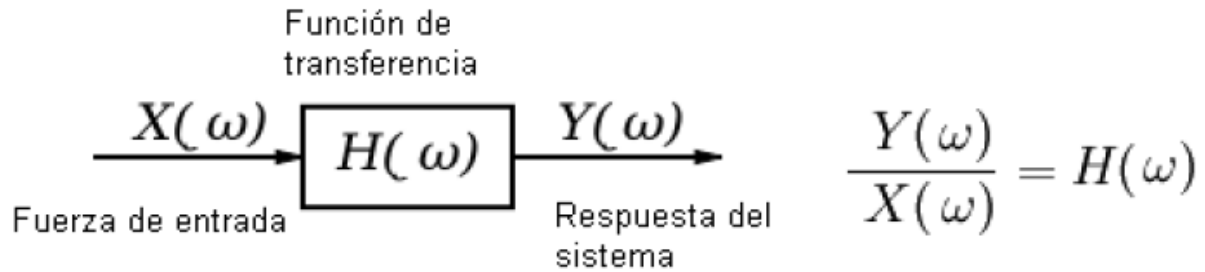


Figura 8. Diagrama de un sistema lineal y su función de respuesta [16].

3.3.3. Propiedades modales

Los análisis modales tratan de extraer las propiedades modales de una estructura (formas modales, frecuencias a las que se dan y factores de amortiguamiento) mediante la toma de medidas en la respuesta dinámica de la estructura a acciones externas [17].

3.3.3.1. Forma modal

La forma modal es un patrón de vibración, el cual se define como las posibles formas geométricas que adopta un sistema mecánico al estar sometido a vibraciones a una determinada frecuencia [16,17].

Las formas modales se determinan mediante la solución de ecuaciones homogéneas y generalmente son reales solo para ecuaciones auto adjuntas [18].

Consideremos un sistema que consta de una placa delgada y plana, libremente apoyada, a la cual se le aplica una fuerza constante en una esquina, mientras que la respuesta será medida por un acelerómetro sujeto en otra esquina, como se muestra en la figura 1.2 [11].

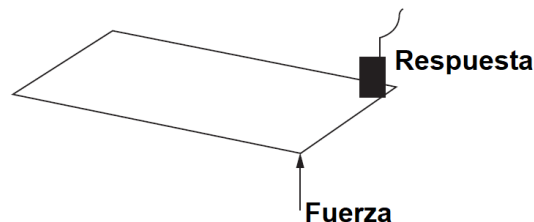


Figura 9. Modelo simple de excitación-respuesta de una placa [11].

La estructura tendrá un patrón de deformación muy específico dependiendo de la frecuencia en la que nos ubiquemos mientras medimos la respuesta. La figura 1.3 muestra los patrones de deformación o formas modales que resultarán cuando la excitación coincida con una de las frecuencias naturales del sistema [11].

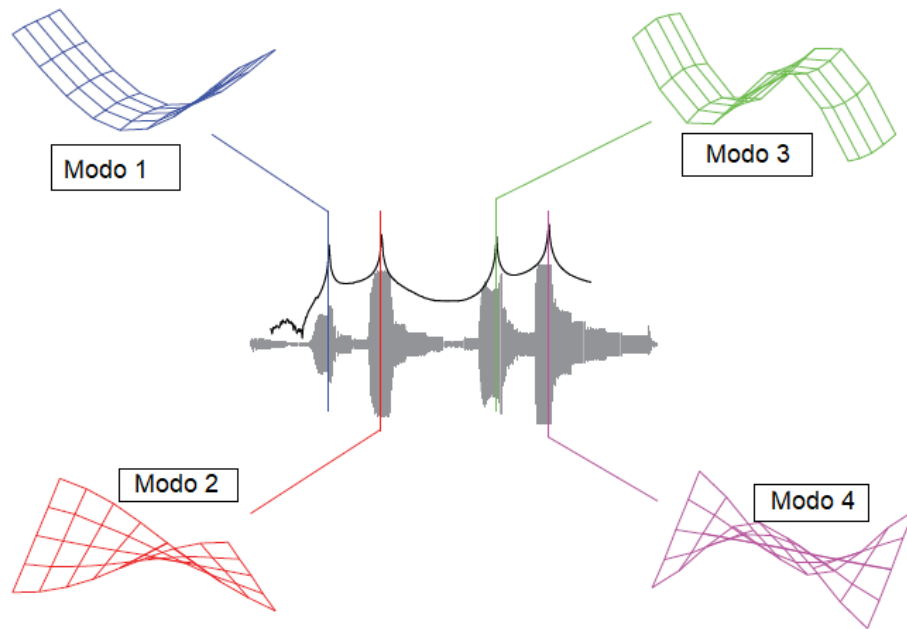


Figura 10. Formas modales de una placa simple [11].

Notemos que tanto el modo 1 como el modo 3 presentan un patrón de deformación flexionante, mientras que en los modos 2 y 4 se tiene un patrón de deformación torsionante.

3.3.3.2. Frecuencia natural

La frecuencia natural es la frecuencia a la que un sistema mecánico seguirá vibrando, después que se quita la señal de excitación [14]. Es importante resaltar que un sistema presenta tantas frecuencias naturales como grados de libertad contenga.

En la figura 1.4 se presenta la gráfica de la función de respuesta del sistema presentado en la figura 1.2, donde se aprecian claramente 4 picos que corresponden a una frecuencia natural específica del sistema [11].

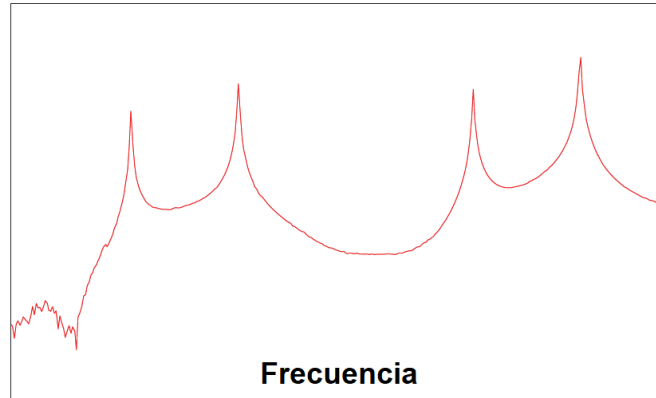


Figura 11. Función de respuesta en frecuencia de una placa simple [11].

3.3.3.3. Amortiguamiento

El amortiguamiento es el fenómeno por medio del cual la energía mecánica es disipada (usualmente por la conversión en energía interna) en sistemas dinámicos. Este se mide como porcentaje respecto de un parámetro denominado amortiguamiento crítico. El conocimiento de los niveles de amortiguamiento en este tipo de sistemas es básico en los ensayos modales de los sistemas mecánicos [16,17].

3.4. Análisis Modal Experimental (EMA)

El análisis modal experimental es un proceso para determinar los parámetros modales de un sistema lineal e invariante en el tiempo. Regularmente estos parámetros son obtenidos mediante un análisis de elemento finito y suele ocuparse el EMA (Experimental Modal Analysis, por sus siglas en inglés) para la verificación y/o corrección de los resultados del enfoque analítico. A menudo no es posible obtener un modelo analítico y los parámetros modales son determinados experimentalmente, quedando de esta manera como un modelo para futuras evaluaciones [15].

3.5. Visión general del Análisis Modal Experimental

El EMA se utiliza principalmente para explicar problemas dinámicos cuya solución no es obvia para la intuición, para modelos analíticos o para la experiencia previa. El proceso para determinar los parámetros modales a partir de datos experimentales involucra varias fases, una delimitación posible de estas son: [15]

- Teoría del análisis modal

Esto implica comprender los conceptos y la teoría fundamentales relacionados con el análisis modal, incluidas las características de los sistemas dinámicos, las frecuencias naturales, las formas modales, el amortiguamiento, así como la importancia de estos parámetros para la caracterización del comportamiento de estructuras o sistemas.

- Métodos del análisis modal experimental

Familiarizarse con diversas técnicas y métodos experimentales usados para llevar a cabo este análisis. Estos métodos pueden incluir prueba de impacto, medición de respuesta y diversas técnicas de procesamiento y adquisición de datos.

- Adquisición de información modal

Planificar y realizar los experimentos pertinentes para obtener los datos necesarios. Esto implica seleccionar ubicaciones de medición apropiadas, generar fuerzas de excitación y recopilar los datos de salida mediante el uso de sensores. Esto también implica consideraciones sobre el tipo de excitación, tipo de sensores, sistemas de adquisición de datos y la calibración de estos.

- Estimación de los parámetros modales

En este punto se necesitan procesar y analizar los datos adquiridos para estimar los parámetros modales, esto incluye la identificación de las frecuencias naturales, la determinación de la forma o patrón de movimiento asociado a cada modo.

- Presentación y validación de los datos modales

Finalmente se comunican los resultados de forma clara y significativa para lo cual se generan animaciones o visualizaciones de las formas de modo, la creación de gráficos de las FRF's, y comparar los resultados experimentales con modelos analíticos o numéricos de estar disponibles.

3.5.1. Consideraciones básicas

Hay cuatro consideraciones básicas para realizar un análisis modal experimental en cualquier estructura, y se presentan a continuación [15].

La estructura se considerará lineal: la respuesta de la estructura a cualquier combinación de fuerzas simultáneamente aplicadas es la suma de las respuestas individuales de cada fuerza actuando sola.

La estructura es constante en el tiempo: los parámetros a determinar son constantes.

La estructura obedece la reciprocidad de Maxwell: la fuerza aplicada a un sistema de n grados de libertad causa una respuesta m de grados de libertad y viceversa.

La estructura es observable: las medidas de entrada y salida tomadas contienen la información suficiente para generar un modelo adecuado de la estructura.

3.5.2. Técnicas de excitación por impacto

Existen diversas alternativas para excitar una estructura, pero para realizar un análisis modal experimental generalmente se usan técnicas del tipo impacto u oscilación [11]. El ensayo de impacto es uno de los más comunes debido a la sencillez que presenta en cuanto a hardware y rapidez de aplicación así también debido a su bajo coste [13].

En el ensayo son necesarios dos acelerómetros, uno para medir la fuerza en el martillo y otro para la respuesta del sistema. El ruido electrónico en estos sensores debe ser minimizado lo máximo posible para obtener una correcta lectura de los datos. Si las amplitudes de las respuestas registradas por los acelerómetros son suficientemente grandes con respecto al ruido, el efecto de este será despreciable [13].

3.5.3. Modelo matemático de una excitación por impacto

Para una mejor comprensión de la dinámica del impacto en la figura 12 se presenta un diagrama esquemático simple, del cual se desprende de la solución de un sistema lineal con un grado de libertad.

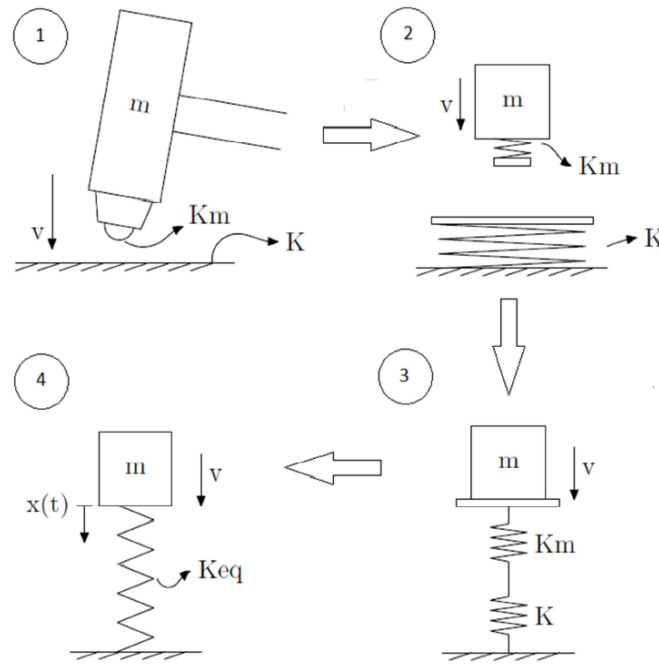


Figura 12. Diagrama esquemático de una prueba de impacto [13].

El modelo consiste en una masa m que se mueve con una velocidad previa al impacto v y con un resorte unido a la misma, que representa la rigidez de la punta K_m . La masa impacta sobre una superficie de rigidez K .

Al momento del impacto el resorte de la masa hace contacto con el resorte de la superficie y ambos sufren una compresión. Es a partir de aquí que el sistema se puede modelar como una masa adherida a un solo resorte de rigidez equivalente K_{eq} que se empieza a comprimir con una velocidad inicial v . La rigidez K_{eq} se calcula como la suma de dos resortes en serie:

$$K_{eq} = \frac{K_m K}{K_m + K} \quad (3.8)$$

Reescribiendo la ecuación 1.2 para este caso se tiene:

$$m\ddot{x} + K_{eq}x = 0 \quad (3.9)$$

La ecuación 1.8 solo es válida para $K_{eq}x > 0$, que es cuando el resorte se encuentra en compresión. Esto quiere decir que cuando el resorte regrese a su longitud original no se entenderá

posteriormente, en vez de esto la masa se despegará con una velocidad de igual magnitud a la que llevaba en el momento del impacto, esto en el supuesto de un proceso completamente isentrópico. Si se parte de las condiciones iniciales antes descritas

$$\begin{cases} x(0) = 0 \\ \dot{x}(0) = v \end{cases} \quad (3.10)$$

En función del tiempo se obtiene la siguiente solución para la fuerza

$$F(t) = K_{eq}x(t) = \text{sen}(\omega t)\sqrt{Kmv^2} \quad (3.11)$$

Para $0 < t < \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{m}{K_{eq}}}$, siendo $\omega = \sqrt{\frac{K_{eq}}{m}}$

Como resultado de las expresiones resultantes del modelo se deduce que la duración solo depende de la masa y de la rigidez equivalente. A menor masa del martillo y mayor rigidez, el ancho del impulso será más breve. Por otro lado, la amplitud aumenta conforme lo hacen la masa, la rigidez y la velocidad [13].

3.5.4. Martillo de impacto

Generalmente las pruebas de tipo impacto se llevan a cabo usando un martillo instrumentado, el cual consiste en un martillo con un transductor de fuerza piezoeléctrico colocado en la cabeza de la herramienta y se puede apreciar en la figura 14



Figura 13. Martillo de impacto instrumentado [13].

El transductor de fuerza puede equiparse con puntas de impacto de distinta dureza para variar el rango máximo de frecuencias excitadas en el sistema que recibe los impactos. Hay muchos materiales diferentes de puntas que se pueden utilizar y van desde goma muy blanda hasta cápsulas

de aire, puntas de plástico y puntas de metal, lo que permite obtener rangos de frecuencia muy bajos, así como rangos de frecuencia muy altos [11,13].

3.5.4.1. Selección de punta

Un factor importante por considerar es la selección de la punta. El contenido del espectro de frecuencia de la fuerza de entrada depende en gran medida del tiempo de duración del impacto aplicado al sistema o tiempo de pulso. Esto se controla principalmente por la rigidez de la punta del martillo. Por lo general mientras mayor sea dureza de la punta, el espectro de frecuencia excitado será más amplio, y viceversa. Esto se puede apreciar de mejor manera en la figura 14, con la comparación de 4 materiales distintos de puntas en cuanto al tiempo de pulso y espectro de frecuencias para un martillo impactando un bloque de metal [11].

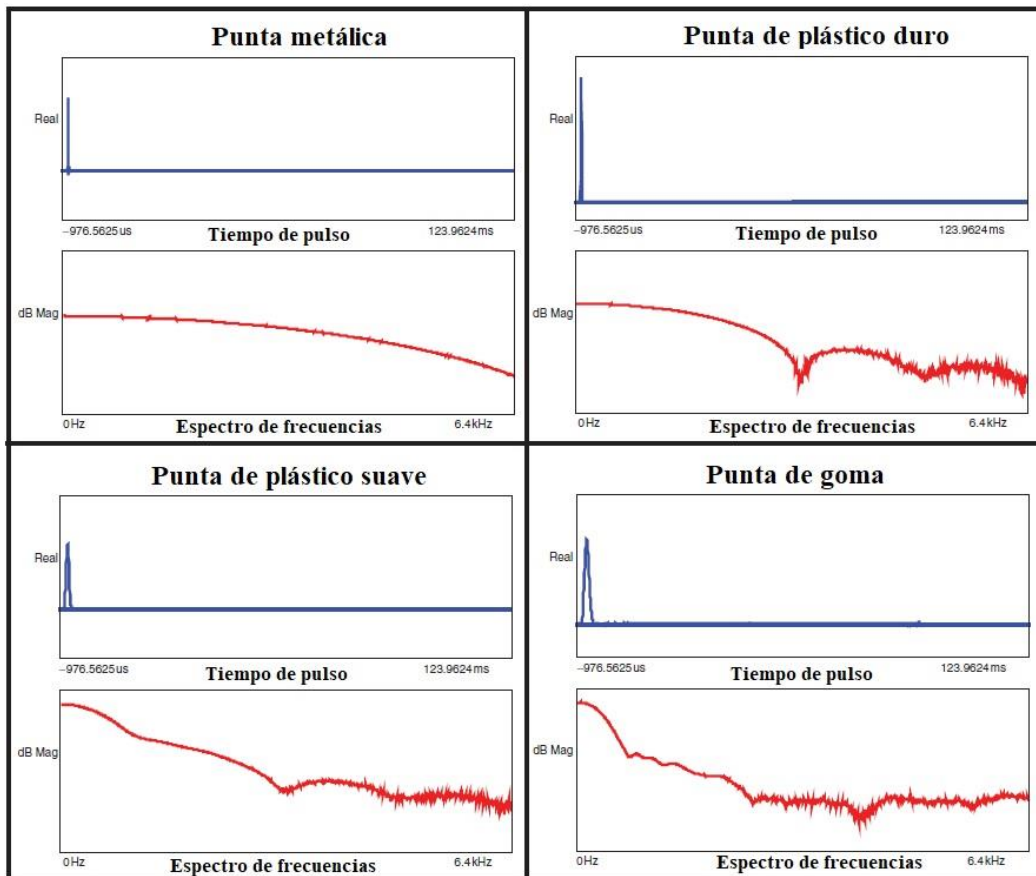


Figura 14. Tiempo de pulso de entrada y espectro de frecuencias resultante para una punta metálica, una punta de plástico duro, una punta de plástico suave y una punta de goma [11].

4. Materiales y métodos

El trabajo de tesis propuesto en este documento se centró en la evaluación de la técnica de análisis modal de martillo de impacto en estructuras, para la construcción de modelos modales, aplicando el procesamiento de datos experimentales por medio de la aplicación de técnicas para la extracción de parámetros modales. En la figura 15 se muestra un diagrama de flujo simplificado de la aplicación de la técnica de análisis modal experimental basada en excitación con martillo de impacto:

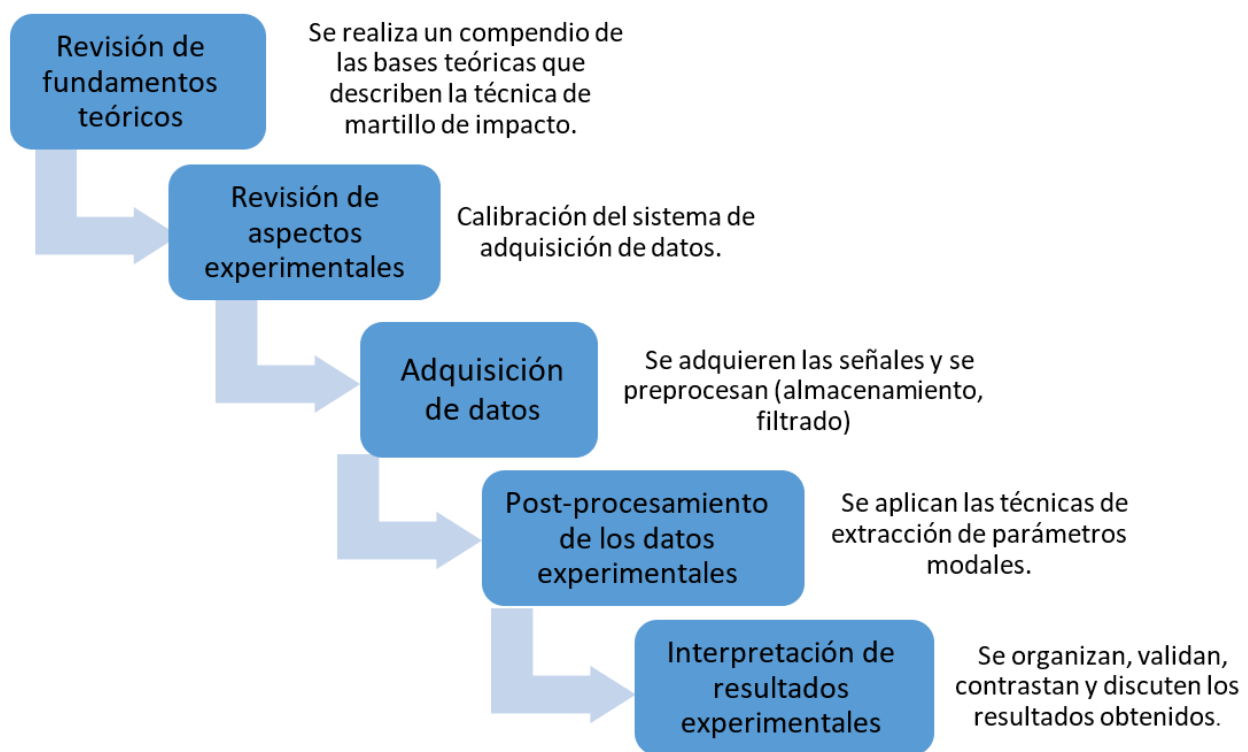


Figura 15. Diagrama de flujo sobre la metodología para la aplicación de la técnica de análisis modal experimental basada en excitación con martillo de impacto.

Las etapas de la metodología se describen a continuación:

- **Revisión de fundamentos teóricos:** Esta etapa incluyó una revisión del estado del arte de la aplicación de la técnica y se realizó el asentamiento de las bases matemáticas que justifican su utilidad. En esta etapa se elaboró el compendio del estado del arte de la teoría y artículos de investigación que describan la evaluación de la técnica en aplicaciones específicas.

- Revisión de aspectos experimentales: En esta etapa se calibró el equipo de adquisición de datos: sistema electrónico de muestreo, acelerómetros y martillo de impacto, por medio de pruebas para la calibración, las pruebas del equipo se realizaron en geometrías básicas piloto como vigas en voladizo de perfil simétrico.
- Adquisición de datos: En esta etapa se eligieron los especímenes de prueba: Circuito eléctrico de segundo orden, viga de acero inoxidable, gabinete de computadora, y se aplicó la técnica para recopilación de los datos experimentales proporcionados por el equipo de adquisición de datos. Se calibraron los filtros y las frecuencias de muestreo específicas de cada caso de estudio.
- Post-procesamiento de los datos experimentales: En esta fase del trabajo de tesis se aplicaron las técnicas de extracción de parámetros modales reportadas en la literatura, por lo menos dos técnicas diferentes: Peak Picking y ajuste de curvas general.
- Interpretación de resultados experimentales: Finalmente en esta etapa se compararon los resultados experimentales con los obtenidos con simulaciones numéricas, con un software especializado como ANSYS Workbench y Matlab para hacer la comparación de resultados experimentales con los numéricos.

El presente trabajo se limitó a la aplicación de la técnica de identificación de parámetros modales basada en excitación con martillo de impacto, haciendo uso del equipo de laboratorio con que se cuenta actualmente: martillo instrumentado con sensor de fuerza, puntas de diferente dureza y sensores de aceleración de tipo IEPE. Como trabajo complementario, se utilizan sensores piezoeléctricos de bajo costo, aplicados al análisis de un gabinete de computadora, para evaluar su desempeño como potenciales sensores para aplicaciones de monitoreo estructural.

4.1. Evaluación de técnicas de identificación de parámetros modales

Se realizó la evaluación de técnicas de análisis modal de impulso-respuesta y de caída libre en sistemas vibratorios para la construcción de modelos modales esto mediante la aplicación del post procesamiento mediante técnicas de extracción de parámetros modales en el dominio de la frecuencia a datos experimentales. Para la extracción de parámetros modales se utilizaron las técnicas de Peak Picking y Circle fit.

4.1.1. Técnicas de análisis de respuesta transitoria

Considere una señal general $y(t)$ que proviene de la respuesta transitoria de un sistema vibratorio (mecánico o eléctrico), es posible determinar la representación modal de tal señal, es decir, una versión desacoplada de la salida obtenida utilizando un modelo analítico del sistema. La representación esquemática del análisis modal de una señal transitoria se presenta como una combinación lineal del contenido armónico único que se muestra en la figura 16.

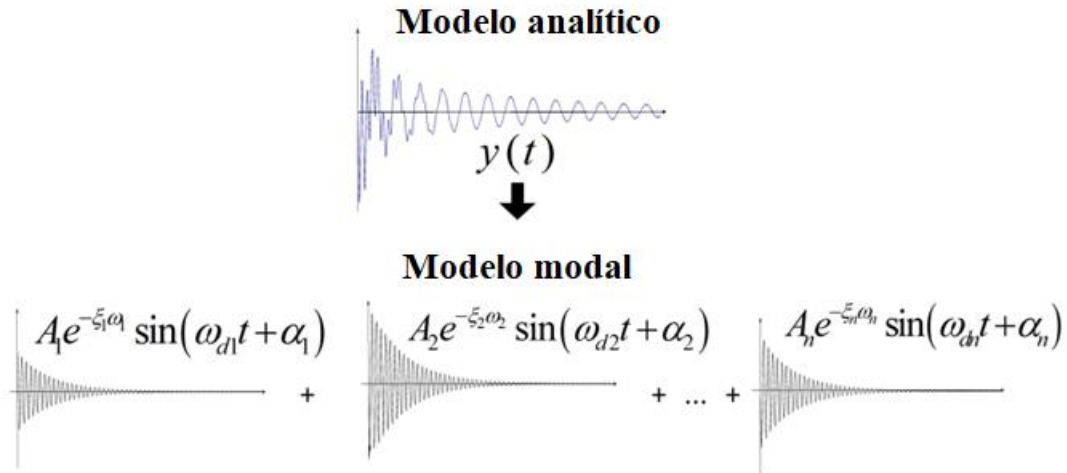


Figura 16. Análisis modal de una señal eléctrica.

La señal $y(t)$ es considerada cuantificable o medible en un intervalo de $[t_0, t_1]$ y puede ser representado como [7].

$$y(t) = \sum_{i=1}^n A_i e^{-\xi_i \omega_i} \sin(\omega_{di} t + \alpha_i) \quad (4.1)$$

Con

$$\omega_{di} = \sqrt{1 - \xi_i^2} \omega_i \quad (4.2)$$

Donde A_i es la amplitud modal, ω_i es la frecuencia natural, ξ_i es la razón de amortiguamiento $0 < \xi_i < 1$, ω_i es la frecuencia natural amortiguada y α_i es el ángulo de fase, todos ellos asociados al i -ésimo modo de vibración. La señal $y(t)$ puede ser descrita por las expresiones:

$$A_i = \sqrt{y_{i,0}^2 + \left(\frac{\xi_i \omega_i y_{i,0} + \dot{y}_{i,0}}{\omega_{di}} \right)^2},$$

$$\alpha_i = \tan^{-1} \frac{\omega_{di}}{\xi_i \omega_i y_{i,0} + \dot{y}_{i,0}} \quad (4.3)$$

donde $y_{i,0}$ y $\dot{y}_{i,0}$ son las condiciones iniciales de cada componente armónico de la señal, ω_i y ξ_i son la frecuencia natural y la razón de amortiguamiento correspondientes. Note que los parámetros modales vienen del polinomio característico:

$$P_i = s^2 + 2\xi_i \omega_i s + \omega_i^2 \quad (4.4)$$

Las técnicas de pruebas modales se utilizan para determinar experimentalmente los parámetros modales A_i , ω_i , ξ_i y α_i para construir el modelo modal del sistema a partir de su respuesta transitoria. A continuación, se describen dos técnicas experimentales para la extracción de parámetros modales de un sistema vibratorio.

4.1.1.1. Peak Picking

El método Peak Picking también se conoce como método de potencia media [18]. Este método es muy portátil y tiene un costo computacional muy efectivo para extraer parámetros modales [9,10]. Los parámetros modales se obtienen de la función de respuesta de frecuencia como:

$$\left| A_{max} \right| = \frac{A_r}{2\omega_r^2 \xi} \quad (4.5)$$

Donde $\omega_r = \omega_{peak}$, es la frecuencia en el pico de la función de respuesta de frecuencia con una magnitud A_r , la razón de amortiguamiento ξ es, entonces calculada como:

$$\xi = \frac{\omega_b - \omega_a}{2\omega_r} \quad (4.6)$$

Con $\omega_a < \omega_b$, frecuencias donde la amplitud alcanza un valor de $|A_{a,b}| \approx 0.7071|A_r|$. La constante modal A_i está directamente relacionada con la amplitud del pico:

$$A_i = 2\alpha_r \omega_r^2 \xi_r \quad (4.7)$$

Finalmente, la fase α_i es determinada a partir de la parte imaginaria de la FRF.

4.1.1.2. Circle fit

El método de Circle fit es más complejo que Peak Picking, ya que se basa en la suposición de circularidad de FRF en la cercanía de la resonancia, en este caso, los parámetros modales están dados por:

$$\xi = \frac{\omega_a^2 - \omega_b^2}{2\omega_r \left(\tan\left(\frac{\theta_a}{2}\right) + \tan\left(\frac{\theta_b}{2}\right) \right)} \quad (4.8)$$

Donde ω_r es la frecuencia natural no amortiguada, que es determinada gráficamente por la tasa a la cual el locus, el cual es la serie de puntos sobre la circunferencia, avanza alrededor del arco circular y toma el máximo valor en la resonancia ω_r , los ángulos θ_a y θ_b se muestran en la figura 17. La constante modal A_i es necesaria para ajustar un círculo usando un conjunto de puntos cerca de la resonancia ω_r , El diámetro de tal círculo está directamente relacionado con la constante modal como:

$$A_r = D_r \omega_r^2 2\xi_r \quad (4.9)$$

Donde D_r es el diámetro del círculo obtenido por un método de ajuste como mínimos cuadrados.

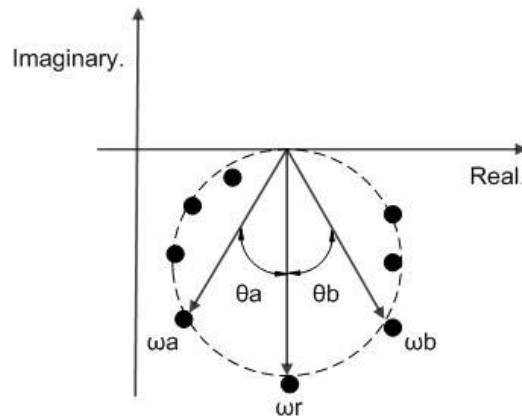


Figura 17. Circle fit: método de extracción de parámetros modales.

4.1.2. Sistema eléctrico vibratorio

Considere el sistema eléctrico que se muestra en la figura 18. Donde la dinámica del sistema acoplado se modela mediante el conjunto de ecuaciones diferenciales acopladas:

$$\begin{aligned} L_1 \ddot{i}_1 + R_1 i_1 + \frac{1}{C_1} (i_1 - i_2) &= \dot{V}_s \\ L_2 \ddot{i}_2 + R_2 i_2 + \frac{1}{C_2} (i_2 - i_3) - \frac{1}{C_1} (i_1 - i_2) &= 0 \\ L_3 \ddot{i}_3 + R_3 i_3 + \frac{1}{C_3} i_3 - \frac{1}{C_2} (i_2 - i_3) &= 0 \end{aligned} \quad (4.10)$$

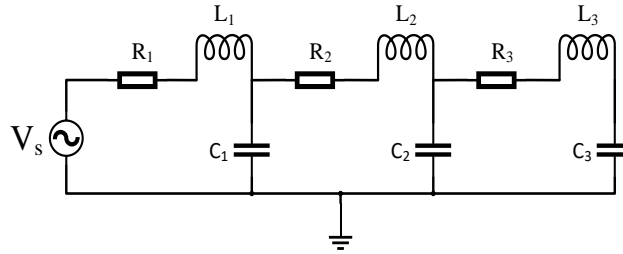


Figura 18. Sistema eléctrico vibratorio.

Donde, L_k , R_k and C_k , $k = 1, 2, 3$ son inductancia, Resistencia y capacitancia, respectivamente, i_k son las mallas de corriente y V_s es la fuente de voltaje, en adición el voltaje del capacitor está dado por:

$$v_{ck} = \frac{1}{C_k} \int i_{C_k} dt, \quad k = 1, 2, 3 \quad (4.11)$$

La representación matricial del sistema de ecuaciones (4.1), es:

$$\mathbf{L}\ddot{\mathbf{i}} + \mathbf{R}\dot{\mathbf{i}} + \mathbf{C}\mathbf{i} = \dot{V}_s \quad (4.12)$$

Donde \mathbf{L} , \mathbf{R} y \mathbf{C} son las matrices de inductancia, resistencia y capacitancia, respectivamente, con $\mathbf{L}, \mathbf{R}, \mathbf{C} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$, los vectores $\mathbf{i} = [i_1, i_2, i_3]^T$ y $\dot{V}_s = [V_s, 0, 0]^T$ son las corrientes y vectores de la fuente de voltaje, respectivamente. Las matrices de inductancia, resistencia y capacitancia están dadas por:

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} L_1 & 0 & 0 \\ 0 & L_2 & 0 \\ 0 & 0 & L_3 \end{bmatrix} \mathbf{R} = \begin{bmatrix} R_1 & 0 & 0 \\ 0 & R_2 & 0 \\ 0 & 0 & R_3 \end{bmatrix} \quad (4.13)$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \frac{1}{C_1} & -\frac{1}{C_1} & 0 \\ -\frac{1}{C_1} & \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} & -\frac{1}{C_2} \\ 0 & -\frac{1}{C_2} & \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} \end{bmatrix}$$

La representación del análisis modal del sistema (figura 18) conduce a la expresión en coordenadas principales

$$\ddot{q}_i + 2\xi_i\omega_i\dot{q}_i + \omega_i^2 q_i = \psi_{1i}\dot{V}_s$$

$$\mathbf{i}(t) = \mathbf{\Psi}\mathbf{q}(t) \quad (4.14)$$

Donde ξ_i y ω_i son la razón de amortiguamiento y la frecuencia natural como se definen en (4.4) y $\mathbf{q} = [q_1, q_2, q_3]^T$. La matriz $\mathbf{\Psi} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ contiene el espacio de la columna del eigenvector o modos de forma y es también conocida como la matriz modal. En el dominio de la frecuencia la ecuación (4.5) toma la forma:

$$(s^2 + 2\xi_i\omega_i s + \omega_i^2)Q_i(s) = \psi_{1i}\dot{V}_s(s) \quad (4.15)$$

Note que para una excitación impulsiva la fuente de voltaje $V_s = \delta(t)$ con $\delta(t) = \begin{cases} 1 & \text{if } t = 0 \\ 0 & \text{if } t \neq 0 \end{cases}$ la función de delta de Dirac, en dominio de la frecuencia, usando el operador de la transformada de Laplace $\mathcal{L}\{\cdot\}$ tenemos.

$$V_s(t) = \delta(t) \Rightarrow \mathcal{L}\{\dot{V}_s(t)\} = \dot{V}_s(s) = s \quad (4.16)$$

Por otro lado, para la condición de Free decay, que es, un cambio en las condiciones iniciales, la ecuación (4.7) toma la forma:

$$(s^2 + 2\xi_i\omega_i s + \omega_i^2)Q_i(s) = p_{0,i} + p_{1,i}s \quad (4.17)$$

Donde $p_{j,i}$, $i = 1, 2, 3, j = 0, 1$ son constantes que depende de las condiciones iniciales de corriente y voltaje de cada capacitor.

5. Resultados experimentales

Para la evaluación de la extracción de parámetros modales del circuito mostrado en la figura 18, se realizaron algunos experimentos. Los parámetros del sistema se informan en la Tabla 1. Se usaron dos excitaciones diferentes para el análisis modal experimental: impulse-response y free decay. Los parámetros modales teóricos del sistema se reportan en la Tabla 2, dichos parámetros se obtuvieron resolviendo, numéricamente, el eigen problema del sistema definido en (4.12).

Tabla 1. Parámetros del sistema.

Param. <i>i</i>	1	2	3
L	100 mH	400 mH	2 H
R	8Ω	8Ω	8Ω
C	0.1 μF	0.1 μF	0.1μF

Se utilizó un microcontrolador de 32 bits y arquitectura ARM® para generar pulsos de manera efectiva con una amplitud de 1 voltio y una duración de 100 microsegundos para emular una excitación de pulso para el circuito.

Tabla 2. Parámetro modales teóricos

Param. Modo	1	2	3
ω_{di} [Hz]	310.7	795.8	1829
ξ_i [%]	2.8	2.9	3.1
A_i [V]	1.3	1.98	1.7

5.1. Prueba respuesta al impulso

La respuesta del sistema se caracterizó tomando medidas del voltaje de los capacitores a una frecuencia de muestreo 1×10^5 muestras por segundo (100 KSPS). La respuesta del sistema y la señal de excitación en el dominio del tiempo se muestran en la figura 19.

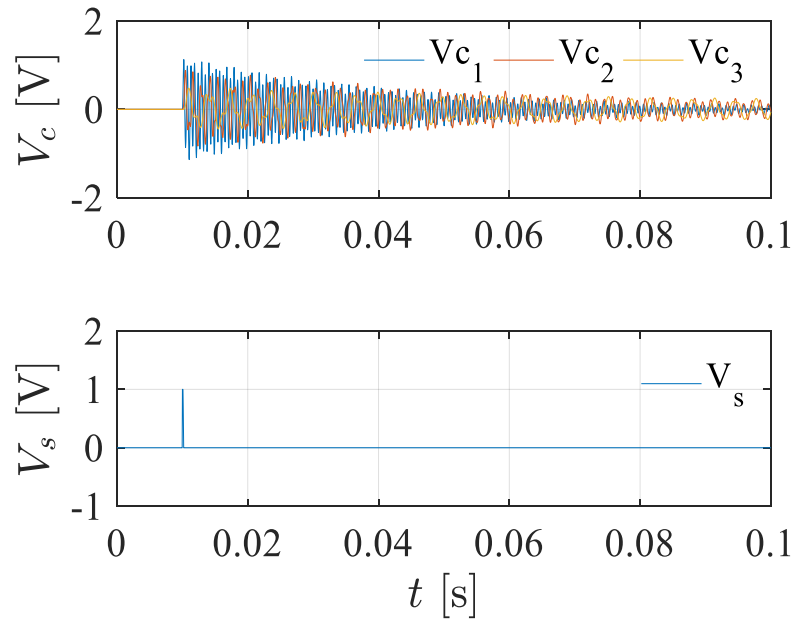


Figura 19. Respuesta de impulso del sistema.

Las funciones de respuesta de frecuencia (FRF) se muestran en la figura 20, mientras que los parámetros modales estimados con técnicas de selección de picos y ajuste de círculos se muestran en la tabla 3. En la figura 21, el diagrama de Nyquist muestra las fases con las formas modales implícitas del sistema.

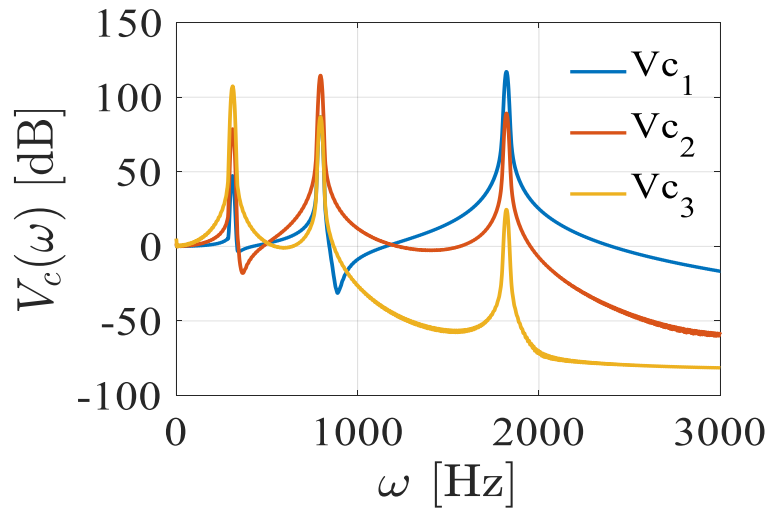


Figura 20. FRF del sistema, prueba impulse-response.

Tabla 3. Parámetros modales obtenidos para la prueba de impulse-response.

Param. Modo	Peak Picking			Circle Fit		
	1	2	3	1	2	3
ω_{di} [Hz]	311.27	794.98	1820	312.08	795.02	1816
ξ_i [%]	2.73	2.8	2.98	2.69	2.82	3.0
A_i [V]	1.23	1.88	1.65	1.36	1.87	1.35

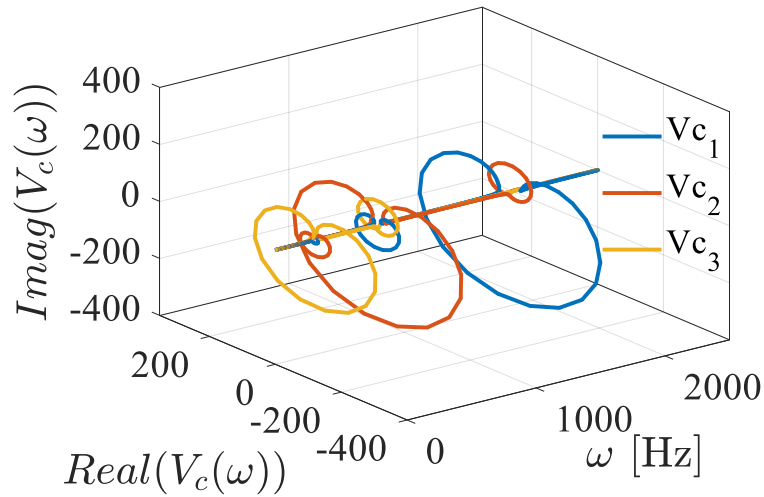


Figura 21. Formas modales implícitas del sistema.

Las fases de los voltajes de cada capacitor son equivalentes a las formas modales del sistema eléctrico y se representan gráficamente en la figura 21. El diagrama 3D muestra el diagrama de Argand o Nyquist como una función de la frecuencia en lugar de una trayectoria curva.

5.2. Prueba de decaimiento libre

La prueba de free decay se realizó aplicando un voltaje constante de 1 [V], generado digitalmente por el convertidor digital a analógico (DAC) de 10 bits del procesador ARM®. Se aplicó voltaje constante al circuito durante un segundo y luego se apagó el DAC para simular un cambio en las condiciones iniciales del sistema eléctrico. La respuesta libre del sistema se muestra en la figura 22.

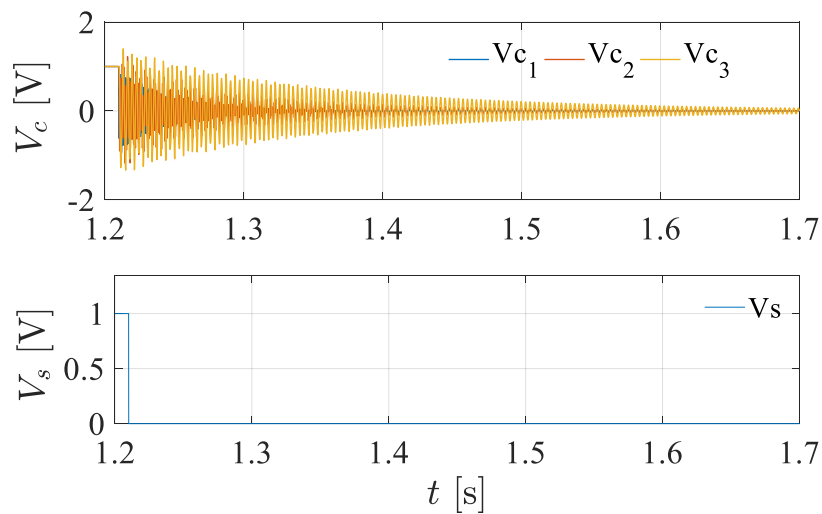


Figura 22. Respuesta del sistema, prueba free decay.

Las funciones de respuesta de frecuencia (FRF) de la prueba de caída libre se muestran en la figura 23, mientras que los parámetros modales estimados se reportan en la tabla 4.

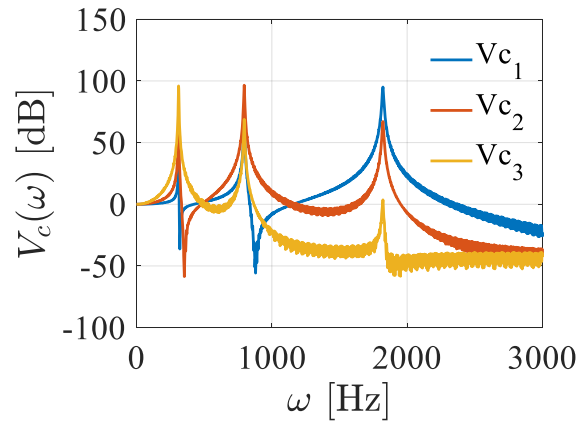


Figura 23. FRF del sistema, prueba free decay.

Tabla 4. Parámetros modales, prueba free decay.

Param. Modo	Peak Picking			Circle Fit		
	1	2	3	1	2	3
ω_i [Hz]	310.89	790.22	1818.5	308.98	790.40	1816.6
ξ_i [%]	2.35	2.12	2.98	2.3	2.38	3.2
A_i [V]	1.43	1.38	1.45	1.33	1.5	1.65

Finalmente, se presenta una comparación de resultados en la tabla 5, donde el valor medio de ambas técnicas se compara con los valores analíticos reportados en la tabla 2, esto para cada entrada de excitación.

Tabla 5. Comparación de resultados.

Param. Diff %	Impulse-test			Free-decay		
	1	2	3	1	2	3
ω_i [Hz]	0.31	0.1	0.6	0.24	0.68	0.62
ξ_i [%]	3.21	3.1	3.54	3.21	3.1	4.0
A_i [V]	0.38	5.3	2.94	3.07	3.53	3.82

5.3. Viga en voladizo

La primera prueba realizada sobre una estructura se llevó a cabo con una regleta de acero inoxidable 304 y se sujetó de tal manera que el resultado fue una viga en voladizo. La regleta cuenta con sección transversal rectangular de 30 mm por 1 mm, misma que se extiende sin cambios a lo largo de la regleta cuya longitud es de 500 mm. Para la recolección de datos experimentales se utilizó el equipo para prueba de martillo por impacto adquirido por el Instituto Tecnológico de Pachuca, mostrado en la figura 24, el cual consiste en el sistema de adquisición de datos, un martillo de impacto y distintos acelerómetros uniaxiales del tipo IEPE, todo esto marca Kistler.



Figura 24. Equipo para prueba de impacto adquirido por el Instituto Tecnológico de Pachuca.

Para realizar la prueba se procedió a conectar tanto el martillo como el acelerómetro en el sistema de adquisición de datos, así mismo se realizó la conexión entre esta y un equipo de cómputo mediante un cable Ethernet para recopilar los datos de la prueba. Para poder acceder a la interface

de la LabAmp, también conocido como sistema de adquisición de datos, no es necesario descargar alguna aplicación, simplemente se ingresa a la dirección IP correspondiente al modelo de LabAmp mediante el navegador y esto nos dirigirá a la interfaz de trabajo. Antes de comenzar la prueba se coloca el acelerómetro en el punto de interés, en este caso se realizaron 4 pruebas a lo largo de la viga colocando el sensor con una diferencia 10 centímetros entre cada prueba, así también comprueban los parámetros de cada canal, como lo son la variable por medir, la sensibilidad (dato que se encuentra en la hoja de datos del acelerómetro) y el rango; se estableció una tasa muestreo de 50000 SPS. Cabe mencionar que el sensor de tipo IEPE cuenta con un imán integrado para su fácil colocación sobre superficies metálicas. Para empezar la medición se selecciona “Medir” y posteriormente “Empezar DAQ”; una vez iniciada la prueba se procede a dar un golpe con el martillo a la viga, es necesario mencionar que, a pesar de parecer un simple golpe, se tienen que tomar en cuenta algunas consideraciones para llevarlo a cabo:

1. La fuerza aplicada. Para una correcta medición es necesario aplicar una fuerza justa: un golpe débil no nos proporcionará los suficientes datos de salida por otro lado, un golpe demasiado fuerte nos provocará una saturación del sensor usado para medir la respuesta, lo que se traduce en la incapacidad del sensor para medir fuera de su rango de funcionamiento. Esto también depende de la rigidez del sistema y de la posición del sensor.
2. Aplicar un impacto puntual. En muchas ocasiones al aplicar el golpe se puede llevar a cabo un doble o múltiple impacto debido a un rebote del martillo sobre la superficie aplicada, esto puede llegar a ser imperceptible para el aplicador, pero quedará registro de ello en los datos obtenidos por la LabAmp y puede afectar la calidad de la prueba.

Todo esto puede evitarse mediante la práctica, aún así no se está exento de cometer alguno de estos errores por lo que se recomienda realizar múltiples pruebas para realizar una comparación entre estas y elegir la mejor.

Al finalizar la prueba se crea un archivo que posteriormente se descarga al equipo de cómputo utilizado. El formato del archivo puede ser seleccionado desde la interfaz, en nuestro caso utilizaremos el formato .CSV.

5.3.1. Análisis experimental

El Post-procesamiento de los datos experimentales se realizó en Matlab, el script utilizado se presenta en el anexo II. En primer lugar, se graficaron los datos experimentales de los cuales se obtuvieron las siguientes figuras:

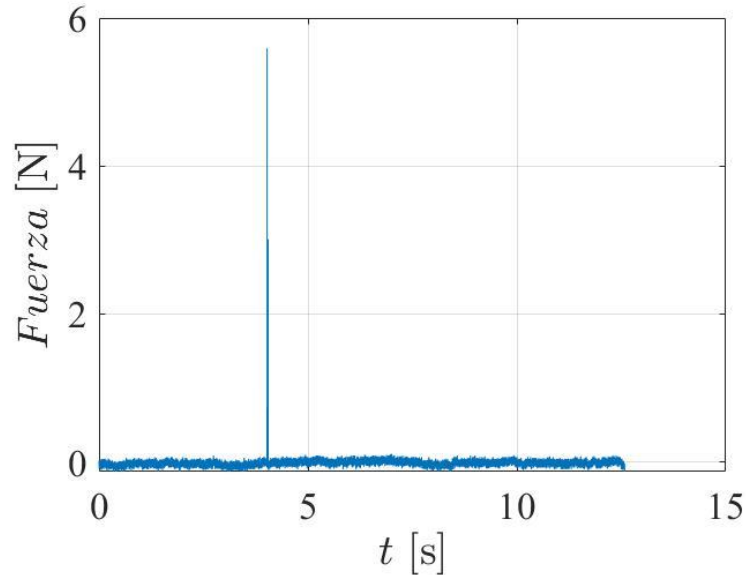


Figura 25. Gráfica de impacto.

La figura 25 nos muestra la gráfica del impacto del martillo en la cual se puede observar un buen impacto puntual, también se puede observar que la fuerza de entrada fue de casi 6 N y que la prueba tuvo una duración de alrededor de 12.5 segundos.

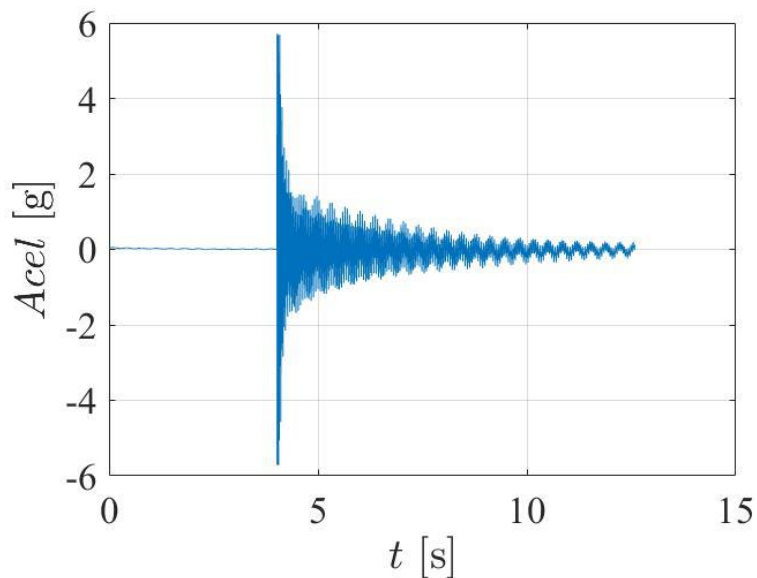


Figura 26. Gráfica de respuesta en el tiempo de la viga en voladizo.

En la figura 26 se presenta la gráfica de respuesta en el tiempo del sistema de viga en voladizo, esto es la manera en que la viga osciló mientras la prueba se llevó a cabo, así también esta gráfica nos indica que la viga en voladizo presenta el comportamiento de un sistema sub-amortiguado. Posteriormente se obtuvo la función de respuesta en frecuencia o FRF de cada una de las 4 pruebas realizadas y se colocaron en una sola gráfica la cual se presenta en la figura 27.

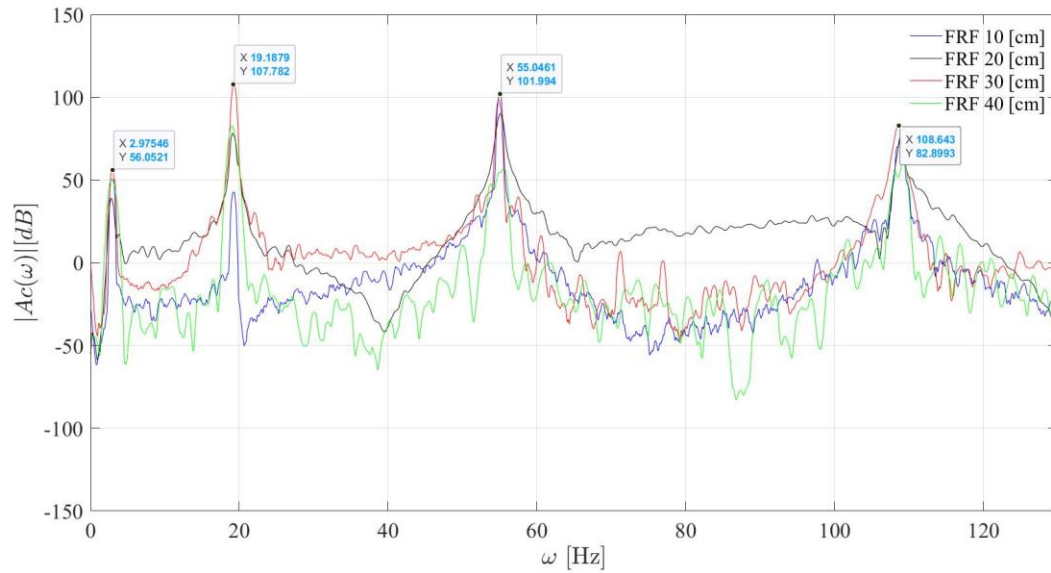


Figura 27. Gráfica de funciones de respuesta en frecuencia de la viga en Voladizo.

Como podemos advertir en el gráfico, a pesar de que cada prueba nos arroja una FRF distinta estas tienden a converger en ciertos puntos de la gráfica, puntos a partir de los cuales se pueden obtener las frecuencias naturales del sistema. Estos datos se presentan en la tabla 6.

Tabla 6. Frecuencias Naturales del sistema de viga en voladizo obtenidas mediante el análisis experimental.

Modo	Frecuencia natural [Hz]
1	2.98
2	19.19
3	55.04
4	108.6

Finalmente se obtuvo el diagrama de Nyquist mostrado en la figura 28 y los modos de deformación mostrados en la Figura 29.

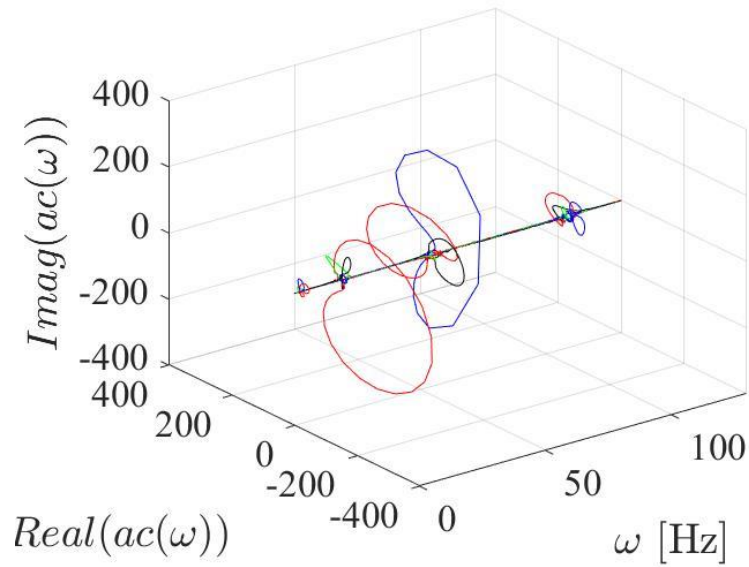


Figura 28. Diagrama de Nyquist.

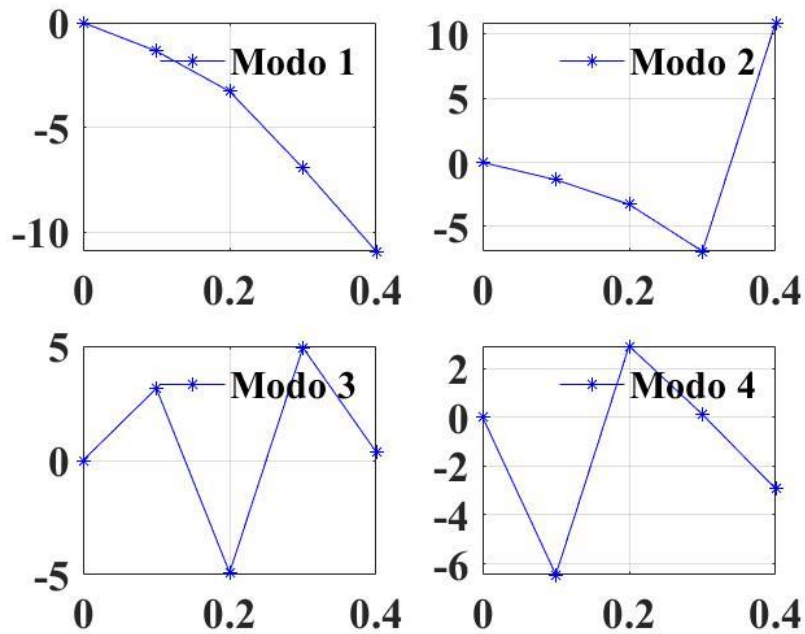


Figura 29. Modos de deformación obtenidos mediante el análisis experimental.

Los modos de deformación representan la manera en que el sistema oscilará bajo sus distintas frecuencias naturales.

5.3.2. Análisis numérico

Para corroborar los datos obtenidos en el análisis experimental se realizó un análisis numérico en software especializado, en este caso utilizamos ANSYS. Como primer paso se realizó el modelo en 3D de la viga, por conveniencia para realizar este paso se utilizó SOLIDWORKS, pero la geometría es tan sencilla que bien se pudo haber utilizado el editor integrado en ANSYS. La geometría realizada se presenta en la figura 30.

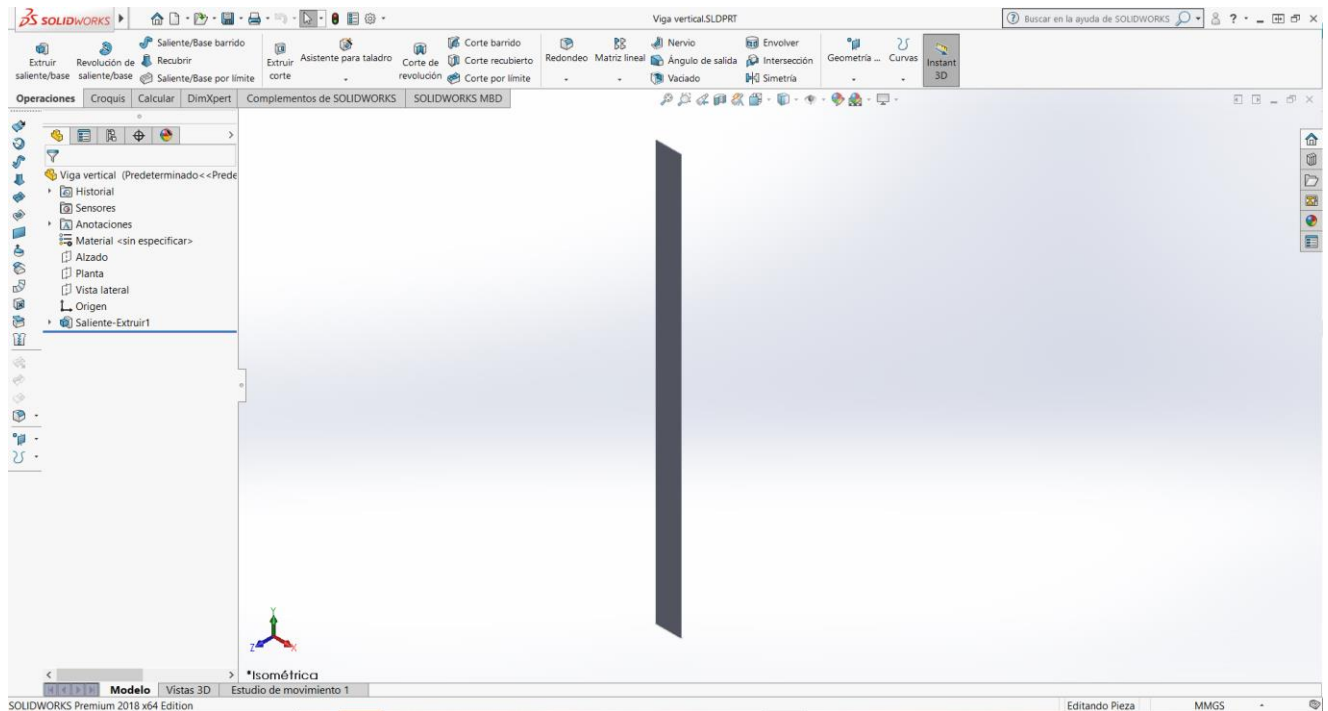


Figura 30. Geometría de la viga en voladizo realizada en SOLIDWORKS.

Se inició un análisis modal en ANSYS y se cargó la geometría. Después se inició el módulo *Mechanical* para comenzar el análisis. Se dio un mallado de 1 milímetro a la geometría para obtener resultados precisos. Se colocó como condición de frontera un soporte fijo en un extremo de la viga para simular el empotramiento de la viga en voladizo como se muestra en la figura 31.

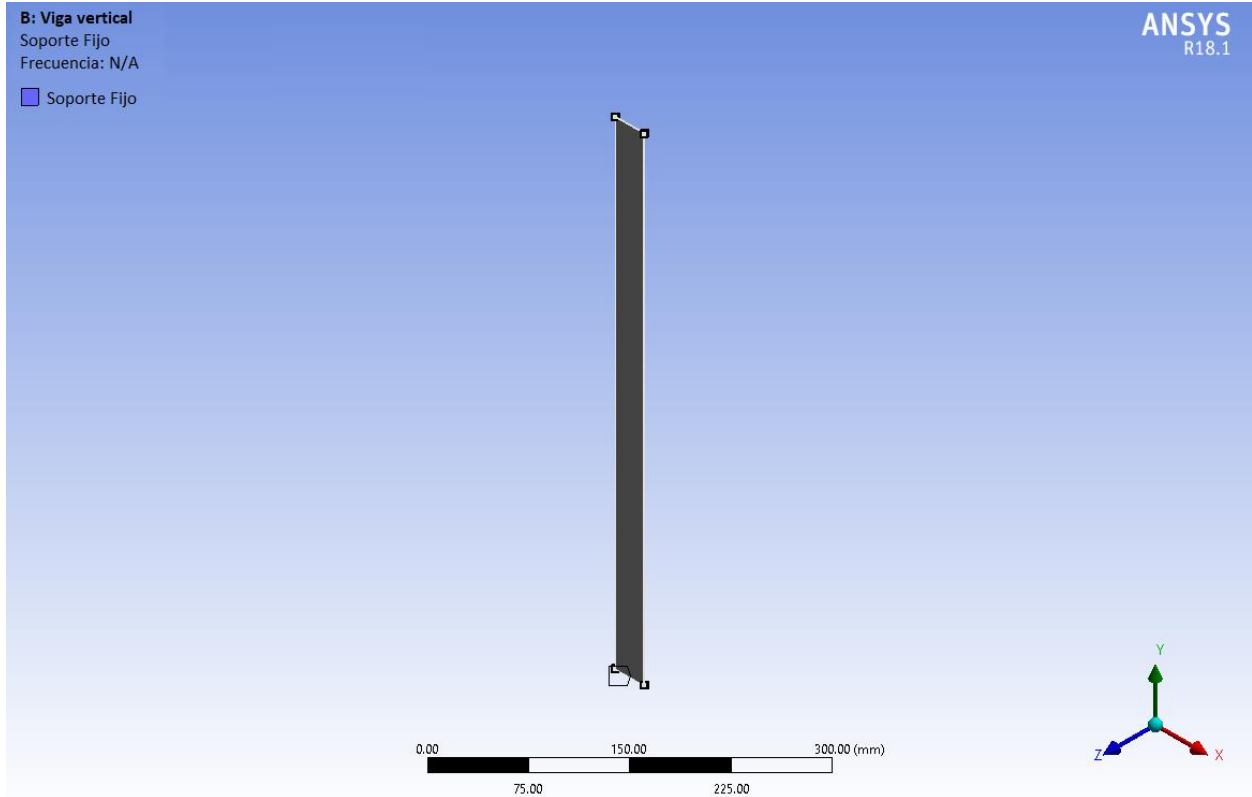


Figura 31. Condiciones de frontera.

Para los ajustes del análisis se solicitaron los primeros 6 modos, mientras los demás ajustes se dejaron por defecto. Al solicitar la solución el software nos arrojó las primeras 6 frecuencias naturales, las cuales se presentan en la tabla 7.

Tabla 7. Frecuencias naturales del sistema viga en voladizo obtenidas mediante análisis numérico.

Modo	Frecuencia natural [Hz]
1	3.2755
2	20.526
3	57.487
4	97.644
5	104.84
6	112.72

Posteriormente se solicitó al software una deformación total para cada una de las frecuencias naturales obtenidas para así poder observar los modos de deformación, al hacer esto se observó que el modo 4 y 5 presentaron deformación en direcciones que en el análisis experimental nuestro sensor no era capaz de registrar dado que este era uniaxial y fue colocado de tal manera que quedo alineado al eje Z de la viga. Por lo tanto, para una correcta comparación se tomarán en cuenta solo aquellos modos que se presentan en la misma dirección que el sensor fue colocado.

Los modos de deformación se presentan en la figura 32, como se puede observar los modos obtenidos mediante el análisis numérico coinciden con los modos resultantes del análisis experimental presentados anteriormente en la figura 29.

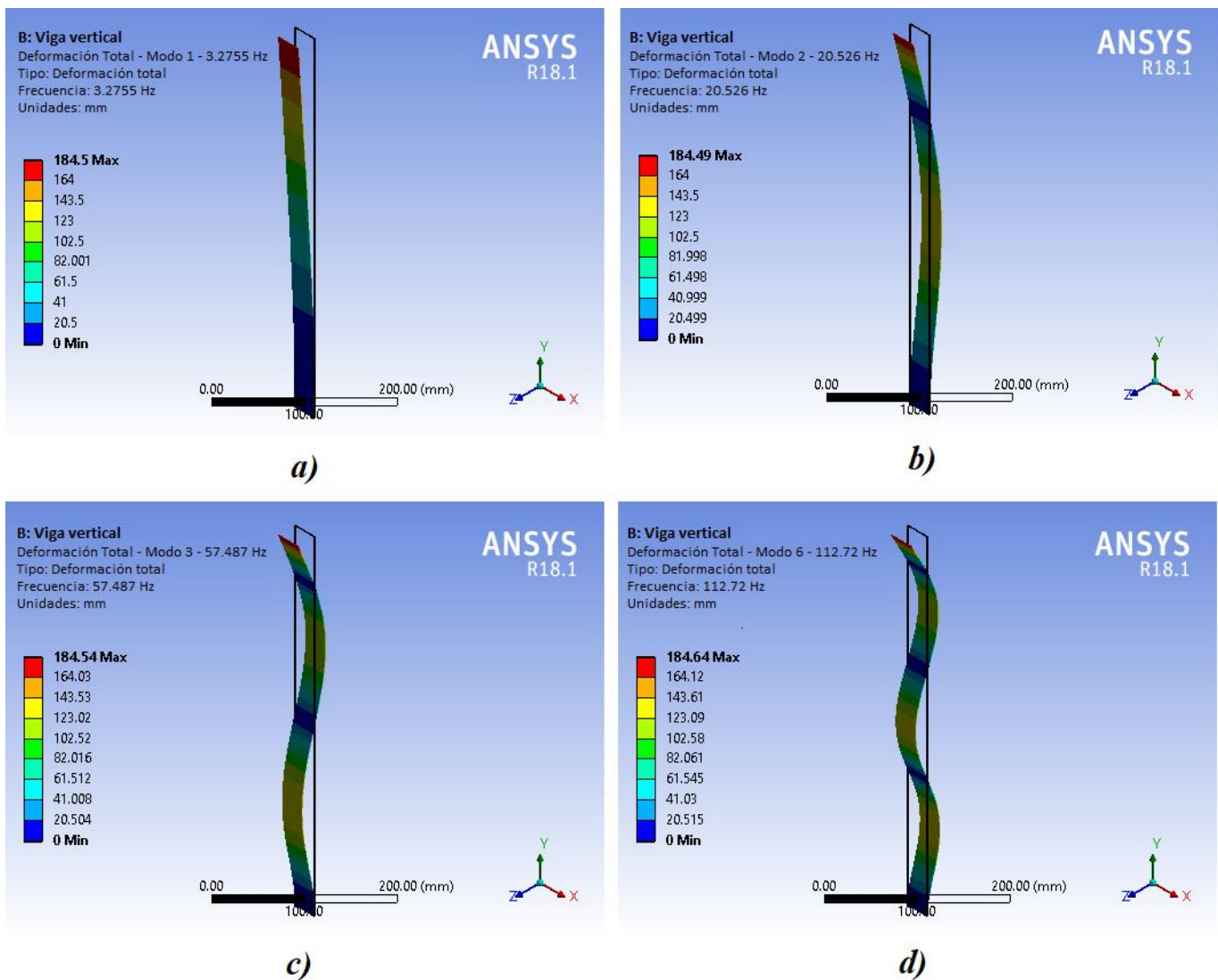


Figura 32. Modos de deformación obtenidos mediante ANSYS: a) Primer modo de deformación, b) Segundo modo de deformación, c) Tercer modo de deformación, d) Cuarto modo de deformación.

5.3.3. Comparación

Finalmente, se presenta en la tabla 8, una comparación de los valores de las frecuencias obtenidas mediante cada análisis, así como un valor de diferencia porcentual entre estos; con esto podemos apreciar que la diferencia entre los valores obtenidos es muy pequeña, siendo la mayor de estas de 8.86 %. Esta diferencia se puede deber a diversos factores desde algún error en la aplicación de la técnica de martillo de impacto, hasta la capacidad computacional del equipo utilizado para el análisis numérico.

Tabla 8. Tabla comparativa entre análisis experimental y numérico de la viga en voladizo.

Frecuencia natural	Análisis experimental [Hz]	Análisis numérico [Hz]	Diferencia [%]
1	2.98	3.27	8.86
2	19.19	20.52	6.48
3	55.04	57.48	4.24
4	108.6	112.72	3.65

5.4. Gabinete de computadora

Para la siguiente prueba se eligió como sistema de estudio un gabinete de computadora, una estructura que en la actualidad se puede encontrar fácilmente en diversos ámbitos de la vida cotidiana. El gabinete usado se muestra en la figura 33.



Figura 33. Gabinete de computadora usado para el análisis.

Se procedió a desmontar los componentes y plásticos para quedarnos con la estructura principal del gabinete.

5.4.1. Análisis experimental

Se realizaron dos partes para el análisis experimental, la primera parte se realizó con el mismo acelerómetro con el que se analizó la viga en voladizo: un sensor IEPE. La configuración del equipo fue la misma que en la prueba pasada. Para este caso el gabinete se colocó sobre espuma acústica para simular un estado libre-libre, como se aprecia en la figura 34.

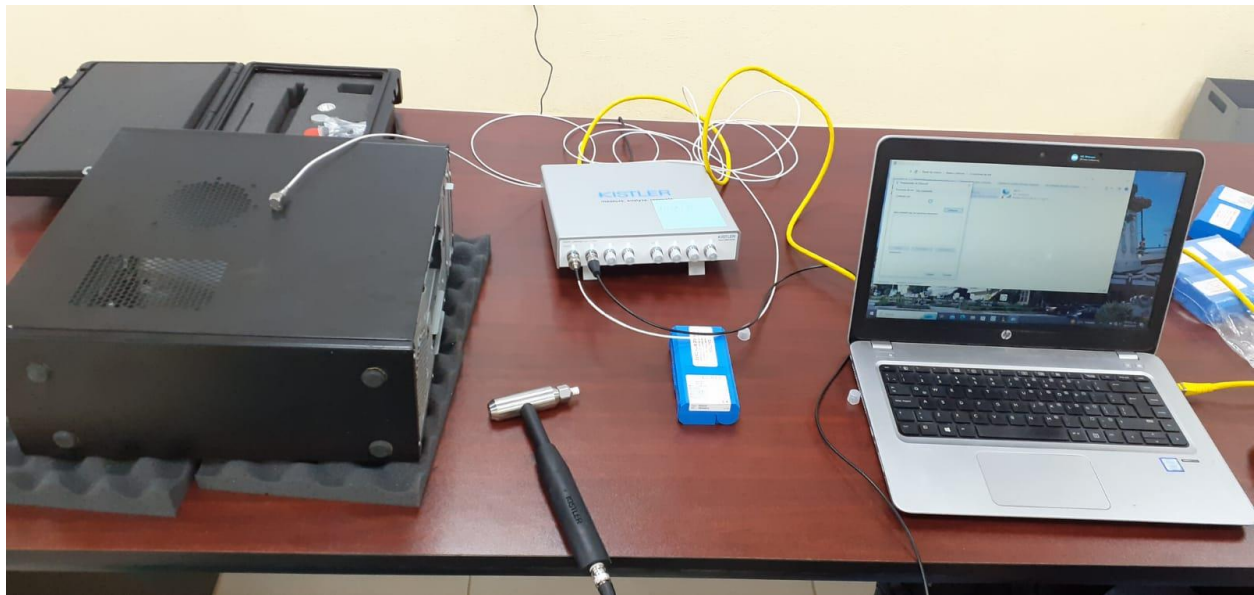


Figura 34. Prueba con gabinete de computadora con sensor tipo IEPE.

En la figura 35 se puede observar el momento en que se aplica la técnica y se recopilan los datos experimentales. Se realizaron 3 pruebas para poder obtener una comparación entre los datos obtenidos.



Figura 35. Aplicación de la técnica y recolección de datos experimentales con sensor de tipo IEPE.

El Post-procesamiento de los datos se realizó de la misma manera que en la prueba pasada, mediante el uso de MATLAB. Como resultado se consiguió la gráfica mostrada en la figura 36 con las funciones de respuesta en frecuencia de cada una de las pruebas.

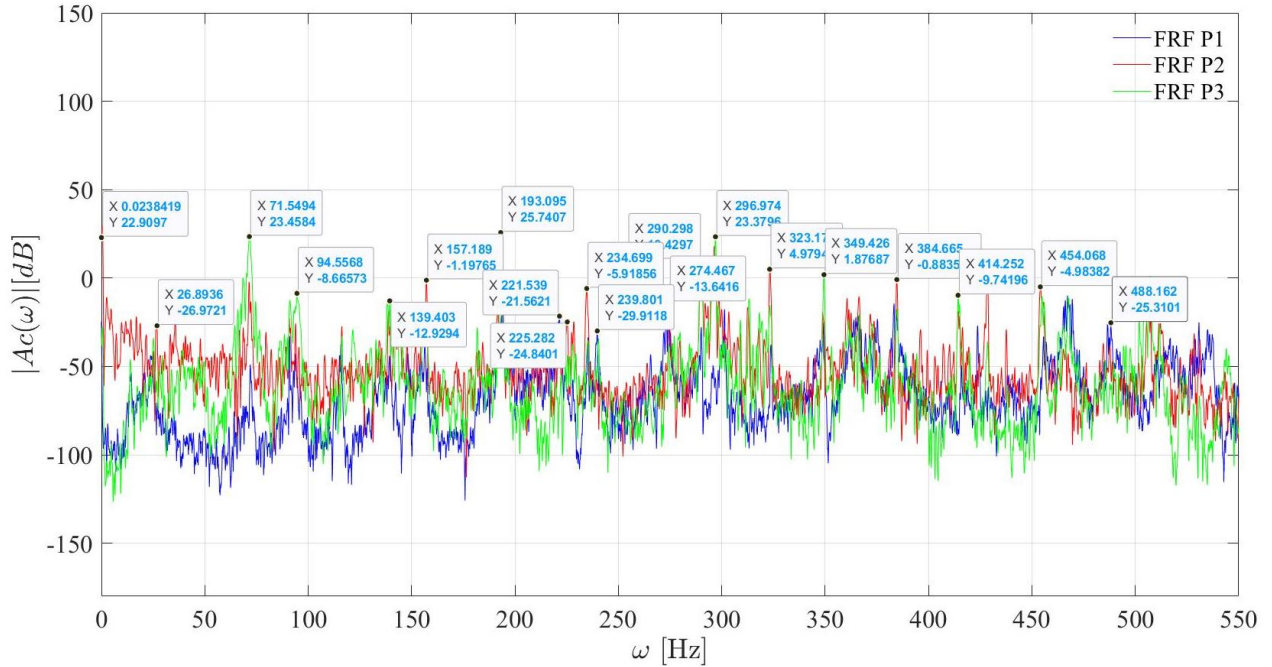


Figura 36. Funciones de respuesta en frecuencia obtenidas con sensor tipo IEPE.

En la figura 36 se pueden observar diversos puntos donde las 3 líneas presentan una misma tendencia, en estos puntos se colocó una etiqueta en la cual la coordenada x nos indica la frecuencia natural.

Para la segunda parte del análisis experimental se realizó el mismo proceso, pero con sensores piezoeléctricos, los cuales se muestran en la figura 37.

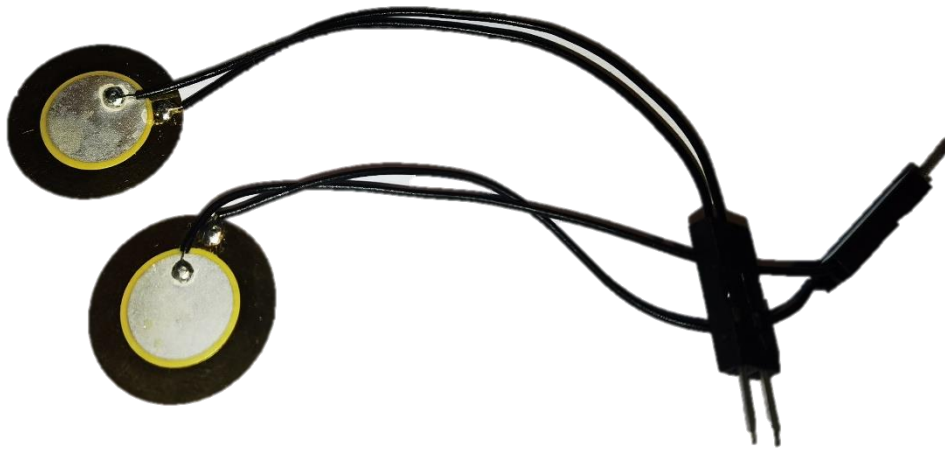


Figura 37. Sensores piezoeléctricos.

Para poder hacer las pruebas con este tipo de sensores se realizó una adaptación con un cable coaxial y se consiguieron adaptadores BNC a RCA para poder hacer la conexión de estos al sistema de adquisición de datos. La configuración para esta prueba fue muy similar a la anterior, la diferencia principal radica en el uso de 3 sensores piezoeléctricos al mismo tiempo para este caso, los cuales se adhirieron con pegamento de contacto a lo largo de una diagonal principal como se puede observar en la figura 38.

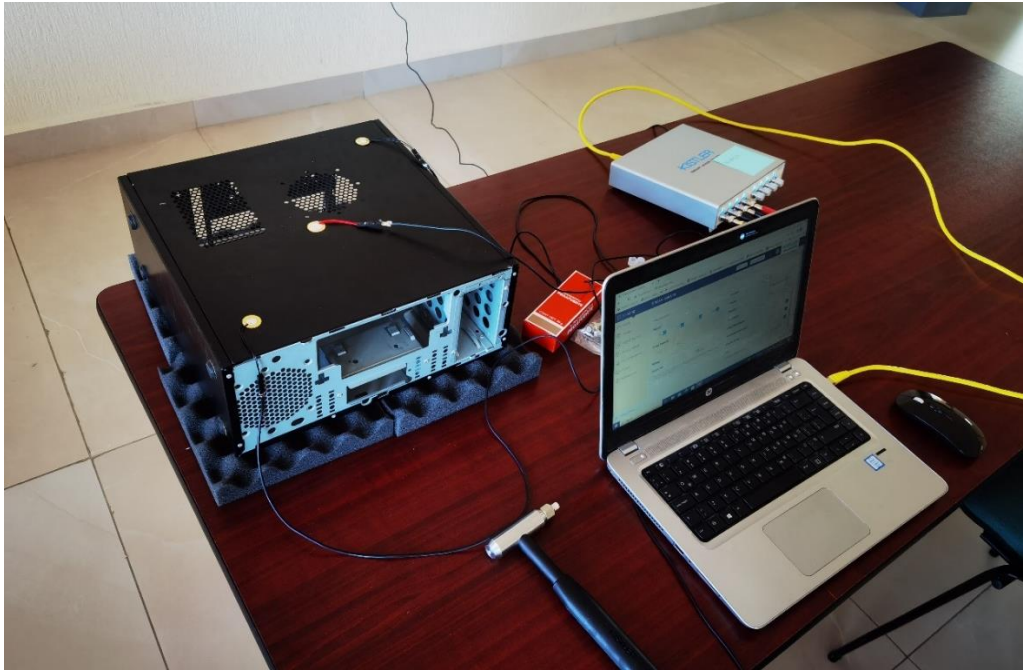


Figura 38. Prueba con gabinete de computadora con sensor piezoeléctrico.

De manera similar se obtuvieron las funciones de respuesta en frecuencia y se plasmaron en la figura 39 y en esta se colocaron etiquetas para poder apreciar las frecuencias naturales obtenidas.

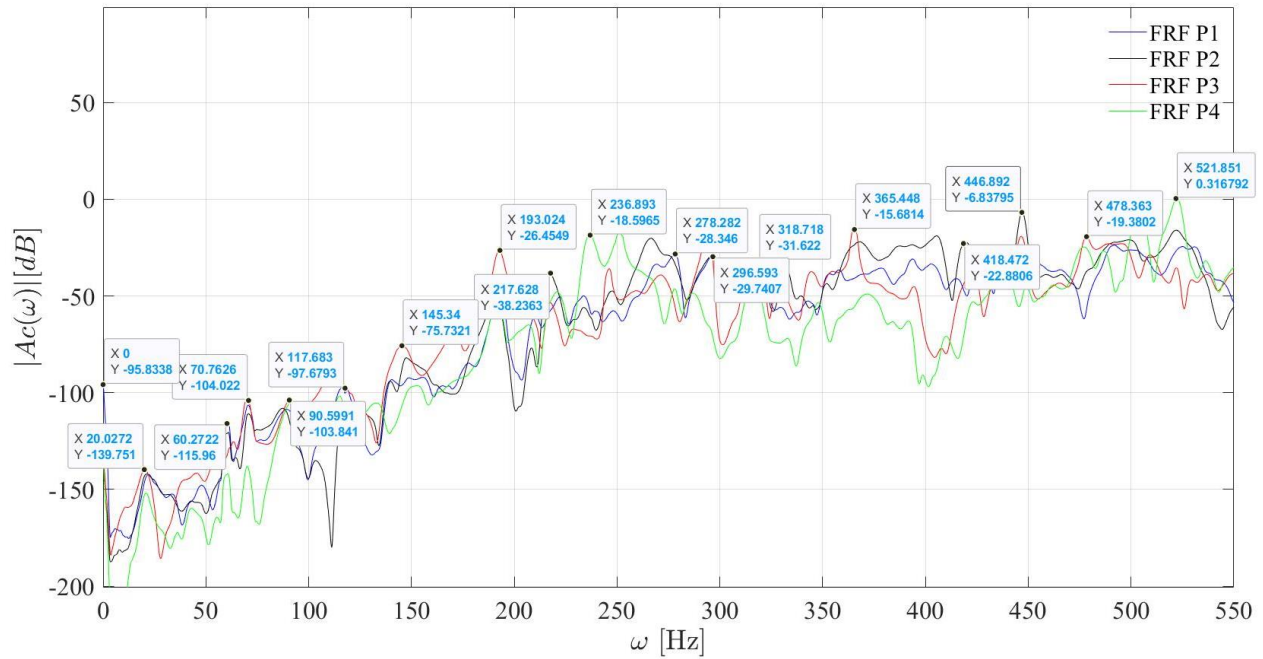


Figura 39. Funciones de respuesta en frecuencia obtenidas con sensor piezoeléctrico.

Las frecuencias obtenidas mediante ambos sensores se presentan en la tabla 9, así mismo se presenta una columna con la diferencia porcentual entre estas. Se puede apreciar que esta presenta una tendencia a la baja mientras la frecuencia se eleva, por lo tanto, los resultados obtenidos entre ambos sensores son más similares en valores de frecuencia altos. Esta diferencia se debe principalmente a que los sensores del tipo IEPE son acelerómetros especialmente diseñados para la medición de vibraciones y cuentan con diversas certificaciones para asegurar una correcta medición y debido a esto tienen un precio elevado, mientras que los sensores piezoeléctricos son productos fabricados en masa y se pueden encontrar con facilidad a un precio bastante bajo. Esta gran diferencia de costo nos lleva al objetivo principal de realizar esta comparación, que es ver la capacidad de estos últimos de dar resultados precisos ya que de presentar buenos resultados podrían emplearse desde actividades académicas hasta el monitoreo continuo de algún sistema de interés.

Tabla 9. Frecuencias naturales del gabinete de computadora.

Modo	Frecuencia [Hz]		Diferencia [%]
	Sensor IEPE	Sensor piezoeléctrico	
1	26.893	20.02	7.3252
2	71.549	70.762	0.2762
3	94.556	90.599	1.0685
4	157.187	145.34	1.9583
5	193.095	193.024	0.0091
6	225.282	217.628	0.8640
7	239.801	236.893	0.3050
8	274.467	278.282	0.3450
9	296.974	296.593	0.0320
10	323.176	318.718	0.3472
11	414.252	418.472	0.2533
12	454.068	446.892	0.3982
13	488.162	478.363	0.5069

5.4.2. Análisis numérico

Para el análisis numérico se realizó el modelo 3D en SolidWorks dado que a pesar de que la geometría parece sencilla, figura 40 a), ésta presenta diversos detalles que son importantes para llevar a cabo el análisis numérico de forma precisa, figura 40 b).

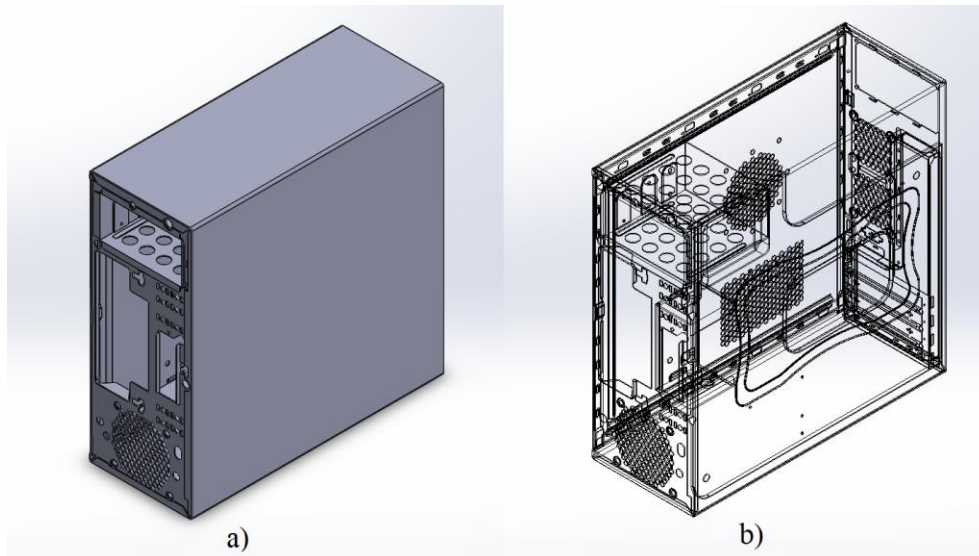


Figura 40. Geometría del gabinete de computadora. a) Vista sólida. b) Vista de estructura alámbrica.

Nuevamente para realizar el análisis numérico se inició una sesión se ANSYS Workbench. Dado que se desconoce el material del gabinete se solicitó un análisis modal por cada material común de fabricación de este producto, de los cuales se consideraron: acero estructural, acero inoxidable, aluminio y latón. Al ser una geometría de mayor tamaño y complejidad que la viga en voladizo se le dio un mallado con un tamaño de elemento de 10 milímetros, ya que el costo computacional aumenta significativamente al reducir el tamaño del mallado llegando incluso a arrojar advertencias y errores. En la tabla 10 se presentan las frecuencias naturales obtenidas para cada material.

Tabla 10. Frecuencias naturales del gabinete de computadora con diferentes materiales.

Modo	Frecuencia [Hz]			
	Acero inoxidable	Acero estructural	Aluminio	Latón
1	20.672	20.875	21.051	14.118
2	78.048	78.651	79.831	53.666
3	98.322	99.144	100.46	67.499
4	150.14	151.27	153.63	103.3
5	195.08	196.77	199.21	133.83
6	223.99	225.88	228.81	153.72
7	239.49	241.35	244.97	165.69
8	271.26	273.85	276.53	185.61
9	300.17	302.45	307.15	206.54
10	317.48	319.88	324.91	218.5
11	413.51	416.47	423.55	284.98
12	446.88	449.8	458.41	308.69
13	476.62	480.12	487.96	328.21

Como se puede apreciar en la tabla 10 los resultados para acero inoxidable, acero estructural y aluminio son muy cercanos entre sí, mientras que, para el latón, en los mismos modos, las frecuencias naturales quedan muy desfasadas, por lo que se puede descartar este último como material de construcción del gabinete.

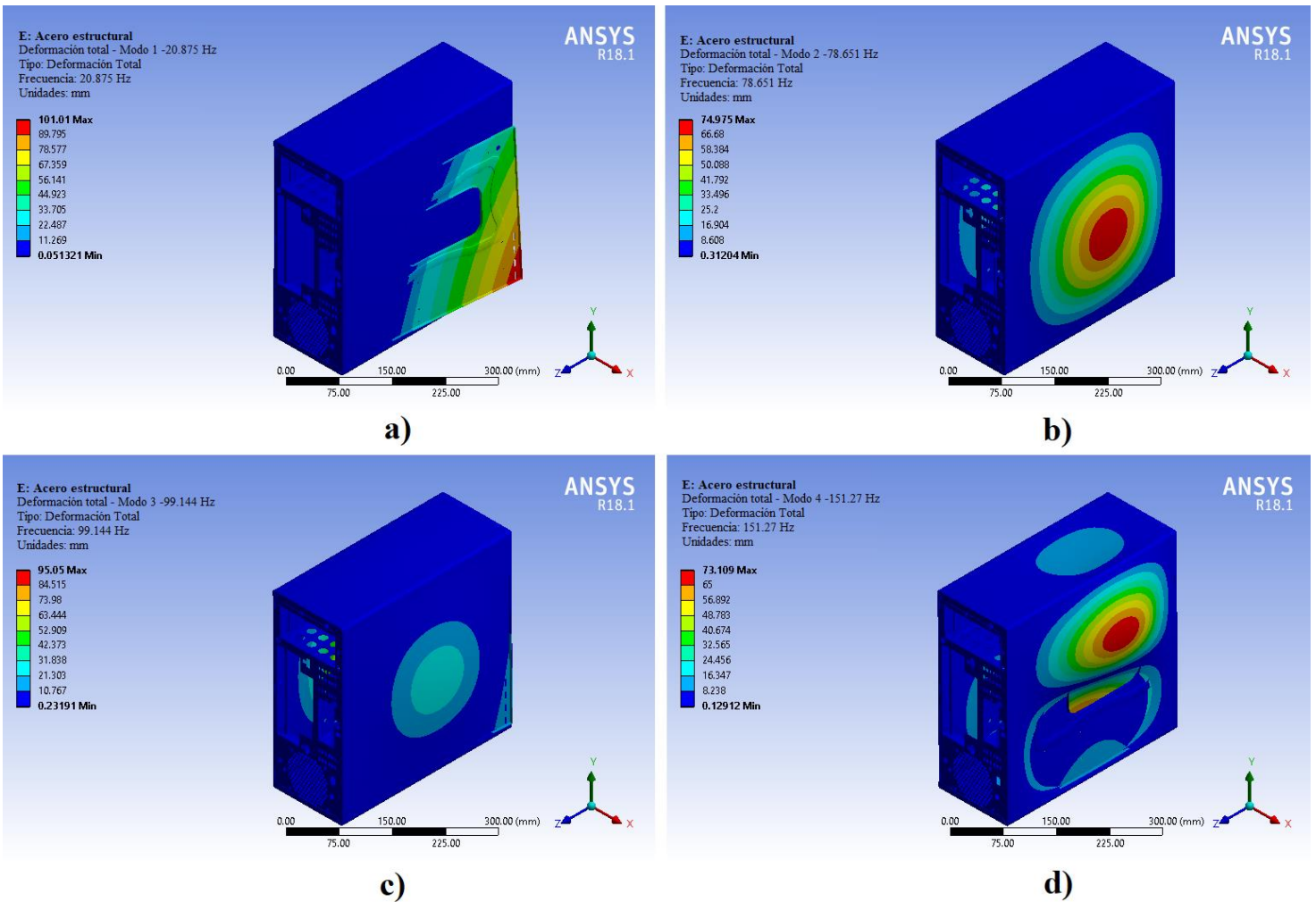


Figura 41. Modos de deformación. a) Primer modo, b) Segundo modo, c) Tercer modo, d) Cuarto modo.

Finalmente, en la figura 41 se presentan los primeros 4 modos de deformación del gabinete de computadora. Se puede apreciar que la deformación se da en dirección al eje x, eje sobre el cual se colocó tanto el sensor IEPE como los sensores piezoeléctricos en el análisis experimental.

5.4.3. Comparación

Finalmente, en la tabla 11 se presenta una comparación de los resultados de las frecuencias naturales obtenidas por los diferentes análisis. Se puede observar que hay una gran similitud entre los valores obtenidos. En la parte final en la tabla se presenta una columna con valores de diferencia o error porcentual la cual se elaboró con los valores promedio de los datos experimentales y los

datos obtenidos del análisis numérico con acero estructural; analizando esta última columna se aprecia que el error porcentual tiende a disminuir al aumentar las frecuencias naturales, es decir, el análisis modal experimental es más preciso a altas frecuencias, mientras que a bajas frecuencias suele arrojar un mayor porcentaje de error siendo el más alto en nuestro caso de 11% con la primer frecuencia natural. Cabe mencionar por lo anteriormente descrito, que el error porcentual no guarda una relación directa con la frecuencia natural, sin embargo, en este caso de estudio, arriba de los 100 Hz el error se mantiene por debajo del 2%, llegando incluso al 0.004% con la cuarta frecuencia natural.

Tabla 11. Tabla comparativa entre análisis experimental y numérico para el gabinete de computadora.

Modo	Frecuencia [Hz]						
	Análisis numérico			Análisis experimental			Dif.
	Acero inoxidable	Acero estructural	Aluminio	Sensor IEPE	Sensor piezoeléctrico	Prom.	
1	20.672	20.875	21.051	26.893	20.02	23.4565	11.005%
2	78.048	78.651	79.831	71.549	70.762	71.1555	10.534%
3	98.322	99.144	100.46	94.556	90.599	92.5775	7.093%
4	150.14	151.27	153.63	157.187	145.34	151.2635	0.004%
5	195.08	196.77	199.21	193.095	193.024	193.0595	1.922%
6	223.99	225.88	228.81	225.282	217.628	221.455	1.998%
7	239.49	241.35	244.97	239.801	236.893	238.347	1.260%
8	271.26	273.85	276.53	274.467	278.282	276.3745	0.913%
9	300.17	302.45	307.15	296.974	296.593	296.7835	1.909%
10	317.48	319.88	324.91	323.176	318.718	320.947	0.332%
11	413.51	416.47	423.55	414.252	418.472	416.362	0.026%
12	446.88	449.8	458.41	454.068	446.892	450.48	0.151%
13	476.62	480.12	487.96	488.162	478.363	483.2625	0.650%

6. Conclusiones

A lo largo de este trabajo se realizaron diversos hallazgos:

El control sobre las condiciones iniciales del sistema es fundamental para obtener resultados precisos y fiables, y este control es mucho más fácil de llevar a cabo en sistemas eléctricos que en sus análogos mecánicos.

La principal limitación de la técnica de análisis modal por excitación con martillo de impacto radica en la facilidad de cometer errores al aplicar el golpe con el martillo, lo cual es sencillo de solucionar con práctica. Así también se recomienda realizar varias pruebas consecutivas para seleccionar la mejor.

La sencillez y portabilidad de la técnica de excitación por martillo de impacto hace de esta una opción factible de ser aplicada en sitio.

Las técnicas de extracción de parámetros modales nos ayudaron a procesar los datos experimentales obtenidos en las pruebas

La comprobación con un análisis numérico mediante ANSYS Workbench resulta muy ilustrativo y conveniente para comprender los resultados del análisis experimental. Sin embargo, para geometrías complejas y/o de gran tamaño se requiere de un equipo de cómputo de bastante capacidad para obtener resultados certeros.

Los sensores piezoeléctricos de bajo costo demostraron tener una excelente respuesta al recopilar datos experimentales, por lo que se abre la posibilidad de utilizar estos sensores para un monitoreo de vibraciones en situaciones de operación continua.

Referencias

- [1] M Cacho Pérez, M Frechilla, and A Lorenzana, "Estimación de parámetros modales de estructuras civiles a partir de la función de respuesta en frecuencia," *Revista Internacional de Métodos Numéricos para*, vol. 33, pp. 197-203, junio 2016.
- [2] Tadej Kranjc, Janko Slavič, and Miha Boltežar, "The mass normalization of the displacement and strain mode shapes in a strain experimental modal analysis using the mass-change strategy," *Journal of Sound and Vibration*, vol. 332, pp. 6968-6981, Septiembre 2013.
- [3] A. Jannifar, M.N.M. Zubir, and S.N. Kazi, "Development of a new driving impact system to be used in experimental modal analysis (EMA) under operational condition," *Sensors and Actuators A: Physical*, vol. 263, pp. 398-414, Julio 2017.
- [4] Sau-Lon James Hu, Wen-Long Yang, Fu-Shun Liu, and Hua-Jun Li, "Fundamental comparison of time-domain experimental modal analysis methods based on high-and first-order matrix models," *Journal of Sound and Vibration*, vol. 333, pp. 6869-6884, Septiembre 2014.
- [5] Prashant S. Walunj, Chougule V.N., and Mitra C. Anirban, "Investigation on modal parameters of rectangular cantilever beam using Experimental modal analysis," *Materials Today: Proceedings 2*, pp. 2121-2130, 2015.
- [6] Forrest J.A., "Experimental modal analysis of three small-scale vibration isolator models," *Journal of Sound and Vibration*, vol. 289, pp. 382-412, Febrero 2006.
- [7] Luis Gerardo Trujillo Franco and Francisco Beltran Carbajal, "Identificación algebraica de parámetros modales en sistemas mecánicos usando excitación con martillo de impacto," *Revista de ingeniería mecánica*, vol. 1, no. 2, pp. 18-24, junio 2017.
- [8] Juan C. Marin Soriano, Luis Gerardo Trujillo Franco, and Hugo Francisco Abundis Fong, "Instrumentation of an Educational Prototype for Vibration and Signal Analysis," *2020 International Conference on Mechatronics, Electronics and Automotive Engineering (ICMEAE)*, 2020.
- [9] Jimin He and Fu Zhi-Fang, *Modal Analysis*, Butterworth Heineman, Ed. Oxford: Butterworth Heineman, 2001.
- [10] David John Ewins, *Modal Testing: Theory, Practice and Application*, Segunda ed. Londres, Inglaterra: Research Studies Press LTD, 2000.
- [11] Peter Avitabile, *Modal Testing: A practitioner's Guide.*: John Wiley & Sons Ltd, 2018.
- [12] Pablo Andrés Rojas Jaramillo, Análisis modal del banco de ensayo de vibraciones del Laboratorio del Departamento de Ingeniería Mecánica, 2014.
- [13] Antonio Campos Olías, Caracterización dinámica de un martillo de impacto para análisis modal, 2019.
- [14] Clarence W. de Silva, *Vibration: fundamentals and practice*. New York: CRC press , 2000.

- [15] Cyril M. Harris and Allan G. Piersol, *HARRIS' SHOCK AND VIBRATION HANDBOOK*, Quinta ed.: McGraw Hill, 2002.
- [16] Freddy Alexander Gómez González, Análisis comparativo entre un análisis modal experimental (EMA) y un análisis modal en operación (OMA) realizado sobre un rotorkit, 2011.
- [17] José Rafael García Fernández, Análisis Modal Experimental de Estructuras. Aplicación en Caso de Estudio., 2018.
- [18] Dewey H. Hodges and G. Alvin Pierce, *Introduction to Structural Dynamics and Aeroelasticity*, Segunda ed.: Cambridge University Press, 2011.

Anexos

I. CCE 2022

Artículo publicado en el CCE 2022: 2022 19th International Conference on Electrical Engineering, Computing Science and Automatic Control. La presentación se realizó el día 9 de noviembre del 2022 en modalidad en línea.

2022 19th International Conference on Electrical Engineering, Computing Science and Automatic Control (CCE). Mexico City, Mexico. November 9-11, 2022

On the evaluation of free-decay and impulse-response modal testing techniques

Hector S. Sanchez-Villegas
Postgraduate Division
TecNM/I.T. Pachuca.
Pachuca, Hidalgo, México
m15200742@pachuca.tecnm.mx

Luis G. Trujillo-Franco
Automotive Mechanical Engineering
Universidad Politecnica de Pachuca
Zempoala, Hidalgo, Mexico
luis.trujillo@upp.edu.mx

Hugo F. Abundis-Fong
Postgraduate Division
TecNM/I.T. Pachuca.
Mexico, Pachuca, Hidalgo
hugo.af@pachuca.tecnm.mx

Abstract—This paper addresses the evaluation of modal parameter identification techniques, based on transient response on lightly damped vibrating systems. This work focuses on the evaluation of the impulse-response and free-decay modal analysis techniques in vibrating systems for the construction of modal models, by applying frequency domain post-processing modal parameters extraction techniques to experimental data through the application of the classic peak picking and circle fit techniques for the extraction of modal parameters.

Keywords—Modal testing, modal analysis, modal parameters identification, modal modeling.

I. INTRODUCTION

In the field of mathematical modelling of dynamic systems there are plenty of powerful tools used to perform a deep analysis of the performance of engineering designs in operating conditions and under harmonic excitations. One of those technological tools, is the well-known modal analysis [1], defined as the process of determining the dynamic characteristics of a system in terms of natural frequencies, damping factors and mode shapes, this process leads to the use of those parameters in the construction of a mathematical model to describe the systems dynamic behavior when they undergo harmonic excitation. The final mathematical model is called modal model of the system and the information for this characteristics are known as modal data or modal parameters [1-3]. Modal models are used in vibration absorber designs, vibration control schemes and, in general engineering for design purposes, since good models of structures allow better understanding of dynamic properties.

Modal testing techniques are used to build the mathematical models since they are used in conjunction with specialized numerical methods that include peak picking, with some variants of it, as circle fitting and a curve fitting methods, usually in frequency domain, this implies the necessity of storing and processing reasonable and good quality data by means of power spectral calculations usually based on the FFT

algorithm in order to extract the modal information. These numerical methods are valid when the system under analysis has a dominantly linear dynamic behavior.

In this context, the area of parametric identification in electrical and electronic systems involves a vast variety of research interests and applications, for example: power factor correctors, surge suppressors, harmonic distortion monitoring, filter systems and high precision medical equipment.

It is well known that the harmonic oscillations that describe the vibratory phenomenon can be characterized and described by parameters such as: amplitude, frequency and phase, in the context of modal analysis it is possible to make an analogous approach to the modal parameters natural frequency, damping factor and phase are implicit in the mode shapes or patterns of deformation [4] in electric or electronic systems.

The representation in the modal space that implies the use of a modal model, decomposes the complex response of a given vibratory system in a finite sum of simple responses, that are much easier to understand and manipulate, that is, the modal model allows to avoid the high complexity of the coupled mathematical models [1,3]. In this way, it is possible to use all the tools of linear algebra to make a deep analysis of the system and give a physical meaning to concepts as the values and eigenvectors of the system, even more: it is possible to make a change of coordinates that allows a decoupling of the differential equations that model the system to achieve a formal approach of the decomposition of the total response of the system as a linear combination of the different modes of vibration, described by the modal parameters; natural frequencies, modal amplitudes and damping ratios.

This work focuses on the evaluation of modal testing techniques, based on the impulse-response and free-decay excitation techniques, by analyzing the dynamic behavior of an electric system, the mathematical fundamentals of two one degrees of freedom modal parameters extraction techniques; peak picking and circle fitting are presented and then experimentally evaluated in a sixth order electric system.

II. TRANSIENT RESPONSE ANALYSIS TECHNIQUES

Consider a general signal $y(t)$ that comes from the transient response of a vibratory system (mechanical or electric), it is possible to determine the modal representation of such a signal, that is, an uncoupled version of the output obtained using an analytical model of the system. The schematic representation of the modal analysis of a transient signal is presented as a linear combination of single harmonic content is depicted in Fig. 1.

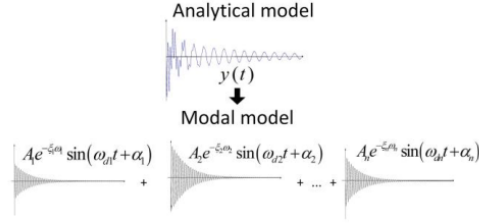


Fig. 1. Modal analysis of an electric signal

The signal $y(t)$ is considered to be quantifiable, or measurable in a time interval $[t_0, t_1]$ and can be represented as [4].

$$y(t) = \sum_{i=1}^n A_i e^{-\zeta_i \omega_i t} \sin(\omega_{di} t + \alpha_i) \quad (1)$$

with

$$\omega_{di} = \sqrt{1 - \zeta_i^2} \omega_i \quad (2)$$

where A_i is the modal amplitude, ω_i is the natural frequency, ζ_i is modal damping ratio $0 < \zeta_i < 1$, ω_i is the damped natural frequency and α_i is the phase angle, all of them, associated to the i -th vibrating mode. The signal $y(t)$ can be described by the expressions:

$$A_i = \sqrt{y_{i,0}^2 + \left(\frac{\zeta_i \omega_i y_{i,0} + \dot{y}_{i,0}}{\omega_{di}} \right)^2}, \quad (3)$$

$$\alpha_i = \tan^{-1} \frac{\omega_{di}}{\zeta_i \omega_i y_{i,0} + \dot{y}_{i,0}}$$

where $y_{i,0}$ and $\dot{y}_{i,0}$ are the initial conditions of each harmonic components of the signal, ω_i and ζ_i are the corresponding natural frequency and damping ratio. Notice that, the modal parameters come from the i -th characteristic polynomial:

$$P_i = s^2 + 2\zeta_i \omega_i s + \omega_i^2 \quad (4)$$

The modal testing techniques are used to determine, experimentally the modal parameters A_i , ω_i , ζ_i and α_i to construct the modal model of the system from its transient response. In the following section, two experimental techniques for the extraction of modal parameters of a vibrating system are described.

A. Peak Picking

The Peak Picking method is also known as the mean power method [1]. This method is very portable and computationally cost effective to extract modal parameters [2,3]. The modal parameters are obtained from the frequency response function as:

$$|A_{\max}| = \frac{A_r}{2\omega_r^2 \zeta} \quad (5)$$

where $\omega_r = \omega_{peak}$, is the frequency at the peak of the FRF with magnitude A_r , the damping ratio ζ is then estimated as

$$\zeta = \frac{\omega_b - \omega_a}{2\omega_r} \quad (6)$$

with $\omega_a < \omega_b$, the frequencies where the amplitude reaches a value of $|A_{a,b}| \approx 0.7071|A_r|$. The modal constant A_i is directly related with the amplitude of the peak:

$$A_i = 2\alpha_r \omega_r^2 \zeta_r \quad (7)$$

Finally, phase α_i is determined from the imaginary part of the FRF.

B. Circle fit

Circle fit method is more complex than peak picking, since it is based on the assumption of circularity of FRF near to resonance, in this case, modal parameters are given by:

$$\zeta = \frac{\omega_a^2 - \omega_b^2}{2\omega_r \left(\tan\left(\frac{\theta_a}{2}\right) + \tan\left(\frac{\theta_b}{2}\right) \right)} \quad (8)$$

where ω_r is the undamped natural frequency, that is determined graphically by the rate at which the locus sweeps around the circular arc and takes the maximum value at resonance ω_r , the angles θ_a and θ_b are shown in Figure 2. The modal constant A_i is necessary to fit a circle using a set of points near the resonance ω_r , the diameter of that circle is directly related to the modal constant as:

$$A_i = D_r \omega_r^2 2\zeta_r \quad (9)$$

where D_r is the diameter of the circle obtained by a fitting method as least squares.

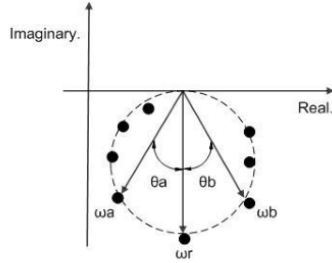


Fig. 2. Circle fit modal parameters extraction method

III. VIBRATING ELECTRIC SYSTEM

Consider the electric system shown in Fig. 3. Where the coupled system dynamics is modelled by the set of coupled differential equations:

$$\begin{aligned} L_1 \ddot{i}_1 + R_1 \dot{i}_1 + \frac{1}{C_1} (i_1 - i_2) &= \dot{V}_s \\ L_2 \ddot{i}_2 + R_2 \dot{i}_2 + \frac{1}{C_2} (i_2 - i_3) - \frac{1}{C_1} (i_1 - i_2) &= 0 \\ L_3 \ddot{i}_3 + R_3 \dot{i}_3 + \frac{1}{C_3} i_3 - \frac{1}{C_2} (i_2 - i_3) &= 0 \end{aligned} \quad (10)$$

where L_k , R_k and C_k , $k=1,2,3$ are the inductance, resistance and capacitance respectively, i_k are the mesh currents and V_s is the voltage source, in addition the voltage of capacitor is given by:

$$v_{ck} = \frac{1}{C_k} \int i_{C_k} dt, \quad k=1,2,3 \quad (11)$$

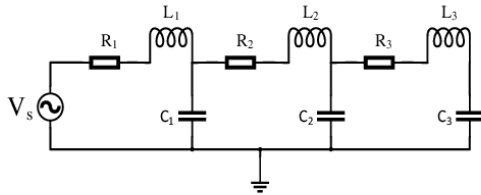


Fig. 3. Electric vibrating system.

The matrix representation of the system of equations (10) is:

$$\mathbf{L}\ddot{\mathbf{i}} + \mathbf{R}\dot{\mathbf{i}} + \mathbf{C}\mathbf{i} = \dot{\mathbf{V}}_s \quad (12)$$

where \mathbf{L} , \mathbf{R} and \mathbf{C} are the inductance, resistance and capacitance matrices respectively, with $\mathbf{L}, \mathbf{R}, \mathbf{C} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$, the vectors $\mathbf{i} = [i_1, i_2, i_3]^T$ and $\dot{\mathbf{V}}_s = [V_s, 0, 0]^T$ are the current and voltage source vectors respectively. The inductance, resistance and capacitance matrices are given by

$$\begin{aligned} \mathbf{L} &= \begin{bmatrix} L_1 & 0 & 0 \\ 0 & L_2 & 0 \\ 0 & 0 & L_3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{R} = \begin{bmatrix} R_1 & 0 & 0 \\ 0 & R_2 & 0 \\ 0 & 0 & R_3 \end{bmatrix} \\ \mathbf{C} &= \begin{bmatrix} \frac{1}{C_1} & -\frac{1}{C_1} & 0 \\ -\frac{1}{C_1} & \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} & -\frac{1}{C_2} \\ 0 & -\frac{1}{C_2} & \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (13)$$

The modal analysis representation of the system (12) leads to the expression in principal coordinates

$$\begin{aligned} \ddot{q}_i + 2\xi_i \omega_i \dot{q}_i + \omega_i^2 q_i &= \psi_i \dot{V}_s \\ \mathbf{i}(t) &= \mathbf{\Psi} \mathbf{q}(t) \end{aligned} \quad (14)$$

where ξ_i and ω_i are damping ratio and natural frequency as defined in (4) and $\mathbf{q} = [q_1, q_2, q_3]^T$. The matrix $\mathbf{\Psi} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ contains the eigenvector column space or mode shapes and is known as the modal matrix. In frequency domain eq. (14) takes the form:

$$(s^2 + 2\xi_i \omega_i s + \omega_i^2) Q_i(s) = \psi_i \dot{V}_s(s) \quad (15)$$

Notice that, for an impulsive excitation voltage source $V_s = \delta(t)$ with $\delta(t) = \begin{cases} 1 & \text{if } t = 0 \\ 0 & \text{if } t \neq 0 \end{cases}$ the Dirac's delta function, in the frequency domain, using Laplace transform operator $\mathcal{L}\{\cdot\}$ we have.

$$V_s(t) = \delta(t) \Rightarrow \mathcal{L}\{\dot{V}_s(t)\} = \dot{V}_s(s) = s \quad (16)$$

On the other hand, for a free decay condition, that is, a change in initial conditions, eq. (15) takes the form:

$$(s^2 + 2\xi_j \omega_j s + \omega_j^2) Q_j(s) = p_{0,j} + p_{1,j} s \quad (17)$$

where $p_{j,j}$, $i=1,2,3, j=0,1$ are constants that depend on the initial conditions of current and voltage of each capacitor.

IV. EXPERIMENTAL RESULTS

For the evaluation of the modal parameters extraction of the circuit shown in Fig. 3, some experiments were carried out. The system parameters are reported in Table I. Two different excitations were used for the experimental modal analysis: impulse-response and free-decay. The theoretical modal parameters of the system are reported in Table II, those parameters were obtained by solving, numerically, the eigenproblem of the system defined in (12).

TABLE I. SYSTEM PARAMETERS

Param. <i>i</i>	1	2	3
L	100 mH	400 mH	2 H
R	8Ω	8Ω	8Ω
C	0.1 μF	0.1 μF	0.1 μF

A 32 bit and ARM® architecture microcontroller was used to effectively generate pulse with an amplitude of 1 volt and a duration of 100 micro seconds to emulate a pulse excitation for the circuit.

A. Impulse-response test

The system response was characterized by taking measurements of the capacitors voltage at a sample rate of 1×10^6 samples per second (100 KSPS). The system response and the excitation signal in time domain are shown in Fig. 4.

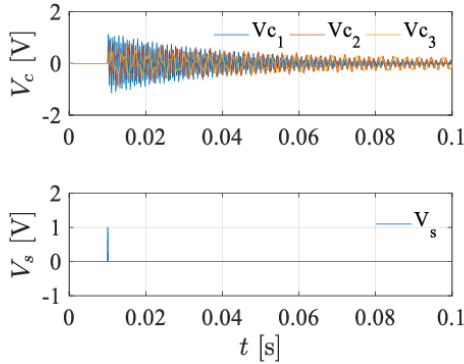


Fig. 4. Impulse response of the system.

TABLE II. THEORETICAL MODAL PARAMETERS

Param. Mode	1	2	3
ω_{di} [Hz]	310.7	795.8	1829
ξ_i [%]	2.8	2.9	3.1
A_i [V]	1.3	1.98	1.7

The frequency response functions (FRF) are shown in Fig. 5, whereas the modal parameters estimated with peak picking and circle fit techniques are shown in Table 2. In Fig. 6, the Nyquist plot shows the phases with the implicit mode shapes of the system.

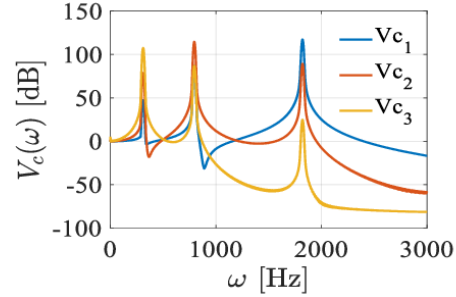


Fig. 5. FRF of the system.

TABLE III. MODAL PARAMETERS, IMPLUSE-RESPONSE TEST.

Param. Mode	Peak Picking			Circle Fit		
	1	2	3	1	2	3
ω_{di} [Hz]	311.27	794.98	1820	312.08	795.02	1816
ξ_i [%]	2.73	2.8	2.98	2.69	2.82	3.0
A_i [V]	1.23	1.88	1.65	1.36	1.87	1.35

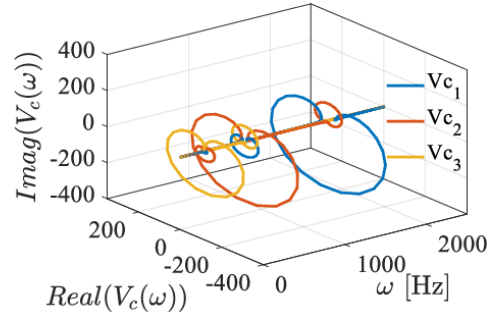


Fig. 6. Implicit mode shapes of the system.

The phases of the individual capacitor voltages are equivalent to the modal shapes of the electric system and are graphically represented in Fig.6. The 3D diagram shows the argand or Nyquist plot as a function of frequency instead of a trajectory curve.

B. Free-decay test

The free decay test was performed by applying a constant voltage of 1 [V], digitally generated by the 10 bits digital to analog converter (DAC) of the ARM® processor. The constant voltage was applied to the circuit during one second and then, the DAC was turned off to simulate a change in initial conditions in the electric system. The parameters of the system are reported in Table 1, the free response of the system y shown in Fig. 7.

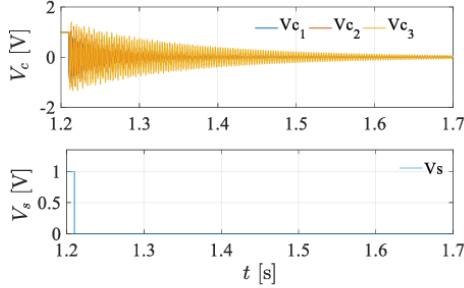


Fig. 7. Free-decay test, system response.

The frequency response functions (FRF) of the free-decay test are shown in Fig. 8, whereas the estimated modal parameters are reported in Table 3.

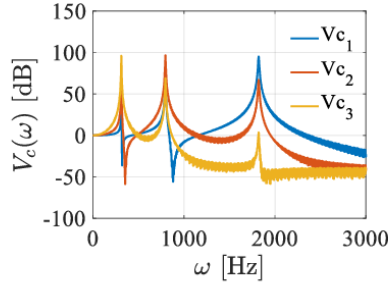


Fig. 8 Frequency response function of the system.

TABLE IV. MODAL PARAMETERS, FREE-DECAY TEST.

Param. Mode	Peak Picking			Circle Fit		
	1	2	3	1	2	3
ω_i [Hz]	310.89	790.22	1818.5	308.98	790.40	1816.6
ξ_i [%]	2.35	2.12	2.98	2.3	2.38	3.2
A_i [V]	1.43	1.38	1.45	1.33	1.5	1.65

A comparison of results is presented in Table V where the mean value of the both techniques is compared to the analytical values reported in Table II for each excitation input.

TABLE V. RESULTS COMPARISON.

Param. Diff %	Impulse-test			Free-decay		
	1	2	3	1	2	3
ω_i [Hz]	0.31	0.1	0.6	0.24	0.68	0.62
ξ_i [%]	3.21	3.1	3.54	3.21	3.1	4.0
A_i [V]	0.38	5.3	2.94	3.07	3.53	3.82

In Fig. 9, the Nyquist plot shows the phase whit the implicit second mode shape of the system. The circle fit method for the modal parameters extraction of mode 2 is also depicted.

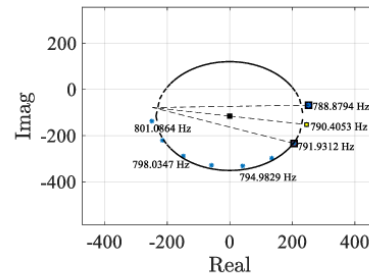


Fig. 9. Circle fit of the second resonance.

V. CONCLUSIONS

An evaluation of two transient response methods was performed in an electric system. The generation of high accuracy impulse signal tests is possible due to the versatility and high performance of the peripherals of the ARM® processors, in conjunction with the strict time restrictions and real time operation of the digital systems. The transient response methods are easy to implement compared to their mechanical version, due to the exact reproducibility of the input signal. Based on the results of the test, the impulse-response test is more stable and adequate for the extraction of modal parameters.

REFERENCES

- [1] Heylen, W., Lammens, S. and Sas, P., *Modal Analysis. Theory and Testing*, Katholieke Universiteit Leuven, Belgium, 2003.
- [2] Ewins, D.J. *Modal Testing: Theory, Practice and Application*, Reserach Studies Press LTD Second Edition 2001.
- [3] Jimin He and Zhi-Fang Fu, *Modal Analysis*, Gran Bretaña: Oxford Imprint Butterworth-Heinemann 2001.
- [4] F. Beltran-Carbajal, G. Silva-Navarro, L.G. Trujillo-Franco, *On-line parametric estimation of damped multiple frequency oscillations*, Electric Power Systems Research, Volume 154, 2018, Pages 423-432, ISSN 0378-7796, <https://doi.org/10.1016/j.epsr.2017.09.013>.
- [5] Brandt, A. (2011). *Single-Input Frequency Response Measurements. In Noise and Vibration Analysis*, A. Brandt (Ed.), <https://doi.org/10.1002/9780470978160.ch1>



**Centro de Investigación y de Estudios Avanzados
del Instituto Politécnico Nacional**



The Organizing Committee of the 2022 19th International Conference on Electrical
Engineering, Computing Science and Automatic Control (CCE)
awards the present

RECOGNITION TO:

***Hector S. Sanchez-Villegas, Luis G. Trujillo-Franco and Hugo F. Abundis-
Fong***

For the presentation of the paper entitled:

***On the evaluation of free-decay and impulse-response modal testing
techniques***

Mexico City, Mexico
November 9-11, 2022

A handwritten signature in black ink, appearing to read "G. Silva Navarro".

Dr. Gerardo Silva Navarro
Co-Chair of CCE

A handwritten signature in black ink, appearing to read "W. Liu".

Dr. Wen Yu Liu
Co-Chair of CCE

II. Script usado en Matlab para el procesamiento de datos experimentales.

```
% Se limpia la pantalla y las variables
clear
close all
clc
%se cargan los datos almacenados en los archivos .CSV
ACC1=load('P102.CSV');
t10=ACC1(:,1);
acc10=ACC1(:,2);
I10=ACC1(:,3);

ACC2=load('P20.CSV');
t20=ACC2(:,1);
acc20=ACC2(:,2);
I20=ACC2(:,3);

ACC3=load('P302.CSV');
t30=ACC3(:,1);
acc30=ACC3(:,2);
I30=ACC3(:,3);

ACC4=load('P40.CSV');
t40=ACC4(:,1);
acc40=ACC4(:,2);
I40=ACC4(:,3);

% Se grafican los datos experimentales
figure
plot(t20,acc20)
grid

set(gca,'defaulttextinterpreter','latex')

set(get(gca,'XLabel'),'String','%t$ [s]',...
    'FontName','times news roman',...
    'FontAngle','normal',...
    'FontSize',25)
%
set(get(gca,'YLabel'),'String','%Acel$ [g]',...
    'FontName','times news roman',...
    'FontAngle','normal',...
    'FontSize',25)

set(gca,'fontsize',20);
set(gca,'fontname','Times New Roman','FontWeight','Normal');

figure
plot(t20,I20)
grid
set(gca,'defaulttextinterpreter','latex')

set(get(gca,'XLabel'),'String','%t$ [s]',...
    'FontName','times news roman',...
    'FontAngle','normal',...
    'FontSize',25)
%
set(get(gca,'YLabel'),'String','%Fuerza$ [N]',...
    'FontName','times news roman',...
    'FontAngle','normal',...
    'FontSize',25)
```

Análisis modal en sistemas mecánicos usando excitación tipo impacto

```
set(gca,'fontsize',20);
set(gca,'fontname','Times New Roman','FontWeight','Normal');

%Se establece el periodo de muestreo a partir de los datos experimentales
%y los datos necesarios involucrados en el cálculo de la función de
%respuesta en frecuencia FRF
Fs=1/(t10(2)-t10(1));
n=(size(t10));
NFFT = 2^nextpow2(max(n));%Datos totales para el cálculo de la FFT

winlen =10000;%Tamaño de la ventana de datos

[frf f]= modalfrf(I20,acc20,Fs,winlen);
%modalfrf(I20,acc20,Fs,winlen,'Sensor','dis');
%[fn,dr,ms,ofrf] = modalfit(frf,f,Fs,24,'FitMethod','lsrf');

%Se calculan las funciones de respuesta en frecuencia de cada punto de
%interés.
[TF_1,F10]=tfestimate(I10,acc10,[],[],NFFT,Fs);
[TF_2,F20]=tfestimate(I20,acc20,[],[],NFFT,Fs);
[TF_3,F30]=tfestimate(I30,acc30,[],[],NFFT,Fs);
[TF_4,F40]=tfestimate(I40,acc40,[],[],NFFT,Fs);

[fn,dr,ms,ofrf] = modalfit(TF_2,F20,Fs,48,'FitMethod','lsrf');

TF=[TF_1 TF_2 TF_3 TF_4];

[fn,c,drc,msc,ofrfc] = modalfit(TF,F20,Fs,16,'FitMethod','lsrf');
x=[0 0.1 0.2 0.3 0.4];

x_modo1=[0 imag(msc(1,1)) imag(msc(2,1)) 0.1*imag(msc(3,1)) -1*imag(msc(4,1))];
x_modo2=[0 imag(msc(1,1)) imag(msc(2,1)) 0.1*imag(msc(3,1)) imag(msc(4,1))];
x_modo3=[0 imag(msc(1,2)) imag(msc(2,2)) 0.5*imag(msc(3,2)) imag(msc(4,2))];
x_modo4=[0 0.5*imag(msc(1,3)) imag(msc(2,3)) 0.1*imag(msc(3,3)) 8*imag(msc(4,3))];

%Se grafican las formas modales
figure
subplot(2,2,1)
plot(x,x_modo1,'b*-')
legend('Modo 1')
legend boxoff
grid
%axis([0 1,-0.5 0.5])
set(gca,'defaulttextinterpreter','latex')
set(gca,'fontsize',20);
set(gca,'fontname','Times New Roman','FontWeight','Bold');

subplot(2,2,2)
plot(x,x_modo2,'b*-')
legend('Modo 2')
legend boxoff
grid
%axis([0 1,-0.5 0.5])
set(gca,'defaulttextinterpreter','latex')
set(gca,'fontsize',20);
set(gca,'fontname','Times New Roman','FontWeight','Bold');

subplot(2,2,3)
plot(x,x_modo3,'b*-')
legend('Modo 3')
legend boxoff
grid
%axis([0 1,-0.5 0.5])
```

```

set(gca,'defaulttextinterpreter','latex')
set(gca,'fontsize',20);
set(gca,'fontname','Times New Roman','FontWeight','Bold');

subplot(2,2,4)
plot(x,x_mod04,'b+-')
legend('Modo 4')
legend boxoff
grid
%axis([0 1,-0.5 0.5])
set(gca,'defaulttextinterpreter','latex')
set(gca,'fontsize',20);
set(gca,'fontname','Times New Roman','FontWeight','Bold');

figure
plot3(F10,imag(TF_1),real(TF_1),'-b')
hold on
plot3(F20,imag(TF_2),real(TF_2),'-k')
plot3(F30,imag(TF_3),real(TF_3),'-r')
plot3(F40,imag(TF_4),real(TF_4),'-g')
grid
axis([0 130, -400 400 -400 400])
legend('FRF 10 [cm]','FRF 20 [cm]','FRF 30 [cm]','FRF 40 [cm]')

set(gca,'defaulttextinterpreter','latex')

set(get(gca,'XLabel'),'String','$\omega$ [Hz]',...
    'FontName','times news roman',...
    'FontAngle','normal',...
    'FontSize',25)

%
set(get(gca,'YLabel'),'String','$\text{Re}(ac(\omega))$',...
    'FontName','times news roman',...
    'FontAngle','normal',...
    'FontSize',25)

set(get(gca,'ZLabel'),'String','$\text{Im}(ac(\omega))$',...
    'FontName','times news roman',...
    'FontAngle','normal',...
    'FontSize',25)

set(gca,'fontsize',20);
set(gca,'fontname','Times New Roman','FontWeight','Normal');

figure
plot(F10,20*log(smooth(abs(TF_1),20)),'-b')
hold on
plot(F20,20*log(smooth(abs(TF_2),20)),'-k')
plot(F30,20*log(smooth(abs(TF_3),20)),'-r')
plot(F40,20*log(smooth(abs(TF_4),20)),'-g')
grid
legend('FRF 10 [cm]','FRF 20 [cm]','FRF 30 [cm]','FRF 40 [cm]')
legend boxoff
axis([0 130 -150 150])

set(gca,'defaulttextinterpreter','latex')

set(get(gca,'XLabel'),'String','$\omega$ [Hz]',...
    'FontName','times news roman',...

```



```
        'FontAngle','normal',...
        'FontSize',25)
%
set(get(gca,'YLabel'),'String',' $\omega$  [dB]',...
    'FontName','times news roman',...
    'FontAngle','normal',...
    'FontSize',25)

set(gca,'fontsize',20);
set(gca,'fontname','Times New Roman','FontWeight','Normal');
```