

Modelación y determinación de las posiciones de equilibrio de un soporte hidrodinámico excitado.

Tesis

que para obtener el grado de

Maestro en Ingeniería Mecánica

Presenta

Carlos de la Rosa Gutiérrez

Director de Tesis: Dr. Ignacio Ramírez Vargas

Codirectores: M. en C. Luis Manuel Palacios Pineda

Dr. Abdiel Gómez Mercado

Pachuca de Soto, Hgo., México, Junio 2014



“ 2014, Año de Octavio Paz”

Pachuca, Hgo., 21 mayo de 2014.

OFICIO No. DEPI-131-14
ASUNTO: AUTORIZACIÓN DE IMPRESIÓN

**ING. CARLOS DE LA ROSA GUTIÉRREZ
PRESENTE**

La que suscribe Jefa de la División de Estudios de Posgrado e Investigación, comunica a usted que se autoriza la impresión de su tesis titulada:

**“MODELACIÓN Y DETERMINACIÓN DE LAS POSICIONES DE EQUILIBRIO DE UN SOPORTE
HIDRODINÁMICO EXCITADO”**

Sin otro particular por el momento, quedo de usted.

ATENTAMENTE
EXCELENCIA EN EDUCACIÓN TECNOLÓGICA®

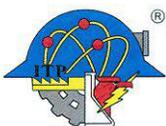

**DRA. ÉRIKA OSIRIS ÁVILA DÁVILA
JEFA DE LA DIVISIÓN DE ESTUDIOS DE POSGRADO E INVESTIGACIÓN**



SECRETARÍA DE EDUCACIÓN PÚBLICA
DIRECCIÓN GENERAL DE EDUCACIÓN
SUPERIOR TECNOLÓGICA
I. T. PACHUCA
DIVISIÓN DE ESTUDIOS DE
POSTGRADO E INVESTIGACIÓN

C.p. Expediente

EOAD/epr



Agradecimientos

A mi esposa Paula Cecilia, mi hija Abril Estrella y mi nieto Carlos Adrián, quienes con su comprensión y palabras de aliento me impulsaron hacia el cumplimiento de esta meta.

A mis maestros por haber compartido conmigo sus conocimientos y su ejemplo.

Al Instituto Tecnológico Superior del Oriente del Estado de Hidalgo por su invaluable apoyo.

Resumen

En el presente trabajo se estudia el comportamiento de la capa de lubricante en las chumaceras de un rotor con lubricación hidrodinámica, el cual es de gran relevancia para el desempeño óptimo del rotor en condiciones normales de operación, así como para incrementar su tiempo de vida útil y reducir la frecuencia de fallas. Es por ello que se modelan y determinan las posiciones de equilibrio del eje en los soportes para un sistema rotor-chumaceras con lubricación hidrodinámica, bajo condiciones de excitación externa. También se determinan las propiedades dinámicas de rigidez y amortiguamiento para el caso clásico en una chumacera corta.

Para lograr esto, se toma como base la ecuación de Reynolds para evaluar el campo de presión en las chumaceras, con el objeto de obtener la fuerza resultante y cuantificar la reducción de la capacidad de carga, considerando diferentes factores de excitación. Se introduce un modelo para una chumacera corta con un puerto de lubricación, otro modelo con un anillo de presurización y uno más con una línea de presurización.

A continuación se soluciona el modelo presurizado y se realiza una comparación con el modelo clásico, cuya solución es conocida. Posteriormente, se calculan las posiciones de equilibrio de los casos con y sin presurización, y se analizan cuatro casos especiales de presurización.

Finalmente, se determinan los coeficientes dinámicos de rigidez y amortiguamiento en una chumacera corta y se discute su comportamiento.

Abstract

In the present thesis, it is studied the behavior of the lubricating film in the bearing journals of a rotor with hydrodynamic lubrication, which is relevant in order to get an optimal performance of the rotor during its normal operation conditions, as well as to increase its lifetime and reduce its failure frequency. That is why the equilibrium positions (attitude angles) are modeled and calculated on the bearings under external stress conditions, for a rotor-bearings system with hydrodynamic lubrication. Besides, the dynamic properties of stiffness and dampness of the lubricating film are calculated for the short bearing classical case.

To do this, based on the Reynolds' equation, the pressure field in the bearings is evaluated in order to get the resulting force and then to quantify the reduction of the loading capacity, considering different stressing factors. A model for a short bearing with one lubrication port is introduced, as well as a model with a pressure ring and another one with a pressure line.

Then, the pressurized model is solved and the results are compared with the classic model, which solution is known. Thereafter the attitude angles are calculated for the cases with and without external pressure, and four special pressurization cases are analyzed.

Finally, both the stiffness and damping dynamic coefficients are determined for a short bearing, and its behavior is discussed.

CONTENIDO

	Página
Resumen	iv
Abstract	v
Contenido	vi
Índice de tablas	ix
Índice de figuras	x
Nomenclatura	xii
Introducción	1
Justificación	1
Objetivo general	3
Objetivos específicos	3
Alcances y limitaciones	4
Referencias	4
Capítulo 1. Estado del arte	5
1.1 Introducción	5
1.2 Evolución de la rotodinámica y de la teoría de vibraciones	6
1.3 Actualidad en el diseño de chumaceras hidrodinámicas presurizadas	8
1.4 La rotodinámica en México	9
Referencias	10

Capítulo 2. La ecuación de Reynolds	12
2.1 Introducción	12
2.2 Las ecuaciones de Navier-Stokes	13
2.3 Análisis del orden de magnitud. El número de Reynolds	14
2.4 Contribución de las fuerzas de gravedad. El número de Froude	15
2.5 Contribución del término de presión. El número de Euler	16
2.6 Hipótesis válidas para las chumaceras hidrodinámicas	17
2.7 Deducción de la ecuación de Reynolds en coordenadas cartesianas	18
2.8 Ecuación de Reynolds en coordenadas cilíndricas	24
Referencias	32
Capítulo 3. Modelos rotodinámicos	33
3.1 La ecuación de la lubricación de Reynolds	33
3.2 Modelos clásicos	37
3.2.1 Chumaceras cortas	37
3.2.2 Chumaceras largas	38
3.3 Modelos excitados. La función delta de Dirac	39
3.4 Modelo para una chumacera corta con puertos puntuales de presurización	40
3.4.1 Introducción	40
3.4.2 Modelo de presurización	41
3.5 Modelo para una chumacera corta con un anillo de presurización	44
3.6 Modelo para una chumacera corta con una línea de presurización	45
Referencias	46
Capítulo 4. Campos de presión y posiciones de equilibrio	47
4.1 Campos de presión	47

4.1.1 Solución del modelo no presurizado (caso clásico)	48
4.1.2 Solución del modelo presurizado	49
4.2 Cálculo analítico de la posición de equilibrio en el caso clásico	52
4.2.1 Fuerzas en la película de aceite. El número de Sommerfeld	52
4.2.2 Fuerzas de presión en la chumacera corta no presurizada	56
4.2.3 Trayectoria de la posición de equilibrio ("locus") para chumaceras no presurizadas	57
4.3 Cálculo analítico de la posición de equilibrio de una chumacera presurizada	58
4.3.1 Fuerzas de presión en una chumacera corta presurizada	59
4.3.2 Ángulo de equilibrio en una chumacera corta presurizada	61
4.3.3 Análisis de cuatro casos especiales de presurización	63
4.3.3.1 Presurización en la parte central superior de la chumacera	64
4.3.3.2 Presurización en la parte central inferior de la chumacera	69
4.3.3.3 Presurización horizontal de la chumacera	79
4.4 Ubicación de algunas posiciones de equilibrio en un rotor presurizado	91
4.5 Resultados	96
Referencias	98
Capítulo 5. Coeficientes dinámicos de rigidez y amortiguamiento. Caso clásico	99
5.1 Introducción	99
5.2 Definición clásica de los coeficientes rotodinámicos	101
5.3 Coeficientes rotodinámicos de una chumacera corta no presurizada	110
5.4 Cálculo de los coeficientes rotodinámicos de rigidez y amortiguamiento de una chumacera corta en el sistema de coordenadas xy. Caso clásico	113
5.5 Comportamiento gráfico de los coeficientes rotodinámicos. $(L/D) = 1/4$	119
Conclusiones	121

Índice de Tablas

<u>No.</u>	<u>Descripción</u>	<u>Página</u>
4.1	Puerto de inyección superior. Número de Sommerfeld como función de ε , φ y f_{prt} para una chumacera corta.	67
4.2	Puerto de inyección superior. Valores de excentricidad y ángulo de equilibrio como función de S para una chumacera corta.	68
4.3	Puerto de inyección inferior, $F_X < W$. Número de Sommerfeld como función de ε , φ y f_{prt} para una chumacera corta.	73
4.4	Puerto de inyección inferior, $F_X < W$. Valores de excentricidad y ángulo de equilibrio como función de S para una chumacera corta.	74
4.5	Puerto de inyección inferior, $F_X > W$. Número de Sommerfeld como función de ε , φ y f_{prt} para una chumacera corta.	77
4.6	Puerto de inyección inferior, $F_X > W$. Valores de excentricidad y ángulo de equilibrio como función de S para una chumacera corta.	78
4.7	Puerto de inyección lateral derecho, $f_{prt} = 5$. Ángulo de equilibrio como función de ε para una chumacera corta.	85
4.8	Puerto de inyección lateral derecho, $f_{prt} = 20$. Ángulo de equilibrio como función de ε para una chumacera corta.	86
4.9	Puerto de inyección lateral derecho, $f_{prt} = 100$. Ángulo de equilibrio como función de ε para una chumacera corta.	87
4.10	Puerto de inyección lateral izquierdo, $f_{prt} = 5$. Ángulo de equilibrio como función de ε para una chumacera corta.	88
4.11	Puerto de inyección lateral izquierdo, $f_{prt} = 20$. Ángulo de equilibrio como función de ε para una chumacera corta.	89
4.12	Puerto de inyección lateral izquierdo, $f_{prt} = 100$. Ángulo de equilibrio como función de ε para una chumacera corta.	90
5.1	Coeficientes de rigidez y amortiguamiento de una chumacera corta (caso clásico) en el sistema de coordenadas $R-T$	111
5.2	Coeficientes de rigidez y amortiguamiento de una chumacera corta (caso clásico) en el sistema de coordenadas $x-y$	112

Índice de Figuras

<u>No.</u>	<u>Descripción</u>	<u>Página</u>
2.1	Nomenclatura de una chumacera hidrodinámica en reposo.	18
2.2	Frontera de una chumacera hidrodinámica.	22
2.3	Espesor de la película lubricante en la chumacera.	24
2.4	Posición arbitraria del muñón en la chumacera.	25
2.5	Variación del espesor de la película de lubricante.	26
2.6	Vectores unitarios en las direcciones radial y transversal.	27
2.7	Vector de posición para el cálculo de la velocidad del punto S.	28
3.1	Vista transversal de una chumacera hidrodinámica.	34
3.2	Vista esquemática de una chumacera.	37
3.3	Sistema de coordenadas fijo (X, Y, Z) de una chumacera y sistema móvil (X', Y', Z') del muñón.	41
3.4	Ubicación del punto de presurización en la chumacera.	42
3.5	Posición axial de alimentación de lubricante.	44
3.6	Ubicación de la línea de presurización en la chumacera.	45
4.1	Campo de presión clásico en una chumacera corta, coordenadas axial y circunferencial.	49
4.2	Campo de presión clásico en una chumacera corta, coordenadas axial adimensional y circunferencial.	51
4.3	Campo de presión total aproximado, $f_{prt} = 2.5$.	51
4.4	Campo de presión total aproximado, $f_{prt} = 10$.	51
4.5	Dirección radial y transversal de las componentes de fuerza en la película de lubricante.	53
4.6	Ubicación del punto de presurización en la chumacera.	64
4.7	Excentricidad de equilibrio contra el número de Sommerfeld de una chumacera corta presurizada en su parte central superior.	66
4.8	Diagrama vectorial que muestra el único cuadrante donde es posible localizar al rotor cuando se presuriza en la parte central inferior de una chumacera corta con $F_X < W$.	70
4.9	Valores admisibles de f_{prt} como función de la excentricidad para una chumacera corta presurizada en su parte central inferior, $F_X < W$.	71
4.10	Excentricidad de equilibrio contra el número de Sommerfeld de una chumacera corta presurizada en su parte central inferior, $F_X < W$.	72

4.11	Diagrama vectorial que muestra el único cuadrante donde es posible localizar al rotor cuando se presuriza en la parte central inferior de una chumacera corta con $F_X > W$.	75
4.12	Valores admisibles de f_{prt} como función de la excentricidad para una chumacera corta presurizada en su parte central inferior, $F_X > W$.	76
4.13	Excentricidad de equilibrio contra el número de Sommerfeld de una chumacera corta presurizada en su parte central inferior, $F_X > W$.	77
4.14	Posiciones de equilibrio del rotor cuando se presuriza verticalmente una chumacera corta, $S = 1$.	92
4.15	Posiciones de equilibrio del rotor cuando se presuriza verticalmente una chumacera corta, $S = 2$.	92
4.16	Posiciones de equilibrio del rotor cuando se presuriza verticalmente una chumacera corta, $S = 4$.	92
4.17	Posiciones de equilibrio del rotor cuando se presuriza verticalmente una chumacera corta, $S = 8$.	93
4.18	Posiciones de equilibrio del rotor cuando se presuriza verticalmente una chumacera corta con fuerza de presurización mayor que el peso del sistema, $S = 4$.	93
4.19	Posiciones de equilibrio del rotor cuando se presuriza una chumacera corta en su parte lateral derecha.	94
4.20	Posiciones de equilibrio del rotor cuando se presuriza una chumacera corta en su parte lateral izquierda.	95
4.21	Cambio relativo del ángulo de equilibrio del rotor cuando se presuriza una chumacera corta en su parte lateral derecha.	96
4.22	Cambio relativo del ángulo de equilibrio del rotor cuando se presuriza una chumacera corta en su parte lateral izquierda.	97
5.1	Propiedades dinámicas de rigidez y amortiguamiento de la película de lubricante en una chumacera hidrodinámica.	100
5.2	Descomposición de fuerzas de la película de lubricante en una chumacera hidrodinámica.	101
5.3	Coefficientes rotodinámicos de rigidez para una chumacera corta no presurizada.	119
5.4	Coefficientes rotodinámicos de amortiguamiento para una chumacera corta no presurizada.	119

Nomenclatura

p	Presión
h	Espesor adimensional de la película de fluido lubricante
θ	Coordenada angular
R	Radio de la chumacera
z	Coordenada axial de la chumacera
μ	Viscosidad absoluta del fluido lubricante
C_r	Claro radial
e	Excentricidad dimensional
ε	Excentricidad adimensional
φ	Ángulo de equilibrio (“attitude angle”)
ω	Velocidad angular en radianes por segundo
N	Velocidad angular en revoluciones por segundo
L	Longitud axial de la chumacera
z	Coordenada axial adimensional de la chumacera
\bar{p}	Presión adimensional
\bar{p}_{pres}	Presión adimensional en la película de aceite debida a la inyección de lubricante
\bar{p}_{Ocv}	Presión adimensional de la solución de Ocvirk
\bar{p}_{prom}	Presión adimensional promedio
p_{fict}	Presión ficticia
ε_{Ocv}	Excentricidad adimensional de la solución de Ocvirk
φ_{Ocv}	Ángulo de equilibrio de la solución de Ocvirk

F_{dim}	Fuerza ficticia característica
D	Diámetro interior de la chumacera
ε_{pres}	Excentricidad adimensional en una chumacera presurizada
φ_{pres}	Ángulo de equilibrio en una chumacera presurizada
β	Coordenada angular del puerto de inyección
a	Posición adimensional, arbitraria y axial del puerto de inyección en la chumacera
ΔF_{pres}	Fuerza total de presurización
Δs	Área del puerto puntual de inyección
Δp	Presión de inyección
$(\Delta p)_{prt}$	Presión adimensional en un puerto puntual de inyección
$\delta(x)$	Función Delta de Dirac
\bar{q}_{prt}	Presión adimensional en un puerto puntual respecto de la fuerza ficticia característica
W	Peso total del sistema
S	Número de Sommerfeld
$F_{X,Ocv}$	Componente vertical de la fuerza en la película de aceite en la solución de Ocvirk
$F_{Y,Ocv}$	Componente horizontal de la fuerza en la película de aceite en la solución de Ocvirk
$F_{X,pres}$	Componente vertical de la fuerza en la película de aceite debida a presurización
$F_{Y,pres}$	Componente horizontal de la fuerza en la película de aceite debida a la presurización
$F_{X,result}$	Fuerza resultante vertical en la película de aceite
$F_{Y,result}$	Fuerza resultante horizontal en la película de aceite

F_R	Componente radial de la fuerza de presión en la película de aceite
F_T	Componente tangencial de la fuerza de presión en la película de aceite
\bar{F}_R	Componente radial de la fuerza adimensional de presión en la película de aceite
\bar{F}_T	Componente tangencial de la fuerza adimensional de presión en la película de aceite
f_{prt}	Fuerza de presión adimensional en un puerto puntual de inyección respecto del peso
f_T	Componente tangencial de la fuerza adimensional de presión en la película de aceite
f_R	Componente radial de la fuerza adimensional de presión en la película de aceite
\hat{f}_T	Componente tangencial de la fuerza adimensional debida a la presurización externa
\hat{f}_R	Componente radial de la fuerza adimensional debida a la presurización externa
\hat{f}_x	Componente vertical de la fuerza adimensional debida a la presurización externa
\hat{f}_y	Componente horizontal de la fuerza adimensional debida a la presurización externa
K_{ij}	Coeficientes de rigidez, directos y acoplados en las direcciones radial y tangencial, $i = R, T, j = R, T$
C_{ij}	Coeficientes de amortiguamiento, directos y acoplados en las direcciones radial y tangencial, $i = R, T, j = R, T$
\bar{K}_{ij}	Coeficientes adimensionales de rigidez, directos y acoplados en las direcciones horizontal y vertical, $i = x, y, j = x, y$
\bar{C}_{ij}	Coeficientes adimensionales de amortiguamiento, directos y acoplados en las direcciones horizontal y vertical, $i = x, y, j = x, y$
$\tilde{K}_{ij\ pres}$	Coeficientes adimensionales de rigidez, directos y acoplados en las direcciones horizontal y vertical, debidos a la presurización externa, $i = x, y, j = x, y$

- $\tilde{C}_{ij_{pres}}$ Coeficientes adimensionales de amortiguamiento, directos y acoplados en las direcciones horizontal y vertical, debidos a la presurización externa, $i = x, y$, $j = x, y$
- \tilde{K}_{ij} Coeficientes adimensionales de rigidez, directos y acoplados en las direcciones horizontal y vertical, debidos a las presurizaciones clásica y externa, $i = x, y$, $j = x, y$
- \tilde{C}_{ij} Coeficientes adimensionales de amortiguamiento, directos y acoplados en las direcciones horizontal y vertical, debidos a las presurizaciones clásica y externa, $i = x, y$, $j = x, y$
- m Masa del disco

Introducción

En el diseño y la operación de máquinas rotatorias se presentan diversos problemas, entre los que destacan las vibraciones estructurales, necesidades especiales de lubricación, fatiga, desbalance, ejes doblados, desalineamiento, inestabilidad aerodinámica, resonancia estructural, pérdida de rendimiento y fracturas, principalmente en las partes críticas rotatorias o en las asociadas a ellas, como son los rotores, ejes, rodamientos y/o chumaceras y álabes, que están sujetos a esfuerzos y condiciones de trabajo que pueden causar desgaste prematuro, altos costos de mantenimiento, fallas imprevistas y reducción del tiempo de vida útil del equipo.

Justificación

Por lo anterior, se hace necesario contar con información y metodologías tanto para facilitar el diseño, como para resolver los deterioros más comunes. Asimismo, se requieren técnicas de inspección y análisis, con procedimientos para la reparación del equipo. La utilización de diferentes herramientas matemáticas y la aplicación de la mecánica computacional, permiten establecer modelos que ayudan a resolver la problemática descrita.

El comportamiento de la capa de lubricante en las chumaceras de un rotor con lubricación hidrodinámica es de gran relevancia para el desempeño óptimo de la máquina rotatoria en condiciones normales de operación, así como para incrementar su tiempo de vida y reducir la frecuencia de fallas, ya que en la película aparecen fuerzas dinámicas de rigidez y amortiguamiento (coeficientes rotodinámicos) que modifican las ecuaciones de movimiento, contribuyendo a incrementar las amplitudes vibratorias.

El establecer un modelo matemático que permita caracterizar dicho comportamiento ofrece también la ventaja de poder mejorar el sistema de lubricación, las condiciones de operación y predecir fallas oportunamente.

De acuerdo con Vance [1], el análisis rotodinámico puede ser útil para el cumplimiento de las siguientes metas, durante el diseño, la operación y la identificación de problemas en turbomaquinaria:

1. Predecir velocidades críticas a las cuales la vibración debida al desbalance del rotor es un máximo, para evitarlas en la operación normal de la máquina.
2. Determinar modificaciones de diseño para cambiar las velocidades críticas.
3. Predecir las frecuencias naturales de vibración torsional.
4. Calcular las masas de corrección de balance y su localización, a partir de mediciones de la vibración.
5. Predecir amplitudes de vibración síncrona causadas por desbalance del rotor. Este es uno de los objetivos más difíciles de lograr con precisión, ya que la amplitud de la órbita del rotor depende de dos factores muy difíciles de medir:
 - a) la distribución del desbalance a lo largo del rotor, y
 - b) el amortiguamiento del sistema rotor-chumaceras.
6. Predecir el umbral de velocidades y frecuencias de vibración para inestabilidad dinámica. Este objetivo también representa un gran reto, ya que algunas de las fuerzas desestabilizadoras aún no son entendidas lo suficiente para realizar un modelado matemático preciso, aunque la inestabilidad causada por chumaceras cilíndricas, conocida como "latiguo" ("rotura de la cuña de aceite", "oilwhip"), puede predecirse con precisión.
7. Determinar modificaciones de diseño para suprimir inestabilidades dinámicas.

En la presente tesis es de particular interés la meta 5.

La identificación de los coeficientes rotodinámicos de la película de lubricante en las chumaceras y el establecimiento de un modelo rotor-chumaceras que se asemeje bastante bien a sistemas reales, es un problema fundamental en el análisis de la estabilidad de maquinaria rotatoria y para asegurar su buen funcionamiento dinámico.

Bently [2], [3] ha demostrado experimentalmente que las perturbaciones externas, tales como el desalineamiento o la presurización, causan problemas tales como la reducción de la capacidad de carga y un aumento en el gasto de energía. Por este motivo, el conocimiento del comportamiento dinámico que sea lo más próximo posible a modelos reales nos permitirá hacer un buen diseño preliminar, modificaciones al diseño, o bien el control de vibraciones que minimice los problemas causados por excitaciones del muñón del eje en las chumaceras.

Es por esta razón que se investiga de manera numérico-analítica la obtención de las posiciones de equilibrio y los coeficientes rotodinámicos que incluyen perturbaciones externas, además de la elaboración de un modelo de un sistema rotor-chumaceras que incluya los efectos de los coeficientes perturbados, para asegurar la capacidad de carga desde un diseño preliminar y el ahorro de energía en maquinaria rotatoria, con un impacto que principalmente es tecnológico y económico.

Desde el punto de vista tecnológico, la aportación de este trabajo será la aplicación de herramientas matemáticas para proporcionar modelos que ayuden a mejorar el proceso de diseño, la operación y el establecimiento de programas y procedimientos de mantenimiento de turbomáquinas, con lo cual se estará desarrollando tecnología de aplicación específica.

Económicamente, el principal impacto radica en la importante reducción de los tiempos y los costos que implica la fabricación y prueba de prototipos de rotores de máquinas rotatorias y sus sistemas de lubricación.

Objetivo general

Determinar, analítica y numéricamente, la influencia de las excitaciones externas al muñón en una chumacera corta cilíndrica plana sobre las posiciones de equilibrio y las propiedades dinámicas de la película de lubricante, en estado estable.

Objetivos específicos

1.- Obtener una expresión matemática para el espesor de película del lubricante, que caracterice las perturbaciones en las chumaceras.

2.- Utilizando el espesor de película, que incluye los efectos externos, evaluar la ecuación de Reynolds y obtener el campo de presión con excitación, comparándolo con el modelo clásico (sin excitación).

3.- Obtener una evaluación cuantitativa sobre la influencia de los agentes externos en las propiedades de estado estable, utilizando el campo de presión para obtener la fuerza resultante y cuantificando la reducción de la capacidad de carga, considerando diferentes factores de excitación.

4.- Determinar las posiciones de equilibrio del muñón del eje en la chumacera.

5.- Determinar la influencia de las perturbaciones sobre los coeficientes rotodinámicos, que dependen tanto de las fuerzas hidrodinámicas como de los momentos hidrodinámicos resultantes.

Alcances y limitaciones

En este trabajo se establece y se resuelve un modelo matemático, y se realiza el cálculo con el software comercial Mathematica 8.0, para determinar el comportamiento de la capa de lubricante en las chumaceras cortas de un rotor con lubricación hidrodinámica, determinando las posiciones de equilibrio bajo condiciones de excitación externa en estado estable, y las propiedades dinámicas de rigidez y amortiguamiento.

Los coeficientes dinámicos de rigidez y amortiguamiento se calculan a partir de la ecuación general de Reynolds. No se consideran desalineamientos, cálculos de estabilidad ni operación en estado transitorio, dejando estos temas para trabajos futuros.

Referencias

[1] Vance, J., (1988) "Rotordynamics of Turbomachinery", John Wiley and Sons.

[2] Bently D., Petchnev (2000). *Dynamic Stiffness and Advantages of Externally pressurized fluid film bearings*. Orbit, First Quarter.

[3] Bently D., Hatch, Grissom (2002). *Fundamentals of Rotating Machinery Diagnostics*.

CAPÍTULO 1

Estado del arte

1.1 Introducción.

Históricamente, el hombre se ha ocupado en el control y la utilización de la energía en diversas aplicaciones. En las últimas cuatro décadas ha habido un importante incremento en el desarrollo de la industria en general, particularmente en las industrias aeronáutica, petrolera y de generación de electricidad, con una creciente necesidad de máquinas altamente eficientes que su vez operen a altas velocidades. Es por esto que recientemente han surgido nuevas especialidades necesarias para la evolución científica y tecnológica, tal como es la rotodinámica.

En términos generales, la rotodinámica se puede definir como la disciplina que se encarga de analizar y predecir el comportamiento dinámico de las máquinas rotatorias, también conocidas como turbomáquinas. A través de la historia, la evolución de la rotodinámica se ha dado a partir de las contribuciones de diversas áreas del conocimiento, tales como las vibraciones, la dinámica estructural, la hidrodinámica, y, más recientemente, el desarrollo de materiales, aplicaciones matemáticas y de computación.

Durante la operación de una máquina rotatoria, sus características rotodinámicas son altamente influenciadas por las características y el desempeño de las chumaceras sobre las cuales está soportado el rotor. Es común que para la operación industrial de turbomaquinaria pesada se utilicen chumaceras lubricadas mediante una película fluida, que generalmente es algún aceite.

La película de fluido lubricante que separa las superficies en movimiento, las cuales son los muñones del eje rotatorio y la cara interna de las chumaceras, que son fijas, puede asumirse que tiene un desempeño parecido al que presenta un resorte de comportamiento complejo. Dicha película de lubricante muestra propiedades de amortiguamiento y rigidez, las cuales pueden alterar significativamente el desempeño de la turbomáquina en cuanto a sus velocidades críticas y a su respuesta al desbalance, además de que pueden inducir inestabilidades en el rotor. Consecuentemente, se vuelve muy importante el tener en cuenta las características particulares de las chumaceras durante el proceso de diseño de las maquinas rotatorias.

La rigidez del sistema rotor-chumacera es determinada principalmente por la rigidez de la chumacera actuando en serie con la rigidez del rotor, mientras que el amortiguamiento del sistema generalmente es determinado casi en su totalidad por las propiedades de amortiguamiento de la película lubricante en la chumacera.

A continuación se reseñan brevemente las aportaciones de los principales investigadores que han contribuido para el desarrollo histórico de la rotodinámica, que actualmente tiene en las modernas turbinas a gas y en los motores a reacción para aeronaves como las más sofisticadas turbomáquinas disponibles.

1.2 Evolución de la rotodinámica y de la teoría de vibraciones.

Un componente importante en la historia del desarrollo de turbomaquinaria es la evolución de la rotodinámica y de la tecnología de chumaceras, que son a su vez el resultado del trabajo analítico y experimental de investigadores pioneros.

La teoría de vibraciones mecánicas inició un desarrollo significativo hacia finales del siglo XIX. Simultáneamente comenzó un rápido progreso en la construcción de turbomaquinaria de alta velocidad, particularmente en la evolución de locomotoras y turbinas a vapor. W. J. M. Rankine estudió la vibración lateral en ejes uniformes sin fricción, aunque erróneamente estableció que la operación del eje por arriba de la velocidad crítica era imposible [1]. Durkeley y Reynolds [2] realizaron investigaciones analíticas extensas.

El sueco Carl Gustav De Laval fue el primer investigador que experimentó con rotores de turbinas a una velocidad de 30,000 rpm, en 1887, utilizando una tobera convergente-divergente para operar una separadora de crema de leche; es decir, a una velocidad de operación claramente mayor que la primera velocidad crítica de la máquina, contradiciendo en la práctica las predicciones de Rankine.

Lord Rayleigh escribió el primer tratado sistemático sobre el tema, formalizando el concepto de funciones normales, e introdujo los conceptos de fuerzas y coordenadas generalizadas. Además, introdujo sistemáticamente la energía y los métodos aproximados en el análisis de vibraciones, aunque no resolvió las ecuaciones diferenciales resultantes. En 1892 publicó su trabajo clásico sobre análisis dimensional.

A. Foppl resolvió el problema de vibración rotacional síncrona por desbalance, explicando analíticamente por qué es posible la operación por arriba de la velocidad crítica, tal como ya lo había demostrado experimentalmente De Laval [3]. Los análisis y desarrollos de De Laval son veces llamados de Jeffcott [4] por investigadores de origen anglosajón, debido a que los trabajos de este investigador tuvieron en su tiempo una mayor difusión.

En la década de 1920, se diseñaron turbinas para operar con cargas cada vez más altas y con velocidades superiores a la velocidad crítica principal. Como consecuencia, surgieron los problemas modernos de la rotodinámica, algunos de los cuales fueron resueltos por B. L. Newkirk [5] y A. T. Kimball [6] para el caso del orbitamiento del eje. Los efectos giroscópicos fueron introducidos analíticamente en las ecuaciones de movimiento por Aurel Stodola [7] y adicionalmente cuantificados por B. L. Newkirk, H. D. Taylor [8], y por el mismo Stodola [9].

Al mismo tiempo, la generación de energía eléctrica tuvo una gran expansión en los Estados Unidos, debido al rápido desarrollo industrial. Los fabricantes de turbinas contrataron a muchos ingenieros europeos, notables entre ellos fueron: Timoshenko, Den Hartog y Myklestad, quienes fueron contratados por Westinghouse.

Actualmente se utilizan análisis basados en los métodos de elemento finito. Las bases de la idea de discretización continua involucran los métodos de Holzer [10], Guembel

[11], Tolle [12] y Van Den Dungen [13], así como el método de matrices de transferencia [14]. Su uso para un continuo general fue sugerido por Courant [15]. Esta idea fue adaptada para aplicarse en estructuras por M. J. Turner, R. W. Clough, H. H. Martín y L. J. Topp [16].

1.3 Actualidad en el diseño de chumaceras hidrodinámicas presurizadas.

La revolución industrial, de 1750 a 1850, generó la necesidad de contar con chumaceras efectivas y confiables, con lo que se volvió importante el estudio de la lubricación, siendo el aceite de oliva el lubricante más utilizado en máquinas a vapor.

Las primeras teorías del comportamiento de chumaceras de película fluida asumían, erróneamente, que la carga del eje del rotor en movimiento solo era aplicada directamente a la cara interna estacionaria de la chumacera, por lo que la función del fluido lubricante era únicamente disminuir la fricción. En 1887, el ingeniero inglés Beauchamp Tower concluyó una serie de experimentos precisos para medir la presión del fluido lubricante en diferentes partes de la chumacera [17], [18], llegando a la conclusión de que la distribución de presiones dentro de la película de aceite ocurre de tal manera que la película de aceite ejerce fuerzas de carga. Es así como las chumaceras de película fluida se consideraron por primera vez como un sistema dinámico con características de rigidez, ya que demostró que se producía una considerable presión hidrodinámica en la película y que el eje realmente flotaba sobre el aceite.

Simultáneamente y de manera independiente, en 1886, la teoría de Osborne Reynolds [19] logró explicar analíticamente los experimentos realizados por Tower, derivando la famosa ecuación de Reynolds, la cual describe la distribución de presiones en el lubricante de la chumacera. El primer uso práctico de la teoría de Reynolds fue una solución aproximada para el caso específico de una chumacera infinitamente corta, la cual fue obtenida por Fred William Ocvirk [20] en 1952.

Otra contribución importante es la del físico alemán Arnold Sommerfeld, quien desarrolló una solución para la ecuación de Reynolds en 1904, mostrando que el desplazamiento de la chumacera, es decir, su relación de excentricidad, podía ser caracterizada por una combinación adimensional de parámetros que incluyen la carga, la velocidad de rotación del eje y el claro de la chumacera.

A principios del siglo XX, los cálculos de la presión en el lubricante de las chumaceras establecieron diferencias notorias entre lubricación parcial y completa, siendo esta última cuando el muñón está completamente rodeado por la película de fluido. En 1919, W. J. Harrison [21] publicó un trabajo de investigación donde predecía que el comportamiento de la chumacera con lubricación completa sería inestable. El análisis de Harrison no fue completo y posteriormente se demostró que solo resulta correcto para la operación bajo ciertas condiciones.

Lo anterior provocó que en la práctica comúnmente se adoptaran de manera deliberada las chumaceras con lubricación parcial, decisión basada en la creencia de que su comportamiento sería más estable. Esto también llevó a un uso generalizado de chumaceras con inyección externa a bajas presiones, debido a que algunos trabajos experimentales aseguraban que el presurizar una chumacera con lubricación completa lo haría más inestable. Investigaciones más recientes contradicen estas creencias, mostrando que una presión de inyección externa adecuada, aplicada en una chumacera con lubricación completa, puede ser muy estable.

El criterio para una adecuada presión de inyección consiste en que al lubricante se le dirige para que se desplace a lo largo de la flecha (flujo axial, paralelo al eje de la flecha), en lugar de que fluya alrededor de ella (flujo circunferencial).

1.4 La rotodinámica en México.

Cada dos años, el Centro de Investigación y Asistencia Técnica de Querétaro (CIATEQ) y el Instituto de Investigaciones Eléctricas (IIE), con la participación de Petróleos Mexicanos (PEMEX), Turbomachinery International Magazine (TMI) y la Comisión Federal de Electricidad (CFE), organizan el Congreso y Exhibición Latinoamericana de Turbomaquinaria, evento que es el punto de reunión más importante en América Latina

entre fabricantes y usuarios de turbomaquinaria, además de que en él se presentan los trabajos más sobresalientes que se realizan en nuestro país.

Este congreso por lo general tiene su sede en México y participan también organizaciones como Electric Power Research Institute (EPRI), South Western Research Institute (SWRI), la Universidad de Texas A&M, General Electric y Petrogas de Venezuela, entre otras instituciones.

La Sociedad Mexicana de Ingeniería Mecánica (SOMIM) organiza el Congreso Internacional Anual de Ingeniería Mecánica, que es un importante foro donde se muestran los últimos avances en diversas áreas de la ingeniería mecánica en México y otros países, incluyendo temas de rotodinámica y vibraciones.

En el Instituto Politécnico Nacional y en algunas otras instituciones públicas se realiza investigación en el área de rotodinámica. Tal es el caso del CIATEQ, el IIE y el IMP. Adicionalmente, el Laboratorio de Vibraciones y Rotodinámica de la SEPI-ESIME-IPN, cuyo fundador es el Dr. Julio César Gómez Mancilla, es actualmente el líder nacional en estos temas y en el desarrollo de tecnología asociada a la dinámica, la lubricación aplicada y las vibraciones de turbomaquinaria.

Referencias

- [1] Rankine, W. J. M. (1869), "On the centrifugal force of rotating shaft", *Engineer* (London).
- [2] Durkeley - Reynolds (1883), "On the whirling and vibration of shafts", *Philos. Trans. Serr. A*, 279 – 359
- [3] De Laval, K. G. (1895), "Das Problem del De Laval", *Shen Turbinewelle. Civilgenieur* 61: 333 – 342.
- [4] Jeffcott (1919), *Philos. Mag.* Mar. Pp. 304 – 314.
- [5] Newkirk, B. L. (1924), "Shaft whipping", *General Electric Rev* 27(3): 169–178.
- [6] Kimball, A. T. (1924), "Internal friction theory of shaft whirling", *General Electric Rev* 27(4): 244–254.
- [7] Stodola, A. (1918), "Neuekritische Drehzahlen als Folge der Kreiserwirkung der Läufer", *Z. Gesamte Turbinenwers* 15: 269–275.

-
- [8] Newkirk, B. L. – Taylor, H.D. (1925), “Shaft whipping due to oil action in journal bearings”, *General Electric Rev.* 25(8): 559–568.
- [9] Stodola, A. (1925), “Kritische Wellenstörungsfolge der Nachgiebigkeit des Ölpostersim Larger”, *Schweiz Bauztg.* 85: 265.
- [10] (1907). *Schifbau*, 8:823, 866, 904.
- [11] (1912). *Z. VDI.* 56:1025.
- [12] (1921). *Regelung der Kraftmaschinen*, Berlin.
- [13] Van Den Dungen, M F-H. (1928), “Les problèmesGénéreaux de la Technique des Vibrations”, *Mem. Sc. Phys.*, L’ Academie de Sciences, Paris, Gauthier – Villars.
- [14] Thomson, W. T. (1950), “Matrix solution for the vibration of non–uniform beams”, *Journal of Applied Mechanics* 17: 337–339.
- [15] Courant (1943), “Vibrational methods for the solution of problems of equilibrium and vibrations” *Bull. Am. Math. Soc.* 49: 1-23.
- [16] Turner-Clough, Martin, Topp (1956), “Stiffness and deflection analysis of complex structures”, *J. Aeronaut. Sci.* 23: 805–824.
- [17] Tower, B. (1884), “First Report of Friction Experiments”, *Proc. Inst. Mech. Engrs.*, (a) 1883, pp. 632 – 659; (b) pp. 29 – 35.
- [18] Tower, B. (1885), “Second Report on Friction Experiments”, *Proc. Inst. Mech. Engrs.* 1885, pp. 58-70.
- [19] Reynolds, O. (1886), “On the Theory of Lubrication and Its Applications to Mr. Beauchamp Tower’s Experiments Including an Experimental Determination of the Viscosity of Olive Oil”, *Philos. Trans. Royal Society of London, Series A, Vol. 177. Part 1*, pp. 157–234.
- [20] Ocvirk, F. W. (1952), “Short Bearing Approximation for Full Journal Bearings”, *National Advisory Committee for Aeronautics (NACA) TN 2808*.
- [21] Harrison, W. J. (1919), “The Hydrodynamical Theory of Lubrication of a Cylindrical Bearing Under Variable Load and of a Pivot Bearing”, *Transactions of the Cambridge Philosophical Society*, Vol. 22, April 24, 1919, pp. 373–388.

CAPÍTULO 2

La ecuación de Reynolds

2.1 Introducción.

A finales del siglo XIX, empezó una seria apreciación de la lubricación en la hidrodinámica cuando Beauchamp Tower descubrió que se puede generar presión en la película del lubricante que se encuentra entre dos superficies con movimiento relativo entre sí. Al tiempo del descubrimiento de Tower, Osborne Reynolds y otros teóricos estaban trabajando sobre la teoría hidrodinámica de la lubricación. Por una coincidencia afortunada, los datos detallados de Tower estaban disponibles para proporcionar la confirmación experimental casi al mismo tiempo en que Reynolds los necesitó.

El resultado de esto fue la teoría de la lubricación hidrodinámica que se pudo expresar en forma de ecuación, conocida como la “*ecuación de Reynolds*”, que fue originalmente expuesta en un memorable artículo por Osborne Reynolds en 1886, mismo que fue publicado en los “*Proceedings of the Royal Society of London*”. Reynolds proporcionó la primera prueba analítica de que un líquido viscoso podía separar físicamente dos superficies en deslizamiento relativo por medio de presión hidrodinámica, dando como resultado un bajo valor de fricción y teóricamente cero desgaste.

El artículo clásico de Reynolds no solo contiene la ecuación diferencial básica, sino que contiene también una comparación entre sus predicciones teóricas y los resultados experimentales obtenidos por Tower en 1883.

2.2 Las ecuaciones de Navier-Stokes.

La ecuación de Reynolds se puede obtener a partir de las ecuaciones de Navier-Stokes, las cuales son fundamentales en la mecánica de fluidos. Usando coordenadas cartesianas y omitiendo las fuerzas de cuerpo, las ecuaciones de Navier-Stokes de la cantidad de movimiento para un fluido newtoniano de densidad y viscosidad constantes se pueden establecer como:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + v \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + w \cdot \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \gamma \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \cdot \frac{\partial v}{\partial x} + v \cdot \frac{\partial v}{\partial y} + w \cdot \frac{\partial v}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \gamma \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) \quad (2.2)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + u \cdot \frac{\partial w}{\partial x} + v \cdot \frac{\partial w}{\partial y} + w \cdot \frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \gamma \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right), \quad (2.3)$$

donde ρ y μ son, respectivamente, la densidad y la viscosidad absoluta del fluido, p es la presión, u , v , y w son las componentes de la velocidad del fluido en las direcciones x , y y z .

El modelo campo-fluido se completa con la ecuación de continuidad para fluido incompresible, expresada como:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (2.4)$$

2.3 Análisis del orden de magnitud. El número de Reynolds.

En cualquier problema de fluidos, se puede obtener la importante relación entre las fuerzas de inercia y las viscosas a partir de los valores que proporcione el número de Reynolds. En una chumacera, la velocidad del fluido u es mucho mayor a la velocidad v que atraviesa la película de fluido, por tanto, $v \ll u$ y entonces $u(\partial u / \partial x) > v(\partial u / \partial y)$.

Además, se puede considerar que el ancho de la chumacera es más o menos del mismo orden que su longitud, por lo que $(\partial u / \partial x) \approx u_0 / R$ y $(\partial u / \partial z) \approx u_0 / R$. Si w representa la velocidad del fluido en la dirección z , entonces la velocidad del fluido en la dirección z debe ser una fracción de la velocidad u en la dirección del movimiento axial. Por lo tanto, $u(\partial u / \partial x) > w(\partial u / \partial z)$ y de aquí que el término $u(\partial u / \partial x)$ se considere como el término de inercia dominante que se utiliza para efectos de comparación.

Las fuerzas viscosas contienen los términos $\mu(\partial^2 u / \partial x^2)$, $\mu(\partial^2 u / \partial y^2)$, $\mu(\partial^2 u / \partial z^2)$, los cuales necesitan compararse evaluando la siguiente relación:

$$\frac{\mu(\partial^2 u / \partial x^2)}{\mu(\partial^2 u / \partial y^2)} = \frac{(\partial / \partial x)(\partial u / \partial x)}{(\partial / \partial y)(\partial u / \partial y)} \approx \frac{(1/R)(u/R)}{(1/C_r)(u/C_r)} = \left(\frac{C_r}{R}\right)^2 \ll 1 \quad (2.5)$$

Entonces se tiene que $\mu(\partial^2 u / \partial x^2) \ll \mu(\partial^2 u / \partial y^2)$. Se puede observar que las fuerzas viscosas con gradientes a través de la película del fluido son términos dominantes. A continuación se comparan las fuerzas viscosas con las de inercia.

$$\frac{\rho u(\partial u / \partial x)}{\mu(\partial^2 u / \partial y^2)} \approx \frac{\rho u_0(u_0 / R)}{\mu(u_0 / C_r^2)} = \frac{\rho u_0}{\mu} \left(\frac{C_r^2}{R}\right) = \frac{\rho u_0 R}{\mu} \left(\frac{C_r}{R}\right)^2 = Re \left(\frac{C_r}{R}\right)^2 = Re_* , \quad (2.6)$$

donde Re_* es el número de Reynolds modificado. Vale la pena notar que el factor $(C_r / R)^2$ es una cantidad del orden 10^{-6} . Se puede ver que si el número de Reynolds $Re = (\rho u_0 R) / \mu$ llegara a ser muy grande, entonces las fuerzas viscosas tenderán a dominar a las inerciales. Para mayor claridad, consideremos los siguientes valores típicos en una chumacera: $R = 0.02 m$, $\frac{C_r}{R} = 10^{-3}$, $u_0 = 6.28 m/s$, $\rho = 876 kg/m^3$, $\mu = 0.25 Pa \cdot s$.

Con estos valores, el número de Reynolds modificado toma el valor:

$$\text{Re}_* = \frac{\rho u_0 R}{\mu} \left(\frac{C_r}{R} \right)^2 = 0.00044$$

De aquí se puede ver que las fuerzas de inercia son despreciables en comparación con las fuerzas viscosas, lo cual es un caso típico en chumaceras hidrodinámicas. Aun así, es posible que se presente el fenómeno de turbulencia cuando el número de Reynolds excede el rango de 1000 a 2000, siendo en este caso los términos de inercia los que ahora son predominantes.

2.4 Contribución de las fuerzas de gravedad. El número de Froude.

Las fuerzas de cuerpo que normalmente se encuentran en la lubricación hidrodinámica son las de gravitación y las magnéticas. El número de Froude muestra la relación de las fuerzas de inercia a las fuerzas de gravedad.

Sea la fuerza de gravedad por unidad de volumen igual a ρg . La comparación con las fuerzas de inercia $\rho u(\partial u / \partial x)$ se puede escribir como:

$$\text{Fr} = \frac{F. \text{Inercia}}{F. \text{Gravedad}} = \frac{\rho u(\partial u / \partial x)}{\rho g} \approx \frac{u_0 (u_0 / R)}{g} = \frac{u_0^2}{g R} \quad (2.7)$$

Utilizando los valores anteriores para una chumacera típica, se obtiene:

$$\text{Fr} = \frac{F. \text{Inercia}}{F. \text{Gravedad}} = 201$$

Este resultado indica que las fuerzas de inercia son más grandes que las fuerzas de gravedad.

También se puede encontrar una relación directa entre las fuerzas de gravedad y las fuerzas viscosas, dividiendo el número de Reynolds por el número de Froude.

$$\frac{\text{Número de Reynolds}}{\text{Número de Froude}} = \frac{\frac{F. Inercia}{F. Viscosas}}{\frac{F. Inercia}{F. Gravedad}} = \frac{F. Gravedad}{F. Viscosas} = \frac{\rho g C_r^2}{\mu u_0} \quad (2.8)$$

Usando los valores para la chumacera dada con anterioridad:

$$\frac{F. Gravedad}{F. Viscosas} = \frac{\rho g C_r^2}{\mu u_0} = 2.189 \times 10^{-6}$$

Por lo tanto, se puede notar que las fuerzas de gravedad se pueden despreciar en relación con las fuerzas viscosas.

2.5 Contribución del término de presión. El número de Euler.

Se puede determinar la importancia del término de presión relativo al término de inercia, utilizando el número de Euler, el cual se define como:

$$\text{Número de Euler} = \frac{F. Presión}{F. Inercia} = \frac{\partial p / \partial x}{\rho u (\partial u / \partial x)} \cong \frac{P_{ref}}{\rho u_0^2}, \quad (2.9)$$

donde P_{ref} es la presión de referencia promedio, basada en la carga proyectada en una chumacera hidrodinámica (ésta es del orden de 5 MPa), por lo que:

$$\text{Número de Euler} = \frac{P_{ref}}{\rho u_0^2} = 144.72$$

Este resultado indica que las fuerzas de presión son más grandes que las fuerzas de inercia. Una relación directa de las fuerzas de presión con las viscosas se puede obtener multiplicando el número de Reynolds por el número de Euler.

$$\begin{aligned} (\text{Número de Euler})(\text{Número de Reynolds}) &= \frac{F. Presión}{F. Inercia} \frac{F. Inercia}{F. Viscosas} = \frac{F. Presión}{F. Viscosas} \quad (2.10) \\ &= \frac{P_{ref}}{\rho u_0^2} \frac{\rho u_0 R \left(\frac{C_r}{R}\right)^2}{\mu} = \frac{P_{ref} R \left(\frac{C_r}{R}\right)^2}{\mu u_0} \end{aligned}$$

Calculando el valor numérico de esta relación con los datos proporcionados anteriormente se obtiene:

$$\frac{F.Presión}{F.Viscosas} = \frac{p_{ref} R}{\mu u_0} \left(\frac{C_r}{R} \right)^2 = 0.063$$

El resultado anterior permite concluir que las fuerzas viscosas no son mucho más grandes que las de presión, de tal forma que ambos términos necesitan ser considerados.

2.6 Hipótesis válidas para las chumaceras hidrodinámicas.

Considerando el análisis adimensional anterior del orden de magnitud, se pueden sugerir cinco hipótesis que pueden considerarse válidas para la mayoría de las aplicaciones de chumaceras hidrodinámicas:

1. Se asume que el fluido es newtoniano, donde los esfuerzos cortantes y las velocidades de deformación son directamente proporcionales.
2. Los términos de inercia y las fuerzas de cuerpo se consideran despreciables cuando se comparan con los términos viscosos.
3. La variación de la presión a través del espesor de la película se asume que es despreciable, $\partial p / \partial y = 0$.
4. Se considera que el flujo es laminar. En la presencia de turbulencias se deben considerar los términos inerciales.
5. Los efectos de la curvatura son despreciables. Esto implica que el espesor de la película del lubricante es mucho más pequeño que la longitud o el ancho de la chumacera, de tal manera que el dominio físico del flujo es plano, lo cual permite el uso de coordenadas cartesianas.

2.7 Deducción de la ecuación de Reynolds en coordenadas cartesianas.

Para comprender mejor cada término que aparece en la ecuación de Reynolds, es importante mostrar la ubicación de las variables que intervienen en una chumacera hidrodinámica. En la figura 2.1 se muestra una chumacera junto con el muñón en reposo.

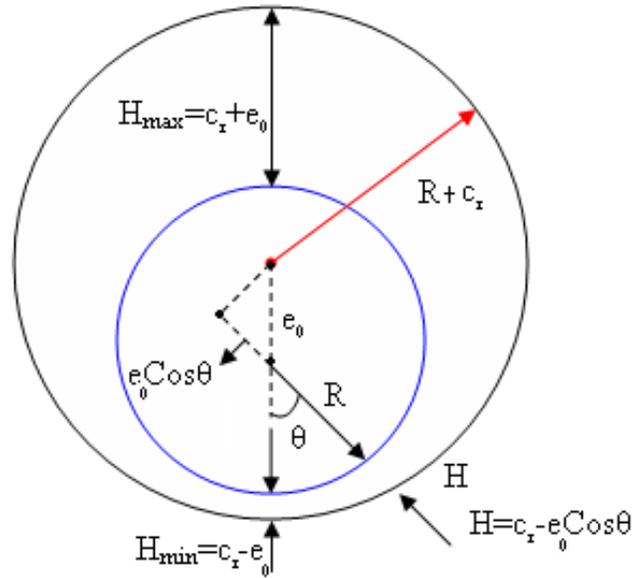


Figura 2.1. Nomenclatura de una chumacera hidrodinámica en reposo

En la figura, R es el radio del muñón, C_r representa el claro radial (diferencia entre el radio de la chumacera y el del muñón), e_0 es la excentricidad medida del centro de la chumacera al centro del muñón, H es el espesor de la película de lubricante.

Para comenzar, es necesario adimensionalizar las ecuaciones de Navier-Stokes con el objeto de poder trabajar en forma general. Éstas se repiten a continuación:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + v \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + w \cdot \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \gamma \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \quad (2.11)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \cdot \frac{\partial v}{\partial x} + v \cdot \frac{\partial v}{\partial y} + w \cdot \frac{\partial v}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \gamma \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) \quad (2.12)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + u \cdot \frac{\partial w}{\partial x} + v \cdot \frac{\partial w}{\partial y} + w \cdot \frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \gamma \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) \quad (2.13)$$

Se introducen los siguientes parámetros adimensionales:

$$\bar{x} = \frac{x}{R}, \quad \bar{y} = \frac{y}{C_r}, \quad \bar{z} = \frac{z}{R} \quad (2.14)$$

$$\bar{u} = \frac{u}{\omega R}, \quad \bar{v} = \frac{v}{\omega C_r}, \quad \bar{w} = \frac{w}{\omega R}, \quad \tau = \omega t \cdot \quad (2.15)$$

Ahora es necesario sustituir (2.14) y (2.15) en las ecuaciones de Navier-Stokes, para lo cual se calculan primeramente todos los términos del primer y segundo miembro de (2.11), como se muestra a continuación:

Para el primer miembro:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial(\omega R \bar{u})}{\partial \left(\frac{\tau}{\omega} \right)} = \omega^2 R \frac{\partial \bar{u}}{\partial \tau} \quad (2.16)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial(\omega R \bar{u})}{\partial(R \bar{x})} = \omega \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} \quad (2.17)$$

$$u \frac{\partial u}{\partial x} = \omega^2 R \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} \quad (2.18)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial(\omega R \bar{u})}{\partial(C_r \bar{y})} = \omega \left(\frac{R}{C_r} \right) \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} \quad (2.19)$$

$$v \frac{\partial u}{\partial y} = \omega^2 R \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} \quad (2.20)$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial(\omega R \bar{u})}{\partial(R \bar{z})} = \omega \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{z}} \quad (2.21)$$

$$w \frac{\partial u}{\partial z} = \omega^2 R \bar{w} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{z}} \quad (2.22)$$

Para el segundo miembro:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2(\omega R \bar{u})}{\partial(R \bar{x})^2} = \frac{\omega}{R} \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{x}^2} \quad (2.23)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2(\omega R \bar{u})}{\partial(C_r \bar{y})^2} = \frac{\omega}{R} \left(\frac{R}{C_r} \right)^2 \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{y}^2} \quad (2.24)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{\partial^2(\omega R \bar{u})}{\partial(R \bar{z})^2} = \frac{\omega}{R} \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{z}^2} \cdot \quad (2.25)$$

Haciendo que $\bar{p} = \frac{P}{P_{dim}}$, en donde $P_{dim} = \rho \gamma \omega \left(\frac{R}{C_r} \right)^2$:

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = \left(\frac{1}{\rho} \right) \rho \gamma \omega \left(\frac{R}{C_r} \right)^2 \frac{\partial \bar{p}}{\partial (R\bar{x})} = \gamma \frac{\omega}{R} \left(\frac{R}{C_r} \right)^2 \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}}. \quad (2.26)$$

Sustituyendo en la primera ecuación de Navier-Stokes (2.11) se obtiene:

$$\omega^2 R \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial \tau} + \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} + \bar{w} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{z}} \right) = -\gamma \frac{\omega}{R} \left(\frac{R}{C_r} \right)^2 \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}} + \gamma \frac{\omega}{R} \left[\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{x}^2} + \left(\frac{R}{C_r} \right)^2 \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{y}^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{z}^2} \right]. \quad (2.27)$$

Procediendo de igual forma, se tiene para la segunda ecuación de Navier-Stokes (2.12):

Para el primer miembro:

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial (\omega C_r \bar{v})}{\partial \left(\frac{\tau}{\omega} \right)} = \omega^2 C_r \frac{\partial \bar{v}}{\partial \tau} \quad (2.28)$$

$$u \frac{\partial v}{\partial x} = \omega^2 C_r \bar{u} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{x}} \quad (2.29)$$

$$v \frac{\partial v}{\partial y} = \omega^2 C_r \bar{v} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} \quad (2.30)$$

$$w \frac{\partial v}{\partial z} = \omega^2 C_r \bar{w} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{z}} \quad (2.31)$$

Para el segundo miembro:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 (\omega C_r \bar{v})}{\partial (R\bar{x})^2} = \frac{C_r \omega}{R^2} \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \bar{x}^2} \quad (2.32)$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 (\omega C_r \bar{v})}{\partial (C_r \bar{y})^2} = \frac{\omega}{C_r} \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \bar{y}^2} \quad (2.33)$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 (\omega C_r \bar{v})}{\partial (R\bar{z})^2} = \frac{\omega C_r}{R^2} \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \bar{z}^2}. \quad (2.34)$$

Haciendo que $\bar{p} = \frac{P}{P_{dim}}$, en donde $P_{dim} = \rho \gamma \omega \left(\frac{R}{C_r} \right)^2$:

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} = \left(\frac{1}{\rho} \right) \rho \gamma \omega \left(\frac{R}{C_r} \right)^2 \frac{\partial \bar{p}}{\partial (C_r \bar{y})} = \gamma \frac{\omega}{C_r} \left(\frac{R}{C_r} \right)^2 \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{y}}. \quad (2.35)$$

Sustituyendo en la segunda ecuación de Navier-Stokes (2.12):

$$\omega^2 C_r \left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial \tau} + \bar{u} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} + \bar{w} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{z}} \right) = -\gamma \frac{\omega}{C_r} \left(\frac{R}{C_r} \right)^2 \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{y}} + \gamma \frac{C_r \omega}{R^2} \left[\frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \bar{z}^2} \right] + \gamma \frac{\omega}{C_r} \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \bar{y}^2}. \quad (2.36)$$

Análogamente, para la tercera ecuación se obtiene:

$$\omega^2 R \left(\frac{\partial \bar{w}}{\partial \tau} + \bar{u} \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{y}} + \bar{w} \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{z}} \right) = -\gamma \frac{\omega}{R} \left(\frac{R}{C_r} \right)^2 \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{z}} + \gamma \frac{\omega}{R} \left[\frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \bar{x}^2} + \left(\frac{R}{C_r} \right)^2 \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \bar{y}^2} + \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \bar{z}^2} \right]. \quad (2.37)$$

Multiplicando las ecuaciones resultantes por el factor $\frac{1}{\frac{\gamma \omega}{R} \left(\frac{R}{C_r} \right)^2}$, y recordando que

$Re = \frac{\rho u L}{\mu} = \frac{\omega}{\gamma}$, y además $Re_* = Re \left(\frac{C_r}{R} \right)^2 R^2$, se pueden escribir las ecuaciones de Navier-

Stokes adimensionalizadas como sigue:

$$Re_* \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial \tau} + \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} + \bar{w} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{z}} \right) = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}} + \left(\frac{C_r}{R} \right)^2 \left[\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{z}^2} \right] + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{y}^2} \quad (2.38)$$

$$Re_* \left(\frac{C_r}{R} \right)^2 \left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial \tau} + \bar{u} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} + \bar{w} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{z}} \right) = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{y}} + \left(\frac{C_r}{R} \right)^2 \left[\frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \bar{z}^2} \right] + \left(\frac{C_r}{R} \right)^2 \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \bar{y}^2} \quad (2.39)$$

$$Re_* \left(\frac{\partial \bar{w}}{\partial \tau} + \bar{u} \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{y}} + \bar{w} \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{z}} \right) = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{z}} + \left(\frac{C_r}{R} \right)^2 \left[\frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \bar{z}^2} \right] + \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \bar{y}^2}. \quad (2.40)$$

Notando que para una chumacera se cumple que: $\frac{C_r}{R} \cong 10^{-3}$, $Re_* < 1$, (2.41)

entonces las ecuaciones (2.38), (2.39) y (2.40) toman la forma:

$$\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}} = \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{y}^2} \tag{2.42}$$

$$\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{y}} = 0 \tag{2.43}$$

$$\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{z}} = \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \bar{y}^2} . \tag{2.44}$$

De la segunda ecuación se puede notar que $\bar{p}(\bar{y}) = \text{constante}$, o bien, $\bar{p} = \bar{p}(\bar{x}, \bar{z})$.

Regresando a las variables adimensionales de las ecuaciones restantes, se tiene:

$$\frac{1}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \tag{2.45}$$

$$\frac{1}{\mu} \frac{\partial p}{\partial z} = \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \tag{2.46}$$

Integrando dos veces la ecuación (2.45) y usando los valores de la frontera en la chumacera (ver la figura 2.2), se puede escribir:

$$u(y) = \frac{1}{2\mu} \frac{\partial p(x,z)}{\partial x} y(y-H) + c_1 y + c_2, \quad u(0) = u_1, \quad u(H) = u_2, \tag{2.47}$$

donde:

$$u(y) = \frac{1}{2\mu} \frac{\partial p(x,z)}{\partial x} y(y-H) + \frac{u_2 - u_1}{H} y + u_1 \tag{2.48}$$

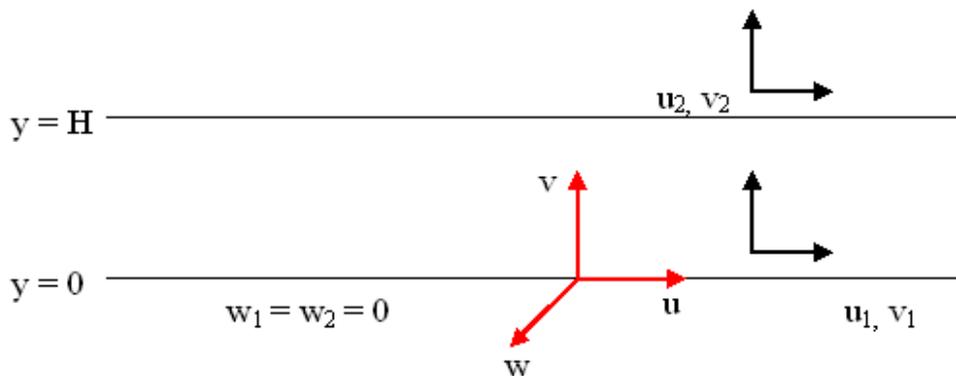


Figura 2.2. Frontera de una chumacera hidrodinámica.

Integrando dos veces la ecuación (2.46) se obtiene:

$$w(y) = \frac{1}{2\mu} \frac{\partial p(x, z)}{\partial z} y(y-H), \quad w(0) = w(H) = 0, \quad c_1 = c_2 = 0. \quad (2.49)$$

De la ecuación de continuidad:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \quad (2.50)$$

o bien:

$$-\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z}$$

Nótese que: $u_1 = u_1(x, z)$, $u_2 = u_2(x, z)$, $H = H(x, z)$.

Sustituyendo en la ecuación de continuidad:

$$-\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left[\underbrace{\frac{1}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial x} y(y-H) + \frac{u_2 - u_1}{H} y + u_1}_{u(y)} \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[\underbrace{\frac{1}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial z} y(y-H)}_{w(y)} \right] \quad (2.51)$$

Integrando la ecuación (2.51) con respecto de y :

$$-\int \frac{\partial v}{\partial y} dy = \int_0^{H(x,z)} \frac{\partial}{\partial x} [u(y)] dy + \int_0^{H(x,z)} \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{1}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial z} y(y-H) \right] dy \quad (2.52)$$

Usando la regla de Leibnitz:

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} \int_0^{r(\alpha)} f(x, \alpha) dx = \int_0^{r(\alpha)} \frac{\partial f(x, \alpha)}{\partial \alpha} dx + f(r(\alpha), \alpha) \frac{\partial r}{\partial \alpha}, \quad (2.53)$$

o bien:

$$\int_0^{r(\alpha)} \frac{\partial f(x, \alpha)}{\partial \alpha} dx = \frac{\partial}{\partial \alpha} \int_0^{r(\alpha)} f(x, \alpha) dx - f(r(\alpha), \alpha) \frac{\partial r}{\partial \alpha}. \quad (2.54)$$

Identificando las variables

$$\begin{aligned} x &\rightarrow y \\ r(\alpha) &\rightarrow H(x, z) \\ \alpha &\rightarrow x, z \end{aligned}$$

y aplicando (2.54) al primer término del segundo miembro de (2.52):

$$\begin{aligned} \int_0^H \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{1}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial x} y(y-H) + \frac{u_2 - u_1}{H} y + u_1 \right] dy &= \\ = \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{1}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial x} \int_0^H y(y-H) dy + \frac{u_2 - u_1}{H} \int_0^H y dy + u_1 \int_0^H dy \right] - u_2 \frac{\partial H}{\partial x} & \quad (2.55) \\ = -\frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{1}{2\mu} \cdot \frac{H^3}{6} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{u_1 + u_2}{2} H \right] - u_2 \frac{\partial H}{\partial x} \end{aligned}$$

De manera similar, aplicando (2.54) al segundo término del segundo miembro de (2.52):

$$\int_0^{H(x,z)} \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{1}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial z} y(y-H) \right] dy = - \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{1}{2\mu} \cdot \frac{H^3}{6} \frac{\partial p}{\partial z} \right] \quad (2.56)$$

Finalmente, sustituyendo (2.55) y (2.56) en (2.52):

$$v_1 - v_2 = - \frac{1}{12\mu} \frac{\partial}{\partial x} \left[H^3(x,z) \cdot \frac{\partial p}{\partial x} \right] - \frac{1}{12\mu} \frac{\partial}{\partial z} \left[H^3(x,z) \cdot \frac{\partial p}{\partial z} \right] + H \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{u_1 + u_2}{2} \right] + \frac{u_1 + u_2}{2} \frac{\partial H}{\partial x} - u_2 \frac{\partial H}{\partial x} \quad (2.57)$$

Reordenando, se obtiene la ecuación de Reynolds:

$$\underbrace{\frac{\partial}{\partial x} \left(H^3 \cdot \frac{\partial p}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(H^3 \cdot \frac{\partial p}{\partial z} \right)}_{\text{Ecuación de Reynolds}} = \underbrace{12\mu(v_2 - v_1)}_{\substack{\text{(estrechamiento)} \\ \text{squeeze}}} + \underbrace{6\mu(u_1 - u_2)}_{\substack{\text{(cuña)} \\ \text{wedge}}} \frac{\partial H}{\partial x} + \underbrace{6\mu H \frac{\partial}{\partial x} (u_1 + u_2)}_{\substack{\text{(extensión)} \\ \text{stretch}}} \quad (2.58)$$

$H = f(x, z)$

2.8 Ecuación de Reynolds en coordenadas cilíndricas.

En esta sección se muestra el desarrollo completo para transformar la ecuación de Reynolds a coordenadas cilíndricas, recordando que la chumacera tiene la forma de un cilindro, lo cual hará que los análisis y desarrollos posteriores sean más fáciles de realizar. En la figura 2.3 se muestra el espesor de la película de lubricante H en el sistema de coordenadas cartesianas; el eje x coincide con la superficie en reposo de la chumacera, por lo que ahí las velocidades son iguales a cero.

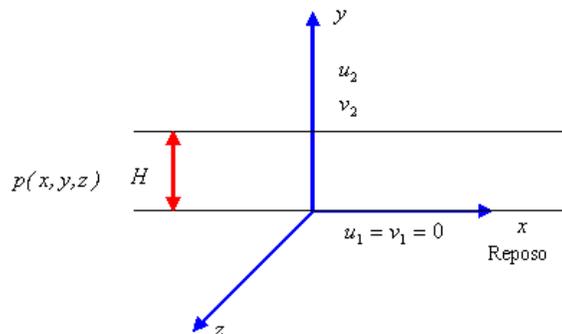


Figura 2.3. Espesor de la película de lubricante en la chumacera.

Por lo anterior, la ecuación de Reynolds (2.58) puede escribirse como:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{H^3}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{H^3}{\mu} \frac{\partial p}{\partial z} \right) = 12v_2 - 6u_2 \frac{\partial H}{\partial x} + 6H \frac{\partial u_2}{\partial x} \quad (2.59)$$

El espesor de la película del lubricante va cambiando a lo largo de la circunferencia de la chumacera, dando como resultado que existan posiciones para las cuales toma un valor máximo y un mínimo, respectivamente. En la figura 2.4 aparece una chumacera junto con el muñón para una posición arbitraria, en donde O representa el centro de la chumacera y J es el centro del muñón; S es un punto arbitrario en la película de lubricante y φ es el ángulo de equilibrio (conocido también como ángulo de "attitude").

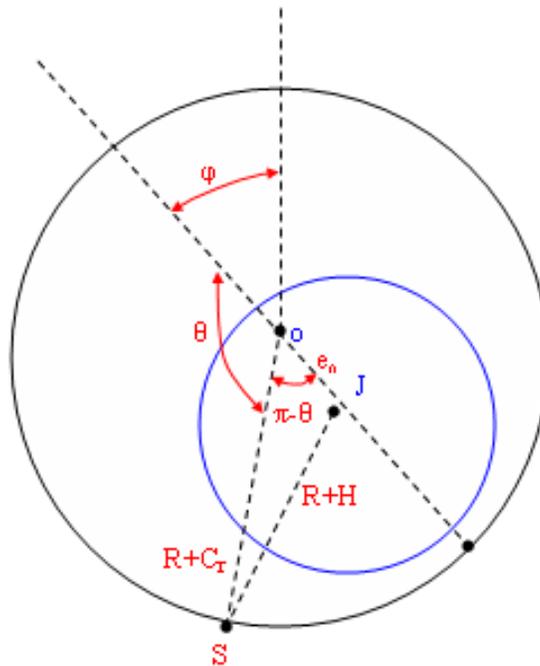


Figura 2.4. Posición arbitraria del muñón en la chumacera.

Es posible encontrar una expresión para el espesor del lubricante a partir de un análisis geométrico como sigue:

Aplicando el teorema de cosenos al triángulo SOJ , se tiene:

$$(R + H)^2 = (R + C_r)^2 + e_0^2 - 2(R + C_r)e_0^2 \cos(\pi - \theta) \quad (2.60)$$

Simplificando y notando que algunos términos son pequeños:

$$2RH + \underset{0}{H^2} = 2RC_r + \underset{0}{C_r^2} + \underset{0}{e_0^2} + 2e_0^2 R \cos\theta + 2\underset{0}{C_r} e_0^2 \cos\theta \quad (2.61)$$

$$H = C_r + e_0 \cos\theta \quad (2.62)$$

Haciendo: $\varepsilon = \frac{e_0}{C_r}, \quad h = \frac{H}{C_r} \quad (2.63)$

En forma adimensional: $h(\theta) = 1 + \varepsilon \cos\theta \quad (2.64)$

En la figura 2.5 se muestra la gráfica de (2.64), en donde se aprecia la variación del espesor de la película del lubricante.

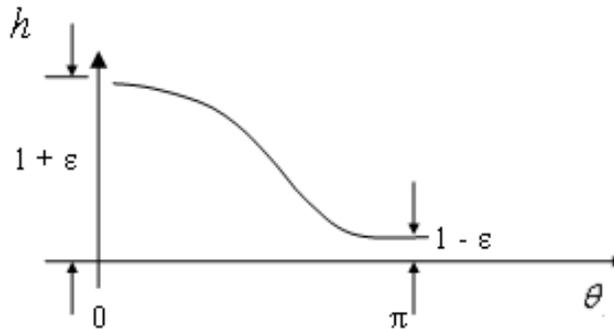


Figura 2.5. Variación del espesor de la película de lubricante.

Nótese que: $0 < \varepsilon < 1, \quad h_{min}(\theta = \pi) \leq h(\theta) \leq h_{max}(\theta = 0)$

Para transformar la ecuación de Reynolds, es necesario calcular cada término de (2.59), observando que aparecen las componentes de velocidad en la película del lubricante u_2, v_2 . Para encontrarlos partiremos de la velocidad del muñón en el punto J .

En la figura 2.6 aparecen los vectores unitarios en las direcciones radial y transversal del punto S para una posición arbitraria, así como los vectores en el centro del muñón (medidos desde la línea de carga).

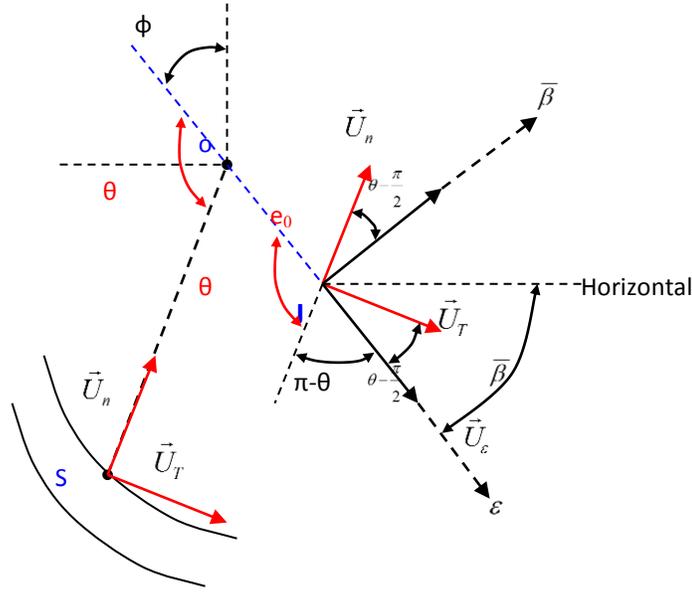


Figura 2.6. Vectores unitarios en las direcciones radial y transversal del punto arbitrario S de la película de lubricante, y el centro del muñón J.

De la figura anterior se puede ver que la relación entre los vectores unitarios en el centro del muñón y el punto S está dada por:

$$\vec{U}_{\beta} = \vec{U}_n \underbrace{\cos\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right)}_{\text{Sen}\theta} + \vec{U}_T \underbrace{\sin\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right)}_{-\text{Cos}\theta} \quad (2.65)$$

$$\vec{U}_{\epsilon} = -\vec{U}_n \text{Sen}\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) + \vec{U}_T \text{Cos}\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) \quad (2.66)$$

o bien:
$$\vec{U}_{\beta} = \vec{U}_n \text{Sen}\theta - \vec{U}_T \text{Cos}\theta \quad (2.67)$$

$$\vec{U}_{\epsilon} = -\vec{U}_n \text{Cos}\theta + \vec{U}_T \text{Sen}\theta . \quad (2.68)$$

Nótese que:
$$\varphi + \beta = \frac{\pi}{2}$$

Por lo tanto, la velocidad del punto J se puede escribir como:

$$\vec{v}_J = C_r \dot{\epsilon} \vec{U}_{\epsilon} + C_r \epsilon \dot{\beta} \vec{U}_{\beta} , \quad (2.69)$$

o bien, usando (2.67) y (2.68), en las direcciones transversal y normal:

$$\vec{v}_J = \vec{U}_n \left(-C_r \dot{\varepsilon} \cos \theta + C_r \varepsilon \dot{\beta} \sin \theta \right) + \vec{U}_T \left(C_r \dot{\varepsilon} \sin \theta - C_r \varepsilon \dot{\beta} \cos \theta \right) \quad (2.70)$$

La velocidad del punto móvil S se puede encontrar a partir de la velocidad relativa:

$$\vec{v}_{S/J} = \vec{v}_S - \vec{v}_J, \quad \text{o bien:} \quad \vec{v}_S = \vec{v}_J + \underbrace{\vec{v}_{S/J}}_{\omega \vec{k} \times \vec{r}_{JS}} \quad (2.71)$$

Obsérvese que en (2.71) es necesario encontrar el vector \vec{r}_{JS} para poder realizar el producto vectorial. En la figura 2.7 se muestra este vector junto con unos trazos adicionales que permiten un análisis más sencillo.

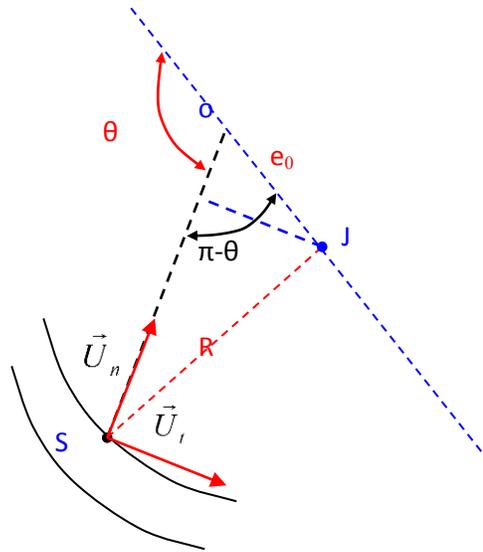


Figura 2.7. Vector de posición \vec{r}_{JS} para el cálculo de la velocidad de S.

De la figura anterior se puede ver que:

$$\vec{r}_{JS} = - \left[r_{OS} - e_0 \underbrace{\cos(\pi - \theta)}_{-\cos \theta} \right] \vec{U}_n - \left[e_0 \underbrace{\sin(\pi - \theta)}_{+\sin \theta} \right] \vec{U}_t \quad (2.72)$$

$$\text{o bien: } \vec{r}_{JS} = -(r_{OS} + e_0 \text{Cos}\theta)\vec{U}_n - (e_0 \text{Sen}\theta)\vec{U}_t \quad (2.73)$$

Aplicando el teorema de cosenos al triángulo SOJ:

$$R^2 = r_{OS}^2 + e_0^2 - 2r_{OS} e_0 \text{Cos}(\pi - \theta) \quad (2.74)$$

$$R^2 = r_{OS}^2 + \underset{0}{(C_r \varepsilon)^2} + 2r_{OS} \underset{0}{C_r \varepsilon} \text{Cos}\theta \quad (2.75)$$

$$R \approx r_{OS} . \quad (2.76)$$

$$\text{Entonces se tiene: } \vec{r}_{JS} = -R\vec{U}_n - C_r \varepsilon \text{Sen}\theta\vec{U}_t \quad (2.77)$$

$$\text{De (2.71), el producto vectorial es: } \vec{v}_{S/J} = \omega \hat{k} \times \vec{r}_{JS} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 0 & 0 & \omega \\ -C_r \varepsilon \text{Sen}\theta & -R & 0 \end{vmatrix} . \quad (2.78)$$

Nótese que: $\vec{U}_n = \hat{j}$ y $\vec{U}_t = \hat{i}$. Después de desarrollar el determinante se tiene:

$$\vec{v}_{S/J} = \omega \hat{k} \times \vec{r}_{JS} = R\omega \vec{U}_t - C_r \varepsilon \omega \text{Sen}\theta \vec{U}_n . \quad (2.79)$$

Finalmente, sustituyendo (2.70) y (2.79) en (2.71) se obtiene la velocidad del punto móvil S:

$$\vec{v}_S = (C_r \dot{\varepsilon} \text{Cos}\theta + C_r \varepsilon \dot{\beta} \text{Sen}\theta - C_r \varepsilon \omega \text{Sen}\theta)\vec{U}_n + (C_r \dot{\varepsilon} \text{Sen}\theta + R\omega - C_r \varepsilon \dot{\beta} \text{Cos}\theta)\vec{U}_t \quad (2.80)$$

De la ecuación anterior se puede reconocer:

$$v_2 = C_r \dot{\varepsilon} \text{Cos}\theta + C_r \varepsilon \dot{\beta} \text{Sen}\theta - C_r \dot{\varepsilon} \omega \text{Sen}\theta \quad (2.81)$$

$$u_2 = C_r \dot{\varepsilon} \text{Sen}\theta + R\omega - C_r \dot{\varepsilon} \dot{\beta} \text{Cos}\theta \quad (2.82)$$

Las componentes encontradas deben ser sustituidas en el segundo miembro de la ecuación de Reynolds, que se repite a continuación:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{H^3}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{H^3}{\mu} \frac{\partial p}{\partial z} \right) = 12v_2 - 6u_2 \frac{\partial H}{\partial x} + 6H \frac{\partial u_2}{\partial x} \quad (2.83)$$

Para continuar con la transformación a coordenadas cilíndricas, se calcula cada término por separado de la ecuación de Reynolds como sigue:

Haciendo $x = R\theta$, $dx = R d\theta$, y recordando que el espesor de la película de lubricante se definió como $H = C_r(1 + \varepsilon \cos\theta)$, de la ecuación de Reynolds, para cada término del primer miembro:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{H^3}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x} \right) = \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{H^3}{R\mu} \frac{\partial p}{\partial \theta} \right) \cdot \frac{C_r^3}{C_r^3} = \frac{C_r^3}{R^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{h^3(\theta)}{\mu} \frac{\partial p}{\partial \theta} \right) \quad (2.84)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{H^3}{\mu} \frac{\partial p}{\partial z} \right) = C_r^3 \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{h^3(\theta)}{\mu} \frac{\partial p}{\partial z} \right) \quad (2.85)$$

De manera similar al caso anterior, usando (2.81) y (2.82), se tiene para cada término en la ecuación de Reynolds (segundo miembro):

$$\frac{\partial H}{\partial x} = \frac{\partial H(\theta)}{R \partial \theta} = -\frac{1}{R} C_r \varepsilon \text{Sen} \theta \quad (2.86)$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial x} = \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial \theta} (C_r \dot{\varepsilon} \text{Sen} \theta + R\omega - C_r \dot{\beta} \text{Cos} \theta) = \frac{1}{R} (C_r \dot{\varepsilon} \text{Cos} \theta + C_r \dot{\beta} \text{Sen} \theta) \quad (2.87)$$

$$u_2 \frac{\partial H}{\partial x} = (C_r \dot{\varepsilon} \text{Sen} \theta + R\omega - C_r \dot{\beta} \text{Cos} \theta) \left(-\frac{1}{R} C_r \varepsilon \text{Sen} \theta \right) \quad (2.88)$$

Simplificando la ecuación anterior y eliminando los términos muy pequeños:

$$u_2 \frac{\partial H}{\partial x} = -\frac{C_r^2 \varepsilon \dot{\varepsilon}}{R} \text{Sen}^2 \theta - \omega C_r \varepsilon \text{Sen} \theta + \frac{C_r^2 \varepsilon^2}{R} \dot{\beta} \text{Sen} \theta \text{Cos} \theta$$

$$u_2 \frac{\partial H}{\partial x} = -\omega C_r \varepsilon \text{Sen} \theta \quad (2.89)$$

El último término del segundo miembro de (2.83) se puede escribir como:

$$H \frac{\partial u_2}{\partial x} = - \frac{C_r}{R} (1 + \varepsilon \cos \theta) (C_r \dot{\varepsilon} \cos \theta + C_r \dot{\beta} \sin \theta) \approx 0 \quad (2.90)$$

Sustituyendo las ecuaciones (2.84) a la (2.90) en la ecuación (2.83), y después de simplificar y agrupar se obtiene la ecuación de la lubricación de Reynolds en coordenadas cilíndricas:

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial \theta} \left(h^3(\theta) \frac{\partial p}{\partial \theta} \right) + R^2 \frac{\partial}{\partial z} \left(h^3(\theta) \frac{\partial p}{\partial z} \right) = 12 \frac{\mu R^2}{C_r^3} \left[C_r \dot{\varepsilon} \cos \theta + C_r \varepsilon \left(\dot{\beta} - \frac{\omega}{2} \right) \sin \theta \right]} \quad (2.91)$$

Es posible simplificar aún más a la ecuación anterior, haciendo las siguientes sustituciones en el segundo miembro:

$$V_s^2 = (C_r \dot{\varepsilon})^2 + \left[C_r \varepsilon \left(\dot{\beta} - \frac{\omega}{2} \right) \right]^2, \quad (2.92)$$

$$\text{en donde: } \cos \alpha = \frac{C_r \dot{\varepsilon}}{V_s}, \quad \sin \alpha = \frac{C_r \varepsilon \left(\dot{\beta} - \frac{\omega}{2} \right)}{V_s}, \quad \tan \alpha = \frac{-C_r \varepsilon \left(\dot{\beta} - \frac{\omega}{2} \right)}{C_r \dot{\varepsilon}} \quad (2.93)$$

La ecuación de Reynolds toma la forma:

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \left(h^3(\theta) \frac{\partial p}{\partial \theta} \right) + R^2 \frac{\partial}{\partial z} \left(h^3(\theta) \frac{\partial p}{\partial z} \right) = 12 \frac{\mu R^2 V_s}{C_r^3} \cos(\theta + \alpha). \quad (2.94)$$

En estado estacionario (posición de equilibrio), se tiene que $\dot{\beta} = 0$, y $\dot{\varepsilon} = 0$, lo que implica de (2.93) que: $\alpha = \pi/2$; entonces la ecuación de Reynolds en estado estacionario se escribe como:

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial \theta} \left(h^3(\theta) \frac{\partial p}{\partial \theta} \right) + R^2 \frac{\partial}{\partial z} \left(h^3(\theta) \frac{\partial p}{\partial z} \right) = 12 \frac{\mu R^2}{C_r^2} \left(-\varepsilon \frac{\omega}{2} \sin \theta \right)} \quad (2.95)$$

Referencias

- [1] Gómez Mancilla J.C. “*Steam whirl instability in Rotating shafts*”. Disertation Doctoral, Washington University 1993.
- [2] Childs, D. (1993), “*Turbomachinery Rotordynamics: Phenomena, Modeling, and Analysis*,” John Wiley and Sons, Inc. New York.
- [3] Krasnov, Kiselev, Makarenko (1983), “*Funciones de Variable Compleja, Cálculo Operacional, Teoría de la Estabilidad*”, Ed.Mir Moscú.
- [4] Afanasiev, V.H., Kolmanovskii, V. B., Nosov, V. R. (1996), “*Mathematical Theory of Control Systems Design*”, Kluwier Academic Publishers.
- [5] Demidovich, B. (1967), “*Lectures on the Mathematical Theory of Stability*”, Nauka Moscow.
- [6] Antonio García, A., Nosov, V. R., Gómez Mancilla J.C., (2002). *Cálculo de la Velocidad Umbral de Estabilidad utilizando configuraciones del modelo Jeffcott para rotores de eje rígido y flexible*. 3º Congreso Internacional de Ingeniería Electromecánica y de Sistemas IPN.
- [7].Gómez-Mancilla, Nosov V.R, Silva Navarro G. J. (2005). *Stability Performance comparison of Rotor-Bearing Systems supported on conventional and Hybrid Journal Bearings*, International Journal of Rotating Machinery, No. 1, pp 16-22.
- [8]Ramírez Vargas I., Nosov V. R., Gómez Mancilla, J. C., (2005). *Cálculo de la velocidad umbral de estabilidad utilizando chumaceras cortas con puertas puntuales de presión*. IV Congreso Internacional de Ingeniería Electromecánica y de Sistemas IPN.
- [9] Gómez Mancilla, J.C. (1996) “MAQUI/CHUMA/FFT”. Patente. Clave SEP-86441.
- [10] Dimarogonas, A. D. and Gómez Mancilla, J.C. (1996) “CHUMA”, User’s Manual. Patente, Clave SEP-86441.

CAPÍTULO 3

Modelos rotodinámicos

3.1 La ecuación de la lubricación de Reynolds.

Una de las causas principales de la reducción de la vida útil y la falta de disponibilidad de la maquinaria rotatoria son las vibraciones, las cuales son responsables de los desgastes prematuros y de los daños mecánicos severos a los equipos. Una forma de poder atenuar y controlar la amplitud vibratoria radica en modelar correctamente la conducta dinámica de los soportes (chumaceras) y junto con ello caracterizar correctamente la película de lubricante.

Una chumacera es un cuerpo cilíndrico alrededor del cual gira un eje y que se usa en casi todos los tipos de maquinaria para soportar cargas radiales o simplemente como una guía para la suave transmisión de un par con un mínimo de pérdida de carga y desgaste. La capacidad para soportar carga se debe a la generación de un campo de presión en la película del lubricante, debido al movimiento relativo entre el muñón y la chumacera.

El campo de presión se genera por la formación de una cuña de lubricante, el cual es arrastrado hacia el claro entre dos superficies convergentes. Esta cuña convergente se crea porque el eje no gira en forma concéntrica con respecto a la chumacera, sino que existe un desplazamiento relativo del centro del eje con respecto al centro de la chumacera, que se conoce como excentricidad. La cantidad de excentricidad se

autoajusta hasta que la carga se equilibra con la presión generada en la parte convergente de la película del lubricante.

Los primeros estudios de un eje y una chumacera operando bajo condiciones completamente hidrodinámicas fueron realizados por F. A. Von Pauli en 1849 y por G.A. Hirn en 1854. En 1883, el ruso N. Petroff concluyó que la fricción en chumaceras se debía a un fenómeno hidrodinámico. Beauchamp Tower realizó experimentos en 1883 y demostró por primera vez la existencia de un campo de presión en una chumacera hidrodinámica [1]. Posteriormente, en 1886, Osborne Reynolds obtuvo una expresión matemática que explica este incremento de presión y que ha llegado a ser la base del análisis hidrodinámico del funcionamiento de las chumaceras [2].

En la figura 3.1 se muestra una vista transversal de una chumacera hidrodinámica junto con el campo de presión generado por la película de lubricante. Nótese que el muñón está ligeramente colocado hacia la derecha, generando una excentricidad.

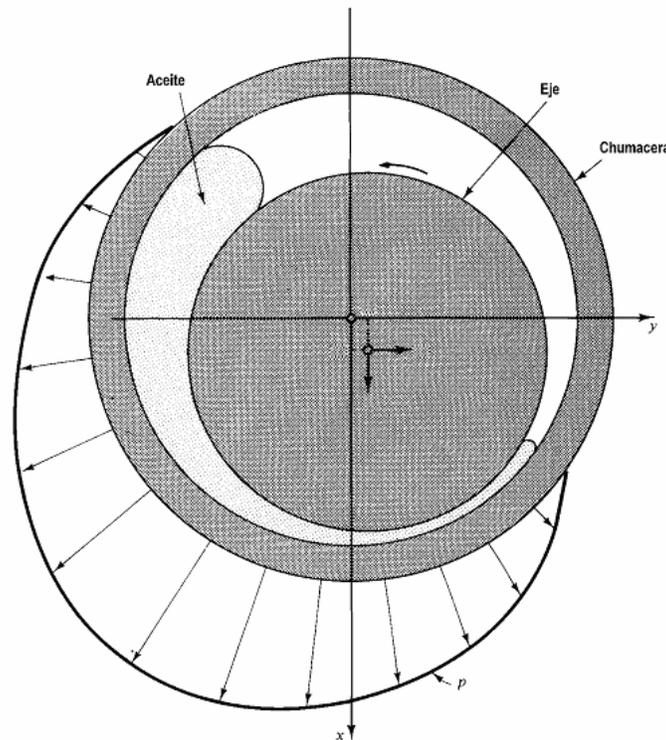


Figura 3.1. Vista transversal de una chumacera hidrodinámica.

La ecuación de la lubricación de Reynolds es una simplificación especial de las ecuaciones de Navier-Stokes en la mecánica de fluidos, que permite determinar el campo de presión $p(z, \theta)$ dentro de una chumacera como función de su movimiento, tal ecuación puede escribirse como [3]:

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \left(h^3 \frac{\partial p}{\partial \theta} \right) + R^2 \frac{\partial}{\partial z} \left(h^3 \frac{\partial p}{\partial z} \right) = 12 \frac{\mu R^2}{C_r^3} \left[C_r \dot{\varepsilon} \cos \theta + C_r \varepsilon \left(\dot{\varphi} - \frac{\omega}{2} \right) \text{Sen} \theta \right] \quad (3.1)$$

$$-\frac{L}{2} \leq z \leq \frac{L}{2}, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi, \quad h(\theta) = 1 + \varepsilon \cos \theta \quad (3.2)$$

$$p\left(\frac{L}{2}\right) = 0, \quad p\left(-\frac{L}{2}\right) = 0, \quad p(\theta + 2\pi) = p(\theta) \quad (3.3)$$

donde p es la presión, θ es la coordenada circunferencial medida a partir de la línea de centros, z es la coordenada axial a lo largo de la chumacera, φ es el ángulo de equilibrio, C_r es el claro radial, ε es la excentricidad adimensional, R es el radio de la chumacera, μ es la viscosidad dinámica, h es el espesor de la película del fluido en forma adimensional y ω es la velocidad angular del muñón.

En general $\dot{\varepsilon}$ y $\dot{\varphi}$ son diferentes de cero, pero en la posición de equilibrio estas cantidades tienen valor cero. Sin embargo, si se requiere calcular la estabilidad del movimiento del muñón o la respuesta vibratoria del sistema considerando cargas, entonces $\dot{\varepsilon}$ y $\dot{\varphi}$ deberán considerarse.

Para trabajar de forma general es necesario presentar la ecuación de Reynolds en forma adimensional y así facilitar los cálculos.

Recordando que esta ecuación puede escribirse como:

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \left(h^3 \frac{\partial p}{\partial \theta} \right) + R^2 \frac{\partial}{\partial z} \left(h^3 \frac{\partial p}{\partial z} \right) = 12 \frac{\mu R^2}{C_r^3} \left[C_r \dot{\varepsilon} \cos \theta + C_r \varepsilon \left(\dot{\varphi} - \frac{\omega}{2} \right) \text{Sen} \theta \right] \quad (3.4)$$

en donde se pueden definir [4]:

$$V_s^2 = (C_r \dot{\varepsilon})^2 + \left[C_r \varepsilon \left(\dot{\varphi} - \frac{\omega}{2} \right) \right]^2, \quad \text{Cos} \alpha = \frac{C_r \dot{\varepsilon}}{V_s}, \quad \text{Sen} \theta = \frac{C_r \varepsilon \left(\dot{\varphi} - \frac{\omega}{2} \right)}{V_s}, \quad (3.5)$$

entonces la ecuación de Reynolds queda como:

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \left(h^3 \frac{\partial p}{\partial \theta} \right) + R^2 \frac{\partial}{\partial z} \left(h^3 \frac{\partial p}{\partial z} \right) = 12 \frac{\mu R^2}{C_r^3} V_s \cos(\theta + \alpha) . \quad (3.6)$$

En la posición de equilibrio se tiene: $\dot{\varphi} = \dot{\varepsilon} = 0$, entonces las expresiones (3.5) pueden escribirse:

$$\alpha = \frac{\pi}{2}, \quad \cos\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) = -\text{Sen}\theta; \quad V_s = \frac{C_r \varepsilon \omega}{2} .$$

Sustituyendo las relaciones anteriores en (3.6), la ecuación de Reynolds en estado estacionario (equilibrio) queda como:

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \left(h^3 \frac{\partial p}{\partial \theta} \right) + R^2 \frac{\partial}{\partial z} \left(h^3 \frac{\partial p}{\partial z} \right) = \frac{6\mu R^2 \omega}{C_r^2} (-\varepsilon \text{Sen}\theta) \quad (3.7)$$

Para tener una mayor generalización, se usan las siguientes sustituciones para adimensionalizar la ecuación (3.7).

$$z = \frac{L}{2} \bar{z}, \quad \bar{p} = \frac{p}{p_{\text{dim}}}, \quad p_{\text{dim}} = \mu N \left(\frac{R}{C_r} \right)^2 = \mu \left(\frac{\omega}{2\pi} \right) \left(\frac{R}{C_r} \right)^2 . \quad (3.8)$$

Sustituyendo (3.8) en la ecuación de Reynolds (3.7):

$$\mu N \left(\frac{R}{C_r} \right)^2 \left[\frac{\partial}{\partial \theta} \left(h^3(\theta) \frac{\partial \bar{p}}{\partial \theta} \right) + R^2 \cdot \frac{1}{\left(\frac{L}{2} \right)^2} \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \left(h^3(\theta) \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{z}} \right) \right] = \frac{6\mu R^2 (2\pi N)}{C_r^2} (-\varepsilon \text{Sen}\theta) . \quad (3.9)$$

Simplificando:

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial \theta} \left[h^3(\theta) \frac{\partial \bar{p}}{\partial \theta} \right] + \left(\frac{D}{L} \right)^2 \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \left[h^3(\theta) \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{z}} \right] = 12\pi (-\varepsilon \text{Sen}\theta)} \quad (3.10)$$

Ecuación adimensional de Reynolds en estado estable

3.2 Modelos clásicos.

Una chumacera puede ser clasificada de acuerdo a la relación que existe entre su longitud axial y su diámetro. Tal relación es fundamental para considerarla como corta, intermedia o larga, pues esto permite algunas simplificaciones en la ecuación de Reynolds que la caracteriza [5]. En la figura 3.2 se aprecia un esquema simplificado de una chumacera y el sistema de coordenadas que se empleará para hacer todas las mediciones.

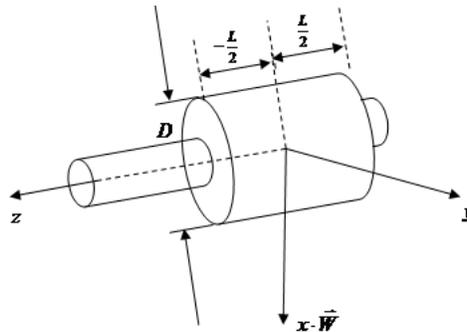


Figura 3.2. Vista esquemática de una chumacera. Los valores de "L" y "D" son muy importantes para su clasificación y su análisis en el comportamiento dinámico de un sistema rotatorio

3.2.1 Chumaceras cortas.

Una chumacera es corta si su longitud L es muy pequeña en comparación con su diámetro D , o sea que se debe cumplir que $L \ll D$. En términos numéricos, se considera corta si $L/D \leq 1/4$ [3]. Las chumaceras cortas son ampliamente usadas y operan exitosamente en diversas máquinas, particularmente en máquinas automotrices; algunas de sus ventajas son:

- Presenta mejor transferencia de calor, debido a una circulación más rápida del lubricante a través del claro de la chumacera. La velocidad de flujo aumenta el enfriamiento debido a que el lubricante que es calentado por el esfuerzo cortante viscoso se reemplaza continuamente.
- Es menos sensible al desalineamiento.
- Las partículas generadas por el desgaste abrasivo y el polvo se llevan al exterior a través del aceite con más facilidad, por lo que el desgaste se reduce.
- Requieren de menos espacio y dan como resultado diseños más compactos.

La chumacera corta ha sido estudiada y analizada por Dubois y Ocvirk [6], [7], quienes asumieron que el gradiente de presión alrededor de la chumacera es pequeño y se puede despreciar cuando se compara con los gradientes de presión en la dirección axial. Recordando la ecuación de Reynolds (3.10), y despreciando el primer término del lado izquierdo (el cual representa el gradiente de presión alrededor de la chumacera) se tiene el modelo clásico de una chumacera corta:

$$\left(\frac{D}{L}\right)^2 \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \left[h^3(\theta) \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{z}} \right] = 12\pi(-\varepsilon \text{Sen}\theta) \quad (3.11)$$

La simplificación anterior, permite obtener soluciones analíticas cerradas de la ecuación (3.11) y así poder determinar el campo de presión y predecir el comportamiento de una chumacera corta.

3.2.2 Chumaceras largas.

Por otra parte, una chumacera es larga si su longitud axial L es muy grande en comparación con su diámetro D , o sea que $L \gg D$. En términos numéricos se considera larga si $L/D \geq 2$ [3], [4]. Cuando una chumacera es larga, la solución de la ecuación de Reynolds se torna más complicada que la usada en chumaceras cortas.

En la chumacera larga se asume que el gradiente de presión en la dirección axial de la chumacera es pequeño y se puede despreciar cuando se compara con los gradientes de presión alrededor de la chumacera. Lo anterior es porque la distribución de presión no depende de los valores en la frontera. Recordando la ecuación de Reynolds (3.10), y despreciando el segundo término del lado izquierdo se tiene el modelo clásico de una chumacera larga:

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \left[h^3(\theta) \frac{\partial \bar{p}}{\partial \theta} \right] = 12\pi(-\varepsilon \text{Sen}\theta) \quad (3.12)$$

La solución de (3.12) es mucho más complicada que la que aparece en una chumacera corta (3.11), pues las integrales que aparecen son de difícil solución. Sin embargo, en 1904, Arnold Sommerfeld superó estas dificultades introduciendo su sustitución universal, la cual permite determinar el campo de presión en la película de lubricante.

3.3 Modelos Excitados. La función delta de Dirac.

En varias ramas de la física se encuentran fuentes que aparecen en forma instantánea (si el tiempo es la variable independiente) o aparecen en forma localizada (si la variable independiente es una coordenada espacial). Para estudiar lo anterior con detalle, debemos reemplazarlas por fuentes idealizadas, las cuales son verdaderamente instantáneas o localizadas.

Las fuentes pueden ser: fuerzas concentradas y momentos en mecánica de sólidos, masas puntuales en la teoría del potencial gravitacional, cargas puntuales y dipolos en electrostática, entre otras.

Se desea desarrollar una teoría matemática que proporcione:

1. Una manera clara de especificar una fuente concentrada.
2. Un método para el cálculo de la respuesta de una fuente concentrada; es decir un método para interpretar y resolver ecuaciones diferenciales, en las cuales el término no homogéneo es una fuente concentrada.

El físico inglés Paul A. M. Dirac (1902-1984) sugirió una manera de representar matemáticamente las fuentes puntuales como se muestra a continuación:

$$\delta(x) = \begin{cases} \infty & x = 0 \\ 0 & x \neq 0 \end{cases} \quad (3.13)$$

La ecuación (3.13) es conocida como la función delta de Dirac. Aunque no es realmente una función en el sentido estricto, fue muy utilizada con éxito durante varios años para resolver varios problemas de física e ingeniería antes de que Laurent Schwarz justificara matemáticamente su uso.

3.4 Modelo para una chumacera corta con puertos puntuales de presurización.

3.4.1 Introducción

Toda máquina rotatoria montada sobre chumaceras hidrodinámicas, está expuesta a sufrir vibraciones con características peculiares, las cuales aunadas a otros fenómenos son capaces de causar desgastes prematuros y estragos mecánicos severos a tales equipos.

Las bombas, turbinas, compresores, ya sean éstos axiales, centrífugos e inclusive grandes motores eléctricos, son susceptibles a sufrir algunos de los siguientes problemas: disparos automáticos por altas vibraciones, desgaste excesivo y rápido de las chumaceras, alto calentamiento del aceite lubricante, aflojamiento y desalineamiento de los pedestales, crecimiento de fisuras y grietas en los rotores.

Operar equipo con tales problemas ocasiona grandes costos de mantenimiento correctivo y resulta económicamente incosteable, pues aumenta drásticamente la no disponibilidad del equipo debido a descomposturas de emergencia y frecuentes intervenciones por mantenimiento.

Una forma de poder atenuar y controlar la amplitud vibratoria en maquinaria rotatoria radica en modelar correctamente el comportamiento dinámico de los soportes y junto con ello, caracterizar la película de lubricante con sus coeficientes rotodinámicos correspondientes.

Cuando una chumacera hidrodinámica se presuriza externamente, es posible modificar las propiedades dinámicas de la película de aceite, haciendo que las inestabilidades y amplitudes vibratorias puedan disminuirse de manera significativa.

3.4.2 Modelo de presurización.

En esta sección se presenta un modelo de presurización con una puerta puntual utilizando la función generalizada delta de Dirac [9], [10], cuyas propiedades simplifican notablemente los cálculos. De esta manera, es posible determinar no solamente el campo de presión, sino todas las características dinámicas en la película de aceite.

Para facilitar la nomenclatura y la ubicación de la puerta puntual (puerto de inyección), en la figura 3.3 aparecen dos sistemas de coordenadas: el sistema fijo XOY , en el cual el punto O representa el centro de la chumacera, y el sistema móvil $X'JY'$, en el cual el punto J es el centro del muñón.

El ángulo entre los sistemas de coordenadas es llamado ángulo de equilibrio φ , la posición angular del puerto de inyección está dada por el ángulo β en el sistema fijo y $\theta_\beta = \pi - \varphi + \beta$ en el sistema móvil; los vectores \vec{U}_R y \vec{U}_T son vectores unitarios en las direcciones radial y transversal, respectivamente.

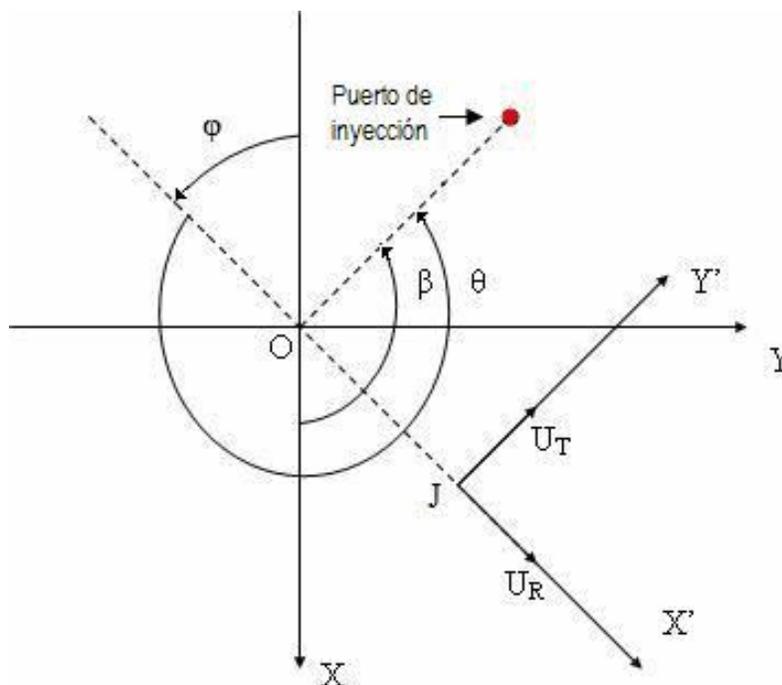


Figura 3.3. Sistema de coordenadas fijo (XYZ) de una chumacera y sistema móvil (X',Y',Z') del muñón.

Los sistemas de coordenadas descritos anteriormente muestran que la posición del centro del muñón J será completamente determinada por los valores del ángulo φ y de la distancia OJ (excentricidad). Estos valores se verán modificados con la presurización, de modo que el centro del muñón pueda tomar cualquier posición dentro de algún cuadrante.

Considerando ahora el esquema de una chumacera, en la cual aparece el puerto puntual de presurización externa con ubicación axial ($\bar{z} = a$) y angular (β) arbitraria, como se muestra en la figura 3.4:

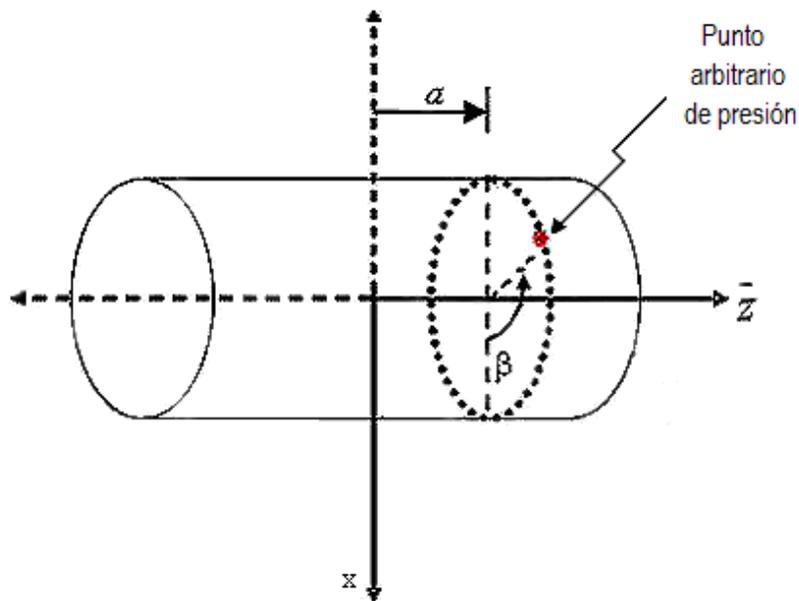


Figura 3.4. Ubicación del punto de presurización en la chumacera. Nótese que se definen los valores de las coordenadas axial y circunferencial (α, β) para especificar el punto en particular de inyección de lubricante.

Si se supone que el área del puerto de inyección es Δs , la cual es suficientemente pequeña y que la presión de inyección es Δp , la fuerza total de presión será igual a:

$$\Delta F_{pres} = \Delta p \cdot \Delta s \quad (3.14)$$

Nótese que si $\Delta s \rightarrow 0$, entonces $\Delta p \rightarrow \infty$.

Entonces:

$$\Delta F_{pres} = \Delta p \cdot \Delta s = q = \text{constante} \quad (3.15)$$

Bajo estas condiciones, es posible proponer un modelo de presurización puntual adimensional [10], dado por la función espacial delta de Dirac:

$$(\Delta\bar{p})_{prt} = \bar{q}_{prt} \delta(\bar{z} - a) \delta[\theta - (\pi + \beta - \varphi_{pres})] \quad (3.16)$$

donde:

$$\bar{q}_{prt} = \frac{P_{fict}}{P_{dim}} \quad (3.17)$$

$$P_{fict} = \frac{\Delta F_{pres}}{DL}, \quad P_{dim} = \mu N \left(\frac{R}{C_r} \right)^2 \quad (3.18)$$

Aquí, \bar{q}_{prt} es la intensidad de presión adimensional. Nótese que (3.16) se define como un impulso infinito, pero la fuerza de presurización es finita e igual a la constante (3.15).

Las consideraciones anteriores pueden ser generalizadas para el caso de n puertos de inyección con ubicación axial y angular arbitraria.

Por tanto, el modelo que describe el campo de presión en una chumacera hidrodinámica presurizada en un puerto con ubicación (a, β) es:

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \left(h^3(\theta) \frac{\partial \bar{p}}{\partial \theta} \right) + \left(\frac{D}{L} \right)^2 \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \left(h^3(\theta) \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{z}} \right) = \bar{q}_{prt} \delta(\bar{z} - a) \delta[\theta - (\pi + \beta - \varphi_{pres})] \quad (3.19)$$

Para el caso de la chumacera corta se obtiene:

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial \bar{z}} \left(h^3(\theta) \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{z}} \right) = \left(\frac{L}{D} \right)^2 \bar{q}_{prt} \delta(\bar{z} - a) \delta[\theta - (\pi + \beta - \varphi_{pres})]} \quad (3.20)$$

donde: $-1 \leq \bar{z} \leq 1$, $p(\bar{z} = \pm 1) = 0$, $h = 1 + \varepsilon \cos \theta$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$, $\hat{p}(\theta) = \hat{p}(\theta + 2\pi)$

3.5 Modelo para una chumacera corta con un anillo de presurización.

Considerando un caso especial, en el cual la presurización se realiza alrededor de un anillo en cualquier posición axial de la chumacera [9], [10]. El anillo de presurización es la fuente circular de inyección situada en cualquier valor de la coordenada axial adimensional $\bar{z} = a$, que permite introducir lubricante con la presurización fija en todo su contorno, como lo muestra la figura 3.5.

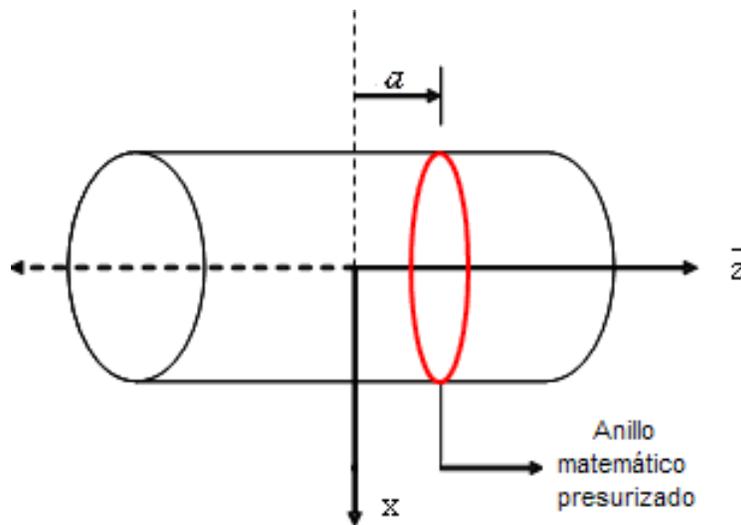


Figura 3.5. Posición axial de alimentación de lubricante. Nótese que a una distancia “ a ” del centro de la chumacera se presenta la inyección pero en forma circular (anillo presurizado); además, no se especifica la posición circunferencial de presurización.

El modelo de presurización se puede obtener a partir de la ecuación (3.20); puesto que únicamente se requiere la ubicación axial, no será necesario colocar los dos impulsos de Dirac. Por lo tanto, el modelo es:

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}} \left[h^3(\theta) \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{z}} \right] = \left(\frac{L}{D} \right)^2 \bar{q}_{prt} \delta(\bar{z} - a) \quad (3.21)$$

Aunque la presurización en un anillo parece ser de importancia solamente académica, cabe notar que actualmente en chumaceras de gas la presurización se realiza colocando pequeños puertos circulares en la periferia de las mismas (aproximadamente 54 puertos) [11], [12], por lo que el modelo (3.21) parece ser una buena aproximación para describir el campo de presión.

3.6 Modelo para una chumacera corta con una línea de presurización.

Este caso corresponde a presurizar en la línea de flujo ubicada a lo largo de la chumacera, como se ilustra en figura 3.6, para cualquier posición circunferencial β [9], [10]. La ecuación de Reynolds adimensional es dada por:

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}} \left[h^3(\theta) \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{z}} \right] = \left(\frac{L}{D} \right)^2 \bar{q}_{prt} \delta[\theta - (\pi + \beta - \varphi_{pres})] \quad (3.22)$$

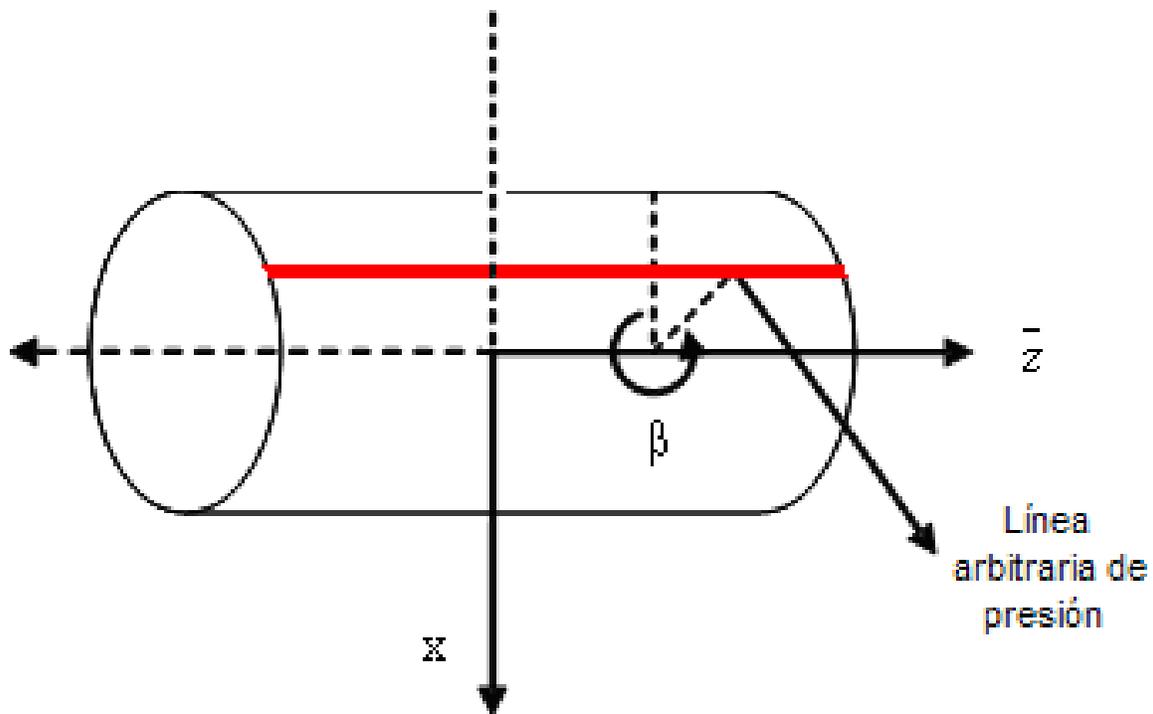


Figura 3.6. Ubicación de la línea de presurización en la chumacera. Se define el valor circunferencial (β) para especificar la posición angular de la línea de inyección de lubricante.

Referencias

- [1] Tower, B. (1883) "Second Report on frictions experiments", Proc. Inst. Mech. Engrs. Vol 36, pp. 58-70.
- [2] Reynolds, O. (1886) "On the theory of lubrication and its Application to Mr. Beauchap Tower's experiments including an experimental determination of the viscosity of olive oil" Phil, Trans. Roy. Soc. London. Vol. 177, Part I. pp. 157-234.
- [3] Szeri. (1998) "Fluid Film Lubrication. Theory and Design" Cambridge University Press..
- [4] Childs, D. (1993), "Turbomachinery Rotordynamics: Phenomena, Modeling, and Analysis", John Wiley and Sons, Inc. New York.
- [5] Khonsari, M.M., Booser, E.R. (2001) "Applied Tribology: Bearing Design and Lubrication," John Wiley & Sons.
- [6] Ocvirk, F. (1952) "Short Bearing Approximation for Full Journal Bearings", NACA TN 20808.
- [7] Dubois, G.B. and Ocvirk, F. (1953) "Analytical Derivation and Experimental evaluation of Short Bearing approximation for full Journal Bearings", NACA Report 1157.
- [8] Arfken (2000), "Mathematical Methods for Physics", Academic Press 5ta Ed.
- [9] V. Nosov, I. Ramírez Vargas, J. Gómez Mancilla (2004). "Modelos Matemáticos de Presurización de Lubricante en sistemas Rotatorios usando la función de Dirac". III Congreso Internacional de Ingeniería Física. UAM Azcapotzalco. México D.F.
- [10] Nosov, V.R , Ramírez Vargas, I., Gómez Mancilla, J.C. (2005), "Uso de Funciones Generalizadas Espaciales en modelos Rotodinámicos Presurizados" , 1° Congreso Internacional de Matemáticas Aplicadas, México D.F.
- [11] Rao, J.S., (1991) "Rotor-Dynamics", John Wiley and Sons.
- [12] Vance, J., (1988) "Rotordynamics of Turbomachinery", John Wiley and Sons.
- [13] Ramírez Vargas, I., Nosov, V. R., Gómez Mancilla, J. C..(2006), "Rango de aplicación de la teoría de la chumacera corta" ,2° Congreso Internacional de Matemáticas Aplicadas, México D.F.
- [14] J. V. Fedor, (1961) "Journal Bearings with arbitrary Position of Source", ASME Trans, Journal of Basic Engineering.
- [15] Nosov V., Gómez Mancilla J., Ramírez Vargas I. (2006). "New model and Stationary Position for a Short Journal Bearings with Point Injection Ports". To be published in the Journal of Tribology.

CAPÍTULO 4

Campos de presión y posiciones de equilibrio

4.1 Campos de presión

En el capítulo anterior se establecieron los modelos matemáticos que describen el comportamiento de una chumacera presurizada. Al resolverlos, se puede determinar la presión en la película de lubricante como función de las coordenadas axial y circunferencial, respectivamente.

Conocer estos campos de presión es de mucha importancia pues permiten encontrar:

- Las regiones en donde la película de lubricante puede romperse (cavitación).
- El lugar en donde la presión alcanza su valor máximo.
- Las fuerzas en el fluido lubricante acompañadas de los efectos de rigidez y amortiguamiento (conocidos como coeficientes rotodinámicos).

Por lo tanto, una vez conocido el campo de presión, se puede caracterizar por completo una chumacera hidrodinámica.

4.1.1 Solución del modelo no presurizado (caso clásico)

En esta sección se resuelve el modelo no presurizado externamente (caso clásico) de una chumacera corta. Ésta es conocida como la solución de Ocvirk [1].

Recordando que la ecuación general de Reynolds se puede escribir como [4]:

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \left(h^3 \frac{\partial p}{\partial \theta} \right) + R^2 \frac{\partial}{\partial z} \left(h^3 \frac{\partial p}{\partial z} \right) = 12 \frac{\mu R^2}{C_r^3} \left[C_r \dot{\varepsilon} \cos \theta + C_r \varepsilon \left(\dot{\phi} - \frac{\omega}{2} \right) \text{Sen} \theta \right] \quad (4.1)$$

$$-\frac{L}{2} \leq z \leq \frac{L}{2}, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi, \quad h(\theta) = 1 + \varepsilon \cos \theta \quad (4.2)$$

$$p\left(\frac{L}{2}\right) = 0, \quad p\left(-\frac{L}{2}\right) = 0, \quad p(\theta + 2\pi) = p(\theta) \quad (4.3)$$

Para chumaceras cortas en estado estacionario, la ecuación (4.1) toma la forma:

$$R^2 \frac{\partial}{\partial z} \left(h^3 \frac{\partial p}{\partial z} \right) = 12 \frac{\mu R^2}{C_r^2} \left(-\varepsilon \frac{\omega}{2} \text{Sen} \theta \right) \quad (4.4)$$

Usando las siguientes variables adimensionales:

$$z = \frac{L}{2} \bar{z}, \quad \bar{p} = \frac{p}{p_{\text{dim}}}, \quad p_{\text{dim}} = \mu N \left(\frac{R}{C_r} \right)^2 = \mu \left(\frac{\omega}{2\pi} \right) \left(\frac{R}{C_r} \right)^2, \quad (4.5)$$

se obtiene la ecuación de Reynolds adimensional para chumaceras cortas:

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}} \left(h^3 \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{z}} \right) = -12\pi \left(\frac{L}{D} \right)^2 \varepsilon \text{Sen} \theta \quad (4.6)$$

$$-1 < \bar{z} < 1, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi, \quad \bar{p}(\bar{z} = \pm 1) = 0$$

Resolviendo (4.6) se obtiene el campo de presión en una chumacera corta no presurizada.

$$\bar{p}_{Ocv} = -6\pi \left(\frac{L}{D}\right)^2 \frac{\varepsilon_{Ocv} \text{Sen } \theta}{(1 + \varepsilon_{Ocv} \text{Cos } \theta)^3} (\bar{z}^2 - 1) \quad (4.7)$$

El subíndice O_{cv} de la presión y la excentricidad, indica que es resultado de la solución de Ocvirk. En la figura 4.1 se muestra el campo clásico definido por la ecuación (4.7), que fue graficado utilizando Mathematica 8.0.

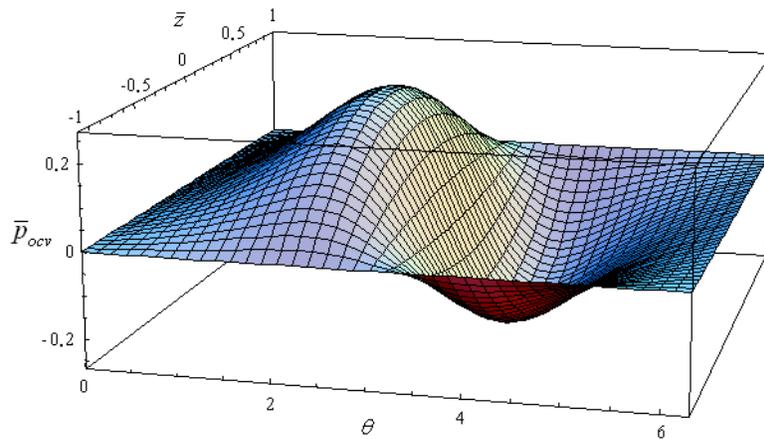


Figura 4.1. Campo de presión clásico en una chumacera corta (sin presurización externa) como función de las coordenadas axial y circunferencial respectivamente, para $\varepsilon=0.3$ y $(L/D)=1/4$.

4.1.2 Solución del modelo presurizado

La solución del modelo de presurización puntual presentado en el capítulo 3 es diferente al caso clásico, pues contiene funciones de Dirac, las cuales tienen que ser tratadas de manera diferente (ya que no son realmente funciones) utilizando propiedades de la teoría de distribuciones [2].

El modelo para el caso de puerto puntual de inyección está dado por:

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}} \left(h^3 \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{z}} \right) = \left(\frac{L}{D} \right)^2 \bar{q}_{prt} \delta(\bar{z} - a) \delta[\theta - (\pi + \beta - \varphi_{pres})], \quad -1 < \bar{z} < 1, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi \quad (4.8)$$

$$\bar{p}(\bar{z} = \pm 1) = 0, \quad \bar{p}(\theta + 2\pi) = \bar{p}(\theta) \quad (4.9)$$

La solución de (4.8) se puede obtener con ayuda de algunas propiedades de la función de Dirac (ver capítulo 3). De la teoría de funciones especiales se sabe que [2], [3]:

$$\frac{d^2}{d\bar{z}^2} \left(-\frac{1}{2} |\bar{z} - a| \right) = \delta(\bar{z} - a) \quad (4.10)$$

Separando variables, usando (4.10) e integrando se obtiene

$$\bar{p}_{pres}(\bar{z}, \theta) = \left(\frac{L}{D} \right)^2 \bar{q}_{prt} \frac{\delta[\theta - (\pi + \beta - \varphi_{pres})]}{h^3} \left(-\frac{1}{2} |\bar{z} - a| + c_1 \bar{z} + c_2 \right). \quad (4.11)$$

Sustituyendo las condiciones de frontera (4.9) en (4.11) se tiene:

$$0 = -\frac{1}{2} |1-a| + c_1 + c_2 \quad (A) \quad \text{nótese que } -1 \leq a \leq 1$$

$$0 = -\frac{1}{2} |-1-a| - c_1 + c_2 \quad (B)$$

$$0 = -\frac{1}{2} (1-a) - \frac{1}{2} (1-a) + 2c_2$$

$$0 = -1 + 2c_2, \text{ entonces } \boxed{c_2 = \frac{1}{2}}$$

de (A):

$$\frac{1}{2} (1-a) - \frac{1}{2} = c_1, \text{ entonces } \boxed{c_1 = -\frac{1}{2} a}$$

Sustituyendo los valores de las constantes c_1 y c_2 en la ecuación (4.11) se obtiene el campo de presión resultante para una posición arbitraria de inyección (a, β) [7]:

$$\bar{p}_{pres}(\bar{z}, \theta) = \left(\frac{L}{D} \right)^2 \bar{q}_{prt} \frac{\delta[\theta - (\pi + \beta - \varphi_{pres})]}{2(1 + \varepsilon \cos \theta)^3} (1 - a \bar{z} - |\bar{z} - a|) \quad (4.12)$$

Como puede verse, la solución (4.12) está definida en términos de la función delta de Dirac, por lo que no es posible graficar el campo de presión. Sin embargo, si se usa una aproximación adecuada, se puede encontrar un campo. La ecuación (4.13) muestra una posible aproximación de la función delta de Dirac para el campo definido por (4.12) [3]:

$$\delta[\theta - (\pi + \beta - \varphi_{pres})] = \frac{\bar{n}}{\sqrt{\pi}} e^{-\bar{n}^2 [\theta - (\pi + \beta - \varphi_{pres})]^2} \quad (4.13)$$

La ecuación (4.13) permite graficar el campo de presión resultante, el cual estará dado por la suma del campo clásico no presurizado (4.7) y del campo presurizado (4.12).

En las figuras 4.2, 4.3 y 4.4 se muestran y comparan los campos de presión en el caso clásico y presurizado (mostrados anteriormente), en la región sin cavitación.

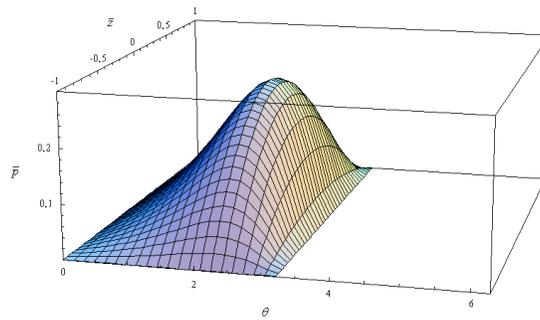


Figura 4.2. Campo de presión clásico en una chumacera corta (sin presurización externa) como función de la coordenada axial adimensional y la coordenada circunferencial. $\varepsilon = 0.3$, $(L/D) = 1/4$.

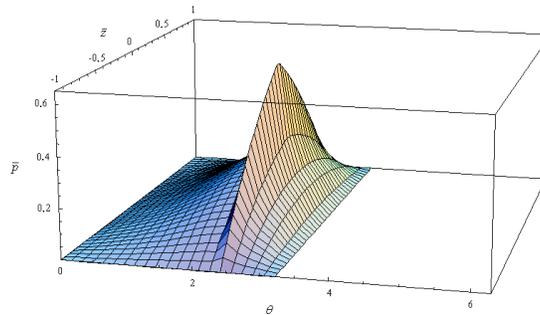


Figura 4.3. Campo de presión total aproximado, usando $\bar{n} = 10$
 $\beta = 28.65^\circ$, $L/D = 1/4$, $\varepsilon = 0.3$, $\varphi = 68.17^\circ$, $a = 0$, $\bar{q}_{prt} = 0.57$, $f_{prt} = 2.5$.

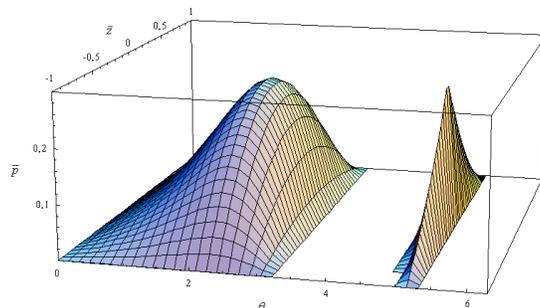


Figura 4.4. Campo de presión total aproximado, usando $\bar{n} = 10$,
 $\beta = 180^\circ$, $L/D = 1/4$, $\varepsilon = 0.3$, $\varphi = 68.17^\circ$, $a = 0$, $\bar{q}_{prt} = 2.3$, $f_{prt} = 10$.

Es importante notar que los campos de presión anteriores, sólo son aproximaciones del campo real. Sin embargo, es posible obtener algunas características del campo de presión de forma exacta (sin tener que recurrir a alguna aproximación), por ejemplo las componentes de fuerza en la película de aceite y el campo promedio de presión (sobre la coordenada θ), para este último el campo está dado por:

$$\bar{p}_{prom} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \bar{p}_{pres}(\theta, \bar{z}) d\theta = \frac{1}{4\pi} \left(\frac{L}{D} \right)^2 \frac{\bar{q}_{prt}}{\left[1 + \varepsilon_{pres} \cos(\pi + \beta - \varphi_{pres}) \right]^3} [1 - a\bar{z} - abs(\bar{z} - a)] \quad (4.14)$$

4.2 Cálculo analítico de la posición de equilibrio en el caso clásico.

Cuando un equipo rotatorio se encuentra en operación, la posición que toma el muñón dentro de la chumacera es muy importante, pues esa es la referencia desde la cual se realizan todas las mediciones vibratorias.

La determinación de la posición de equilibrio se calcula a partir de una sumatoria de fuerzas, las cuales se pueden encontrar conociendo el campo de presión en el lubricante, tales fuerzas se deben a la película de aceite y al peso del sistema. De esta manera, es posible predecir la ubicación exacta del muñón bajo determinadas condiciones de operación.

4.2.1 Fuerzas en la película de aceite. El número de Sommerfeld.

Una vez determinado el campo de presión en una chumacera hidrodinámica, es necesario conocer la capacidad de carga que puede tener, es decir la carga total que puede soportar. La carga se calcula usualmente a partir de dos componentes de fuerza que genera el campo de presión en el lubricante: la radial, que actúa a lo largo de la línea de centros, y la transversal, que es perpendicular a la radial. Lo anterior permite determinar el ángulo que se forma entre la línea de centros y la de carga. Es importante observar que el eje no se desvía en la misma dirección en la que se aplica la carga, sino que se mueve a cierto ángulo de la línea de carga, éste se conoce como o ángulo de equilibrio (*“attitude”*), el cual ubica la posición del espesor mínimo de la película de aceite a partir de la línea de carga [4]. En la figura 4.5 se muestra la orientación de los ejes en las direcciones radial y transversal, junto con la línea de carga.

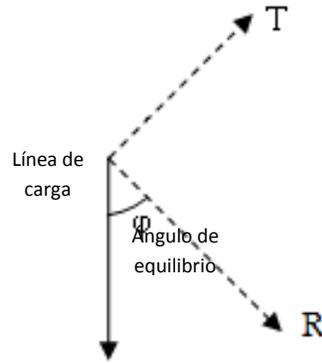


Figura 4.5. Dirección radial y transversal de las componentes de fuerza en la película de lubricante.

Para la posición de equilibrio estático, las fuerzas que actúan son el peso del sistema y la resultante de las fuerzas de la película de aceite, por tanto debe cumplirse que

$$\vec{W} + \vec{F}_{pres} = \vec{0} , \tag{4.15}$$

o bien, en componentes radiales y transversales, se tiene

$$\begin{aligned} W \cos \varphi + F_R &= 0 \\ -W \sin \varphi + F_T &= 0 \end{aligned} \tag{4.16}$$

De (4.16), es posible obtener el ángulo de equilibrio: $\tan \varphi = \left| \frac{F_T}{F_R} \right|$. (4.17)

Las fuerzas en las direcciones radial y transversal se encuentran integrando sobre la chumacera como sigue:

$$F_R = \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \int_0^{R\theta} p \cos \theta \, dx \, dz \tag{4.18}$$

$$F_T = \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \int_0^{R\theta} p \sin \theta \, dx \, dz \tag{4.19}$$

Recordando que: $x = R\theta, dx = R d\theta, z = \frac{L}{2} \bar{z}, dz = \frac{L}{2} d\bar{z}, p = \mu N \left(\frac{R}{C_r} \right)^2 \bar{p}$,

después de sustituir las expresiones anteriores en (4.18), se puede escribir

$$F_R = \int_{-1}^1 \int_0^\pi \underbrace{\mu N \left(\frac{R}{C_r} \right)^2}_{\bar{p}} \underbrace{\bar{P} \cos \theta R d\theta}_{dx} \underbrace{\frac{L}{2} d\bar{z}}_{dz} , \quad (4.20)$$

o bien

$$F_R = \left[\mu N \left(\frac{R}{C_r} \right)^2 \right] \underbrace{RL}_{\frac{D}{2}} \underbrace{\frac{1}{2} \int_{-1}^1 \int_0^\pi \bar{p} \cos \theta d\theta d\bar{z}}_{f_R} . \quad (4.21)$$

Después de simplificar:

$$F_R = \left[\mu N \left(\frac{R}{C_r} \right)^2 \right] \underbrace{DL}_{4} \underbrace{\frac{1}{4} \int_{-1}^1 \int_0^\pi \bar{p} \cos \theta d\theta d\bar{z}}_{f_R} . \quad (4.22)$$

De manera similar, para la fuerza en dirección transversal:

$$F_T = \left[\mu N \left(\frac{R}{C_r} \right)^2 \right] \underbrace{DL}_{4} \underbrace{\frac{1}{4} \int_{-1}^1 \int_0^\pi \bar{p} \sin \theta d\theta d\bar{z}}_{f_T} \quad (4.23)$$

De (4.22) y (4.23) es posible expresar las fuerzas radiales y transversales en forma adimensional para manejarlas más fácilmente, por lo tanto éstas pueden escribirse como [4]:

$$f_R = \frac{F_R}{\mu N \left(\frac{R}{C_r} \right)^2 DL} \quad (4.24)$$

$$f_T = \frac{F_T}{\mu N \left(\frac{R}{C_r} \right)^2 DL} , \quad (4.25)$$

donde:

$$f_R = \frac{1}{4} \int_{-1}^1 \int_0^\pi \bar{p} \cos \theta d\theta d\bar{z} \quad (4.26)$$

$$f_T = \frac{1}{4} \int_{-1}^1 \int_0^\pi \bar{p} \sin \theta d\theta d\bar{z} \quad (4.27)$$

Las ecuaciones (4.26) y (4.27) determinan las componentes radiales y transversales de la película de aceite conociendo el campo de presión; el cual puede ser obtenido a partir de la ecuación de Reynolds.

Ahora que se conocen las fuerzas en la película de aceite, se puede conocer la capacidad de carga de una chumacera hidrodinámica, pues será igual a la resultante de las fuerzas en el lubricante dada por:

$$f = \sqrt{f_R^2 + f_T^2} = \left[\left(\frac{F_R}{\mu N (R/C_r)^2 DL} \right)^2 + \left(\frac{F_T}{\mu N (R/C_r)^2 DL} \right)^2 \right]^{1/2}. \quad (4.28)$$

Sustituyendo (4.16) en (4.28), se puede escribir

$$f = \sqrt{f_R^2 + f_T^2} = \left[\left(\frac{-W \cos \varphi}{\mu N (R/C_r)^2 DL} \right)^2 + \left(\frac{W \sin \varphi}{\mu N (R/C_r)^2 DL} \right)^2 \right]^{1/2} = \frac{W}{\mu N (R/C_r)^2 DL} \quad (4.29)$$

En rotodinámica existe un parámetro adimensional que tiene que ver con la capacidad de carga, que está definido por [4], [5]:

$$S = \frac{1}{f} = \frac{\mu N L D}{W} \left(\frac{R}{C_r} \right)^2 \quad (4.30)$$

Este parámetro es conocido como el *número de Sommerfeld o carga adimensional*. Se usa para caracterizar el funcionamiento de las chumaceras. Puede decirse que si el número de Sommerfeld aumenta, la capacidad de soportar carga disminuye y viceversa.

4.2.2 Fuerzas de presión en la chumacera corta no presurizada.

A partir del campo (4.7), las fuerzas de presión en una chumacera corta pueden ser calculadas a partir de (4.26) y (4.27). Recordando que el campo de presión es

$$\bar{p} = \bar{p}_{ocv} = -6\pi \left(\frac{L}{D} \right)^2 \varepsilon \frac{\text{Sen} \theta}{(1 + \varepsilon \text{Cos} \theta)^3} (\bar{z}^2 - 1), \quad (4.31)$$

entonces las fuerzas son:

$$f_R = \frac{1}{4} \int_{-1}^1 \int_0^\pi -6\pi \left(\frac{L}{D} \right)^2 \varepsilon \frac{\text{Sen} \theta}{(1 + \varepsilon \text{Cos} \theta)^3} \cdot \text{Cos} \theta (\bar{z}^2 - 1) d\theta d\bar{z} \quad (4.32)$$

$$f_T = \frac{1}{4} \int_{-1}^1 \int_0^\pi -6\pi \left(\frac{L}{D} \right)^2 \varepsilon \frac{\text{Sen} \theta}{(1 + \varepsilon \text{Cos} \theta)^3} \cdot \text{Sen} \theta (\bar{z}^2 - 1) d\theta d\bar{z}, \quad (4.33)$$

o bien

$$f_R = \frac{1}{4} 6\pi \left(\frac{L}{D} \right)^2 \cdot \frac{4}{3} \int_0^\pi \frac{\varepsilon \text{Sen} \theta \text{Cos} \theta}{(1 + \varepsilon \text{Cos} \theta)^3} d\theta \quad (4.34)$$

$$f_T = \frac{1}{4} 6\pi \left(\frac{L}{D} \right)^2 \cdot \frac{4}{3} \int_0^\pi \frac{\varepsilon \text{Sen}^2 \theta}{(1 + \varepsilon \text{Cos} \theta)^3} d\theta, \quad (4.35)$$

Entonces

$$f_R = 2\pi \left(\frac{L}{D} \right)^2 \varepsilon \int_0^\pi \frac{\text{Sen} \theta \text{Cos} \theta}{(1 + \varepsilon \text{Cos} \theta)^3} d\theta \quad (4.36)$$

$$f_T = 2\pi \left(\frac{L}{D} \right)^2 \varepsilon \int_0^\pi \frac{\text{Sen}^2 \theta}{(1 + \varepsilon \text{Cos} \theta)^3} d\theta. \quad (4.37)$$

El valor de las integrales $\int_0^\pi \frac{\text{Sen} \theta \text{Cos} \theta}{(1 + \varepsilon \text{Cos} \theta)^3} d\theta$ y $\int_0^\pi \frac{\text{Sen}^2 \theta}{(1 + \varepsilon \text{Cos} \theta)^3} d\theta$

se puede encontrar usando la sustitución de Sommerfeld (1904):

$$\int_0^\pi \frac{\text{Sen} \theta \text{Cos} \theta}{(1 + \varepsilon \text{Cos} \theta)^3} d\theta = \frac{-2\varepsilon}{(1 - \varepsilon^2)^2} \quad (4.38)$$

$$\int_0^\pi \frac{\text{Sen}^2 \theta}{(1 + \varepsilon \text{Cos} \theta)^3} d\theta = \frac{\pi}{2(1 - \varepsilon^2)^{3/2}} \quad (4.39)$$

Por lo tanto, las fuerzas radiales y transversales en la película de aceite de una chumacera corta (en estado estacionario) están dadas por [4]:

$$f_R = -\left(\frac{L}{D}\right)^2 \frac{4\pi\varepsilon^2}{(1-\varepsilon^2)^2} \quad (4.40)$$

$$f_T = \left(\frac{L}{D}\right)^2 \frac{\pi^2\varepsilon}{(1-\varepsilon^2)^{3/2}} \quad (4.41)$$

4.2.3 Trayectoria de la posición de equilibrio (“locus”) para chumaceras no presurizadas.

Ahora que se conocen las fuerzas en la película de aceite, es posible determinar el ángulo de equilibrio que permitirá establecer la posición en la cual el centro del muñón orbitará.

Sustituyendo (4.40) y (4.41) en (4.22) y (4.23) y teniendo en cuenta posteriormente las ecuaciones de equilibrio (4.16) y (4.17), se obtiene el ángulo de equilibrio para una chumacera no presurizada [4], [5]:

$$\text{Tan}\varphi_{Ocv} = \frac{\pi\sqrt{1-\varepsilon_{Ocv}^2}}{4\varepsilon_{Ocv}} \quad (4.42)$$

La ecuación (4.42) permite determinar que para un valor dado de excentricidad, la posición angular de equilibrio está perfectamente determinada, a esta trayectoria generada se le conoce en la literatura como “locus”.

Una vez conocido el ángulo de equilibrio, las componentes de la fuerza de la película de aceite (4.40) y (4.41) pueden escribirse en el sistema coordenado xy , mediante la matriz de rotación $[Q]$ correspondiente como se muestra a continuación:

$$\begin{pmatrix} f_x \\ f_y \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \text{Cos}\varphi_{Ocv} & -\text{Sen}\varphi_{Ocv} \\ \text{Sen}\varphi_{Ocv} & \text{Cos}\varphi_{Ocv} \end{pmatrix}}_{[Q]} \begin{pmatrix} f_R \\ f_T \end{pmatrix} \quad (4.43)$$

De (4.42), puede determinarse que

$$\text{Sen } \varphi_{Ocv} = \frac{\pi \sqrt{1 - \varepsilon_{Ocv}^2}}{\gamma}, \quad \text{Cos } \varphi_{Ocv} = \frac{4\varepsilon_{Ocv}}{\gamma}, \quad \gamma = \sqrt{16\varepsilon_{Ocv}^2 + \pi^2(1 - \varepsilon_{Ocv}^2)} \quad (4.44)$$

Después de realizar la multiplicación matricial en (4.43) y teniendo en cuenta (4.44), se puede escribir:

$$f_{x,Ocv} = -\left(\frac{L}{D}\right)^2 \left[\frac{4\pi\varepsilon_{Ocv}^2}{(1 - \varepsilon_{Ocv}^2)^2} \text{Cos } \varphi_{Ocv} + \frac{\pi^2\varepsilon_{Ocv}}{(1 - \varepsilon_{Ocv}^2)^{3/2}} \text{Sen } \varphi_{Ocv} \right] \quad (4.45)$$

$$f_{y,Ocv} = -\left(\frac{L}{D}\right)^2 \left[-\frac{4\pi\varepsilon_{Ocv}^2}{(1 - \varepsilon_{Ocv}^2)^2} \text{Sen } \varphi_{Ocv} + \frac{\pi^2\varepsilon_{Ocv}}{(1 - \varepsilon_{Ocv}^2)^{3/2}} \text{Cos } \varphi_{Ocv} \right]. \quad (4.46)$$

4.3 Cálculo analítico de la posición de equilibrio de una chumacera presurizada.

Si ahora se presuriza externamente a una chumacera, la posición de equilibrio que adopte el muñón dependerá además de la fuerza en la película de aceite, del tamaño de la presurización, así como del lugar en donde se realice esta inyección de lubricante. Esto se puede ver fácilmente analizando primero dos casos especiales:

- Si se presuriza en la parte superior, la inyección hará que la excentricidad aumente ya que ésta fuerza está en la misma dirección del peso del sistema, pero en sentido contrario a las fuerzas del lubricante.
- Si se presuriza en la parte inferior, la excentricidad disminuirá ya que ahora ésta fuerza está en sentido contrario al peso del sistema, pero en la misma dirección de las fuerzas del lubricante.

La disminución de excentricidad podría continuar, hasta que posiblemente se haga igual a cero dependiendo de la magnitud de la fuerza de presurización; inclusive si la presurización es considerablemente grande, el muñón podría pasar por encima del centro geométrico de la chumacera y la excentricidad comenzará a crecer.

4.3.1 Fuerzas de presión en una chumacera corta presurizada.

Ahora es necesario calcular las fuerzas en la película de lubricante de una chumacera presurizada, pues serán utilizadas al realizar la sumatoria de fuerzas en el sistema.

De igual manera que en la chumacera no presurizada, las fuerzas de presión pueden ser calculadas de (4.26) y (4.27) a partir del campo de presión obtenido en (4.12). Recordando que el campo de presión es

$$\bar{p}_{pres}(\bar{z}, \theta) = \left(\frac{L}{D}\right)^2 \bar{q}_{prt} \frac{\delta[\theta - (\pi + \beta - \varphi_{pres})]}{2(1 + \varepsilon \cos \theta)^3} (1 - a\bar{z} - |\bar{z} - a|), \quad (4.47)$$

por tanto, las fuerzas serán:

$$\hat{f}_R = \frac{1}{4} \int_{-1}^1 \int_0^{2\pi} \left(\frac{L}{D}\right)^2 \bar{q}_{prt} \frac{\delta[\theta - (\pi + \beta - \varphi_{pres})]}{2(1 + \varepsilon \cos \theta)^3} (1 - a\bar{z} - |\bar{z} - a|) \cdot \cos \theta \, d\theta \, d\bar{z} \quad (4.48)$$

$$\hat{f}_T = \frac{1}{4} \int_{-1}^1 \int_0^{2\pi} \left(\frac{L}{D}\right)^2 \bar{q}_{prt} \frac{\delta[\theta - (\pi + \beta - \varphi_{pres})]}{2(1 + \varepsilon \cos \theta)^3} (1 - a\bar{z} - |\bar{z} - a|) \cdot \sin \theta \, d\theta \, d\bar{z} \quad (4.49)$$

Para calcular (4.48) y (4.49) se usará una propiedad de la teoría de distribuciones aplicada a la función delta de Dirac. Por lo anterior, solo se mostrará el cálculo de \hat{f}_R , puesto que para \hat{f}_T el proceso es similar.

A continuación se muestra de manera detallada el cálculo de (4.48). La integral se puede separar en dos factores A y B , los cuales se determinan como sigue:

$$\hat{f}_R = \frac{1}{8} \left(\frac{L}{D}\right)^2 \bar{q}_{prt} \underbrace{\int_{-1}^1 (1 - a\bar{z} - |\bar{z} - a|) \, d\bar{z}}_A \underbrace{\int_0^{2\pi} \frac{\delta[\theta - (\pi + \beta - \varphi_{pres})] \cos \theta}{(1 + \varepsilon \cos \theta)^3} \, d\theta}_B \quad (4.50)$$

Factor A:

$$\int_{-1}^1 (1 - a\bar{z} - |\bar{z} - a|) dz = \bar{z} \Big|_{-1}^1 - \frac{a\bar{z}}{2} \Big|_{-1}^1 - \left\{ \begin{array}{l} \int_a^1 (\bar{z} - a) d\bar{z} \\ \int_{-1}^a -(\bar{z} - a) d\bar{z} \end{array} \right. = 2 - a(0) - \left\{ \begin{array}{l} \left[\frac{\bar{z}^2}{2} - a\bar{z} \right]_a^1 \\ - \left[\frac{\bar{z}^2}{2} - a\bar{z} \right]_{-1}^a \end{array} \right.$$

$$= 2 - a(0) - \left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{1}{2} - a \right) - \left(\frac{a^2}{2} - a^2 \right) \\ - \left[\frac{a^2}{2} - a^2 - \left(\frac{1}{2} + a \right) \right] \end{array} \right. = 2 - a(0) - \frac{1}{2} + a + \frac{a^2}{2} - a^2 + \frac{a^2}{2} - \frac{1}{2} - a = 1 - a^2$$

Factor B:

Usando la propiedad de la función de Dirac [2]:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t_0) f(t) dt = f(t_0) , \tag{4.51}$$

entonces

$$\int_0^{2\pi} \frac{\delta[\theta - (\pi + \beta - \varphi_{pres})] \text{Cos} \theta}{2(1 + \varepsilon \text{Cos} \theta)^3} d\theta = \frac{\text{Cos}(\pi + \beta - \varphi_{pres})}{[1 + \varepsilon \text{Cos}(\pi + \beta - \varphi_{pres})]^3} = \frac{-\text{Cos}(\beta - \varphi_{pres})}{[1 - \varepsilon \text{Cos}(\beta - \varphi_{pres})]}$$

Sustituyendo los resultados obtenidos anteriormente en (4.48) y (4.49) se obtiene

$$\hat{f}_R = - \left(\frac{L}{D} \right)^2 \bar{q}_{prt} \frac{(1 - a^2) \text{Cos}(\beta - \varphi_{pres})}{8 [1 - \varepsilon \text{Cos}(\beta - \varphi_{pres})]^3} \tag{4.52}$$

$$\hat{f}_T = - \left(\frac{L}{D} \right)^2 \bar{q}_{prt} \frac{(1 - a^2) \text{Sen}(\beta - \varphi_{pres})}{8 [1 - \varepsilon \text{Cos}(\beta - \varphi_{pres})]^3} . \tag{4.53}$$

Las ecuaciones (4.52) y (4.53) representan a las fuerzas de la película de lubricante cuando se presuriza externamente en un puerto puntual, cuya ubicación axial y angular es arbitraria.

Es posible escribir las componentes de la fuerza de la película de aceite (4.52) y (4.53) en el sistema coordenado xy , mediante la matriz de rotación $[Q]$ correspondiente como se muestra a continuación:

$$\begin{pmatrix} \hat{f}_x \\ \hat{f}_y \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \text{Cos}\varphi_{pres} & -\text{Sen}\varphi_{pres} \\ \text{Sen}\varphi_{pres} & \text{Cos}\varphi_{pres} \end{pmatrix}}_{[Q]} \begin{pmatrix} \hat{f}_R \\ \hat{f}_T \end{pmatrix} \quad (4.54)$$

Después de realizar la multiplicación y utilizando algunas identidades trigonométricas, se puede escribir:

$$\hat{f}_x = -\left(\frac{L}{D}\right)^2 \bar{q}_{prt} (1-a^2) \frac{\text{Cos}\beta}{8[1-\varepsilon \text{Cos}(\beta-\varphi_{pres})]^3} \quad (4.55)$$

$$\hat{f}_y = -\left(\frac{L}{D}\right)^2 \bar{q}_{prt} (1-a^2) \frac{\text{Sen}\beta}{8[1-\varepsilon \text{Cos}(\beta-\varphi_{pres})]^3} \quad (4.56)$$

Una vez encontradas las fuerzas horizontales y verticales en la película de aceite, es posible aplicar las condiciones de equilibrio en el sistema xy , y posteriormente determinar las nuevas posiciones que tomará el muñón en la chumacera como función de la presurización externa.

Por otro lado, como se verá en el siguiente capítulo, las fuerzas calculadas son de gran importancia para hallar las rigideces y amortiguamientos que tiene el lubricante.

4.3.2 Ángulo de equilibrio de una chumacera corta presurizada.

Como en el caso de la chumacera no presurizada, la posición de equilibrio se determina a partir de un balance de fuerzas totales, en donde:

$$\begin{aligned} W + F_{X,result} &= 0 \\ F_{Y,result} &= 0 \end{aligned} \quad (4.57)$$

Las fuerzas que aparecen en (4.57) representan a la resultante en la película de aceite y están dadas por la contribución de las fuerzas de Ocvirk en el caso clásico y las fuerzas debidas a la presurización. De (4.45), (4.46), (4.55) y (4.56), se puede escribir en forma dimensional:

$$F_{X,result} = F_{X,Ocv} + F_{X,pres} \quad (4.58)$$

$$= -F_{dim} \left(\frac{L}{D} \right)^2 \left[\frac{4\pi\epsilon_{pres}^2}{(1-\epsilon_{pres}^2)^2} \text{Cos}\varphi_{pres} + \frac{\pi^2\epsilon_{pres}}{(1-\epsilon_{pres}^2)^{3/2}} \text{Sen}\varphi_{pres} \right] + \Delta F_{pres} \left(\frac{L}{D} \right)^2 \frac{(1-a^2) \text{Cos}(\pi + \beta)}{8(1 + \epsilon_{pres} \text{Cos}(\pi + \beta - \varphi_{pres}))^3}$$

$$F_{Y,result} = F_{Y,Ocv} + F_{pres} \quad (4.59)$$

$$= -F_{dim} \left(\frac{L}{D} \right)^2 \left[-\frac{4\pi\epsilon_{pres}^2}{(1-\epsilon_{pres}^2)^2} \text{Sen}\varphi_{pres} + \frac{\pi^2\epsilon_{pres}}{(1-\epsilon_{pres}^2)^{3/2}} \text{Cos}\varphi_{pres} \right] + \Delta F_{pres} \left(\frac{L}{D} \right)^2 \frac{(1-a^2) \text{Sin}(\pi + \beta)}{8(1 + \epsilon_{pres} \text{Cos}(\pi + \beta - \varphi_{pres}))^3}$$

$$\text{donde } P_{dim} = \mu N \left(\frac{R}{Cr} \right)^2, \bar{q}_{prt} = \frac{\Delta F_{pres}}{DLP_{dim}} = \frac{\Delta F_{pres}}{F_{dim}} \quad (4.60)$$

Debe recordarse que las expresiones (4.60) fueron definidas en el capítulo 3 para realizar la adimensionalización del modelo presurizado.

Nótese que en (4.58) y (4.59), la excentricidad y el ángulo de equilibrio aparecen con el subíndice *pres*, pues ahora estos valores cambian a medida que la presurización externa cambie.

Sustituyendo (4.58) y (4.59) en (4.57), se obtiene para la condición de equilibrio:

$$W - F_{\text{dim}} \left(\frac{L}{D} \right)^2 \left(\frac{4\pi\epsilon_{\text{pres}}^2}{(1-\epsilon_{\text{pres}}^2)^2} \text{Cos}\varphi_{\text{pres}} + \frac{\pi^2\epsilon_{\text{pres}}}{(1-\epsilon_{\text{pres}}^2)^{3/2}} \text{Sen}\varphi_{\text{pres}} \right) + \Delta F_{\text{pres}} \left(\frac{L}{D} \right)^2 \frac{(1-a^2)\text{Cos}(\pi+\beta)}{8(1+\epsilon_{\text{pres}}\text{Cos}(\pi+\beta-\varphi_{\text{pres}}))^3} = 0 \quad (4.61)$$

$$F_{\text{dim}} \left(\frac{L}{D} \right)^2 \left(-\frac{4\pi\epsilon_{\text{pres}}^2}{(1-\epsilon_{\text{pres}}^2)^2} \text{Sen}\varphi_{\text{pres}} + \frac{\pi^2\epsilon_{\text{pres}}}{(1-\epsilon_{\text{pres}}^2)^{3/2}} \text{Cos}\varphi_{\text{pres}} \right) + \Delta F_{\text{pres}} \left(\frac{L}{D} \right)^2 \frac{(1-a^2)\text{Sen}(\pi+\beta)}{8(1+\epsilon_{\text{pres}}\text{Cos}(\pi+\beta-\varphi_{\text{pres}}))^3} = 0 \quad (4.62)$$

En el caso general, las ecuaciones (4.61) y (4.62) representan un sistema de dos ecuaciones no lineales con respecto a la excentricidad de equilibrio ϵ_{pres} y al ángulo de equilibrio φ_{pres} . La solución de este sistema puede encontrarse mediante cálculos numéricos, ya que no es posible encontrar en forma cerrada la posición de equilibrio en una chumacera presurizada que presenta un puerto puntual de inyección con ubicación axial y angular arbitraria. Sin embargo, cuando se conoce la ubicación del puerto de inyección, las ecuaciones (4.61) y (4.62) pueden simplificarse en gran medida.

4.3.3 Análisis de cuatro casos especiales de presurización.

Como se ha visto anteriormente, el comportamiento dinámico del muñón en la chumacera depende en gran medida del lugar en el cual se aplique la inyección de lubricante. En este trabajo se analizan cuatro casos de presurización: inyección en la parte central superior e inferior de la chumacera, así como en la parte central derecha e izquierda de la chumacera. Se analizan inicialmente las dos primeras ubicaciones pues de esta manera el sistema formado por las ecuaciones (4.61) y (4.62) se simplifica considerablemente, y además porque intuitivamente representan los casos más críticos en los cuales el rotor puede tener conductas más estables (puerto inferior) o inestables (puerto superior).

4.3.3.1 Presurización en la parte central superior de la chumacera.

Si la inyección de lubricante se realiza en la parte central superior de una chumacera, como se ilustra en la figura 4.6, puede verse que:

$$\begin{aligned} a &= 0 \\ \beta &= \pi \end{aligned} \tag{4.63}$$

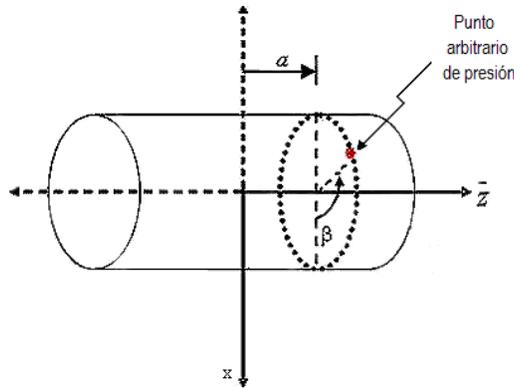


Figura 4.6. Ubicación del punto de presurización en la chumacera. Se definen los valores de las coordenadas axial y circunferencial (a, β) para especificar el punto en particular de inyección de lubricante.

Sustituyendo los valores de a y β en el sistema formado por (4.61) y (4.62), la ecuación

(4.62) se reduce a:

$$\tan \varphi_{pres} = \frac{\pi \sqrt{1 - \varepsilon_{pres}^2}}{4\varepsilon_{pres}} \tag{4.64}$$

La ecuación (4.64) muestra que en una chumacera presurizada, la dependencia entre el nuevo ángulo de equilibrio y la excentricidad (ambos presurizados) es la misma que la encontrada en el caso clásico de Ocvirk (4.42), pero es importante destacar que aunque la dependencia es la misma, el ángulo de equilibrio y la excentricidad son completamente diferentes en ambos casos. Pues ahora ε_{pres} y φ_{pres} representan los nuevos valores de excentricidades y ángulos de equilibrio al inyectar lubricante externamente, recordando que la presurización hará que la excentricidad y el ángulo de equilibrio puedan cambiar su valor.

Al igual que en el caso clásico (4.42) y (4.44), la ecuación (4.64) permite obtener para el caso presurizado:

$$\begin{aligned} \text{Sen } \varphi_{pres} &= \frac{\pi \sqrt{1 - \varepsilon_{pres}^2}}{\gamma}, & \text{Cos } \varphi_{ocv} &= \frac{4\varepsilon_{pres}}{\gamma}, & \gamma &= \sqrt{16\varepsilon_{pres}^2 + \pi^2(1 - \varepsilon_{pres}^2)} \end{aligned} \tag{4.65}$$

Sustituyendo (4.63) en (4.61) y reemplazando $\text{Cos}\varphi_{pres}$ y $\text{Sin}\varphi_{pres}$ de (4.65) se tiene:

$$W - F_{\text{dim}} \left(\frac{L}{D} \right)^2 \left[\frac{4\pi\epsilon_{pres}^2}{(1-\epsilon_{pres}^2)^2} \frac{4\epsilon_{pres}}{\sqrt{16\epsilon_{pres}^2 + \pi^2(1-\epsilon_{pres}^2)}} + \frac{\pi^2\epsilon_{pres}}{(1-\epsilon_{pres}^2)} \frac{\pi}{\sqrt{16\epsilon_{pres}^2 + \pi^2(1-\epsilon_{pres}^2)}} \right] + \Delta F_{pres} \left(\frac{L}{D} \right)^2 \frac{1}{8 \left[1 + \frac{4\epsilon_{pres}^2}{\sqrt{16\epsilon_{pres}^2 + \pi^2(1-\epsilon_{pres}^2)}} \right]^3} = 0 \quad (4.66)$$

Recordando de la ecuación (4.30) que el número de Sommerfeld (que depende únicamente de los parámetros convencionales de una chumacera) puede escribirse como

$$S = \frac{F_{\text{dim}}}{W} = \frac{\mu NDL}{W} \left(\frac{R}{C_r} \right)^2, \quad (4.67)$$

después de algunas transformaciones algebraicas, la ecuación (4.66) se simplifica:

$$S = \frac{\mu NDL}{W} \left(\frac{R}{C_r} \right)^2 = \frac{(1-(\epsilon_{pres}^{arriba})^2)^2}{\pi \epsilon_{pres}^{arriba} \gamma_{pres}^{arriba}} \left(\left(\frac{D}{L} \right)^2 + f_{prt} \frac{(1-a^2)(\gamma_{pres}^{arriba})^3}{8[\gamma_{pres}^{arriba} + 4(\epsilon_{pres}^{arriba})^2]^3} \right) \quad (4.68)$$

Para propósitos de esta sección, ϵ_{pres}^{arriba} significa la excentricidad de equilibrio en una chumacera presurizada en su parte central superior.

Además γ_{pres}^{arriba} y f_{prt} están determinados por:

$$\gamma_{pres}^{arriba} = \sqrt{16(\epsilon_{pres}^{arriba})^2 + \pi^2 [1 - (\epsilon_{pres}^{arriba})^2]}, \quad f_{prt} = \frac{\Delta F_{pres}}{W} \quad (4.69)$$

Nótese de (4.69) que ahora se define el parámetro f_{prt} , el cual representa la fuerza de presurización externa con respecto al peso del sistema, éste será fundamental de aquí en adelante pues la conducta del sistema presurizado estará en función del tamaño que tome f_{prt} . La manera en que se relaciona la intensidad de presión adimensional \bar{q}_{prt} y la fuerza de presurización externa f_{prt} , puede obtenerse fácilmente combinando (4.60),

$$(4.67) \text{ y } (4.69) \text{ para finalmente escribir } \bar{q}_{prt} = \frac{f_{prt}}{S} \quad (4.69a)$$

La ecuación (4.68) permite encontrar el número de Sommerfeld como una función de la excentricidad de equilibrio, la fuerza de presurización externa y la relación L/D . En la

figura 4.7 se muestra esta conducta para diversos valores de fuerza de presurización y para una relación $L/D = 1/4$. Se aprecia que a cada valor de número de Sommerfeld, le corresponde uno y solo un valor de excentricidad, también se observa que al incrementar la fuerza de presurización en la parte superior de la chumacera, la excentricidad aumenta tal y como se espera en la realidad, pues el muñón tiende a moverse cada vez más hacia abajo.

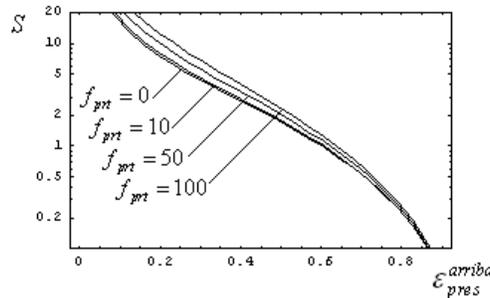


Figura 4.7. Excentricidad de equilibrio contra el número de Sommerfeld de una chumacera corta presurizada en su parte central superior. $L/D = 1/4$, $a = 0$.

Puesto que la escala de ésta figura es logarítmica, no es fácil localizar de manera exacta los valores de excentricidad y número de Sommerfeld. Para facilitar la lectura se ha construido la tabla 4.1 [8] con ayuda de (4.64) y (4.68), en la cual aparece la dependencia del número de Sommerfeld con la excentricidad de equilibrio, fuerza de presurización y ángulo de equilibrio. Esta tabla es similar a la de Khonsari-Booser [5], con la diferencia de que la tabla 4.1 tiene la dependencia con la presurización externa.

Obsérvese que la tabla 4.1 permite determinar el número de Sommerfeld y el ángulo de equilibrio para una excentricidad y fuerza de presurización dadas. Sin embargo, en la práctica se conoce como dato de entrada la velocidad de operación (tiene relación con el número de Sommerfeld), y lo que se desea conocer son los valores de excentricidad y el ángulo de equilibrio. Para lograr lo anterior, se puede aprovechar el hecho de que para un valor dado de excentricidad existe uno y solo un número de Sommerfeld y así realizar una interpolación de la tabla 4.1 que permita tener información que sea más manejable y de mayor utilidad.

Interpolando la tabla 4.1 mediante el uso de MATHEMATICA 8.0, se obtiene la tabla 4.2 [8], que permite encontrar la posición de equilibrio dados S y f_{prt} . Las tablas descritas son para una relación $L/D=1/4$, pero pueden obtenerse para otra relación L/D .

Tabla 4.1. Puerto de Inyección Superior, $L/D = 1/4$.

Número de Sommerfeld como función de ε , φ y la fuerza de presurización de una chumacera corta presurizada en su parte central superior. Los datos contenidos en esta tabla son tomados de la figura 4.7.

Excentricidad ε_{pres}	$f_{prt} = 0$	$f_{prt} = 1$	$f_{prt} = 5$	$f_{prt} = 10$	$f_{prt} = 20$	$f_{prt} = 50$	$f_{prt} = 100$	Ángulo equilibrio φ_{pres}
0.05	32.2356981	32.4853	33.4831	34.7304	37.2249	44.7086	57.1813	86.35°
0.1	15.8395922	15.9588	16.4354	17.0312	18.2227	21.7973	27.7549	82.70°
0.15	10.2552619	10.3290	10.6236	10.9918	11.7284	13.9380	17.6206	79.06°
0.2	7.37906829	7.42886	7.62788	7.87666	8.37420	9.86680	12.3547	75.43°
0.25	5.59178482	5.62668	5.76614	5.94046	6.28910	7.33500	9.07830	71.80°
0.3	4.35479751	4.37950	4.47869	4.60257	4.85030	5.59350	6.83230	68.17°
0.35	3.438115	3.45570	3.52630	3.61458	3.79102	4.32037	5.20260	64.55°
0.4	2.72736128	2.73988	2.78990	2.85246	2.97750	3.35270	3.97821	60.93°
0.45	2.15943673	2.16823	2.20337	2.24729	2.33510	2.59860	3.03790	57.31°
0.5	1.69678403	1.70288	1.72723	1.75760	1.81855	2.00118	2.30557	53.68°
0.55	1.31569559	1.31980	1.33643	1.35717	1.39860	1.52300	1.73030	50.02°
0.6	1.00047416	1.00324	1.01429	1.02810	1.05573	1.13860	1.27670	46.32°
0.65	0.7402962	0.74208	0.74924	0.75818	0.77607	0.82970	0.91914	42.55°
0.7	0.52742744	0.52854	0.53300	0.53857	0.54970	0.58310	0.63888	38.70°
0.75	0.3561598	0.35682	0.35945	0.36274	0.36933	0.38900	0.42200	34.70°
0.8	0.22215371	0.22251	0.22395	0.22575	0.22935	0.24015	0.25815	30.50°
0.85	0.12201857	0.12219	0.12288	0.12375	0.12549	0.13069	0.13937	25.95°
0.9	0.05303793	0.05310	0.05337	0.05370	0.05436	0.05635	0.05967	20.82°
0.95	0.0129856	0.01300	0.01305	0.01312	0.01327	0.01370	0.01441	14.47°

Tabla 4.2. Puerto de Inyección Superior, $L/D = ¼$.

Valores de excentricidad y ángulo de equilibrio como función del número de Sommerfeld de una chumacera corta presurizada en su parte central superior. Esta tabla es el resultado de la interpolación de la tabla 4.1.

S	$f_{prt} = 0$		$f_{prt} = 1$		$f_{prt} = 5$		$f_{prt} = 10$		$f_{prt} = 20$		$f_{prt} = 50$		$f_{prt} = 100$	
	ϵ_{pres}	φ_{pres}												
0.013	0.9499	14.47	0.9500	14.47	0.9500	14.45	0.9501	14.44	0.9504	14.41	0.9510	14.33	0.9519	14.21
0.02	0.9397	15.82	0.9397	15.82	0.9399	15.80	0.9400	15.78	0.9403	15.74	0.9412	15.62	0.9426	15.43
0.05	0.9031	20.44	0.9032	20.44	0.9034	20.40	0.9037	20.37	0.9043	20.29	0.9062	20.07	0.9090	19.73
0.10	0.8624	24.85	0.8625	24.84	0.8629	24.81	0.8633	24.77	0.8641	24.69	0.8665	24.47	0.8701	24.11
0.20	0.8129	29.05	0.8131	29.04	0.8138	28.97	0.8146	28.88	0.8162	28.72	0.8205	28.30	0.8264	27.76
0.30	0.7706	32.91	0.7708	32.90	0.7715	32.83	0.7725	32.76	0.7743	32.61	0.7793	32.20	0.7865	31.60
0.50	0.7072	38.13	0.7074	38.11	0.7085	38.02	0.7099	37.92	0.7125	37.71	0.7197	37.14	0.7302	36.30
0.80	0.6375	43.49	0.6379	43.46	0.6395	43.34	0.6415	43.19	0.6452	42.91	0.6554	42.14	0.6696	41.05
1.00	0.6000	46.31	0.6005	46.27	0.6024	46.13	0.6047	45.96	0.6091	45.63	0.6209	44.74	0.6375	43.50
1.30	0.5522	49.85	0.5528	49.81	0.5551	49.64	0.5579	49.43	0.5633	49.04	0.5775	47.98	0.5971	46.53
1.40	0.5380	50.89	0.5386	50.85	0.5411	50.67	0.5441	50.45	0.5498	50.03	0.5647	48.93	0.5851	47.42
1.50	0.5245	51.88	0.5252	51.83	0.5278	51.64	0.5309	51.41	0.5369	50.98	0.5526	49.82	0.5738	48.26
2.00	0.4660	56.14	0.4669	56.08	0.4700	55.85	0.4739	55.57	0.4811	55.05	0.5001	53.67	0.5249	51.85
2.30	0.4365	58.28	0.4374	58.21	0.4409	57.96	0.4451	57.66	0.4530	57.08	0.4735	55.60	0.5004	53.64
2.50	0.4187	59.57	0.4196	59.50	0.4233	59.24	0.4277	58.92	0.4360	58.32	0.4574	56.76	0.4854	54.74
3.00	0.3793	62.42	0.3803	62.34	0.3844	62.05	0.3893	61.70	0.3984	61.04	0.4218	59.35	0.4523	57.14
3.50	0.3461	64.82	0.3472	64.74	0.3515	64.43	0.3567	64.06	0.3664	63.36	0.3914	61.54	0.4237	59.21
4.00	0.3176	66.88	0.3188	66.80	0.3233	66.47	0.3287	66.08	0.3389	65.35	0.3650	63.45	0.3989	61.00
5.00	0.2720	70.19	0.2732	70.10	0.2779	69.77	0.2835	69.36	0.2940	68.60	0.3217	66.59	0.3573	64.02
7.00	0.2092	74.75	0.2104	74.67	0.2150	74.34	0.2204	73.94	0.2308	73.19	0.2586	71.17	0.2956	68.48
8.00	0.1870	76.3	0.1881	76.29	0.1923	75.98	0.1974	75.61	0.2078	74.86	0.2350	72.88	0.2722	70.18
10.00	0.1538	78.78	0.1549	78.70	0.1590	78.40	0.1639	78.04	0.1731	77.37	0.1979	75.58	0.2340	72.95
15.00	0.1073	82.16	0.1082	82.09	0.1116	81.84	0.1155	81.56	0.1225	81.05	0.1412	79.69	0.1724	77.42
30.00	0.0661	85.14	0.0679	85.05	0.0722	84.74	0.0761	84.45	0.0808	84.11	0.0857	83.74	0.0948	83.08

Nótese de la tabla 4.2, que las excentricidades $\varepsilon_{pres}^{arriba}$ y los ángulos de equilibrio φ_{pres}^{arriba} muestran una variación monotónica, es decir, que los valores obtenidos crecen (excentricidad) y decrecen (ángulo de equilibrio) de manera continua cuando la fuerza de presurización f_{pri} se incrementa.

4.3.3.2 Presurización en la parte central inferior de la chumacera.

Considerando ahora el caso en donde se inyecta lubricante en la parte central inferior de la chumacera, bajo estas condiciones (ver figura 4.6):

$$\begin{aligned} a &= 0 \\ \beta &= 0 \end{aligned} \quad (4.70)$$

Ahora se espera que el comportamiento de la excentricidad y el ángulo de equilibrio sean muy diferentes del caso analizado anteriormente, pues al presurizar en la parte inferior el rotor tratará de subir dependiendo de la magnitud de la fuerza de presurización. De hecho, si la fuerza de presurización es menor o mayor que el peso del sistema el rotor tratará de ubicarse en diferentes puntos de equilibrio, por lo que será necesario considerar dos casos de análisis:

Caso 1. Cuando la componente vertical de la fuerza de presurización es menor que el peso del sistema.

$$F_{X_{pres}} < W$$

En la figura 4.8 se aprecia un diagrama de cuerpo libre en donde se muestran las fuerzas de la película de lubricante en el caso clásico F_R y F_T , la componente vertical de la fuerza de presurización $F_{X_{pres}}$ y el peso del sistema W . En esta figura se puede notar que el único cuadrante en donde es posible localizar al rotor en estado estacionario es el cuadrante I, pues en ningún otro las ecuaciones de equilibrio se satisfacen.

Recordando que la posición de equilibrio se determina a partir de las ecuaciones (4.61) y (4.62), entonces, sustituyendo (4.70) en (4.62) se puede escribir:

$$\tan \varphi_{pres} = \frac{\pi \sqrt{1 - \varepsilon_{pres}^2}}{4 \varepsilon_{pres}} \quad (4.71)$$

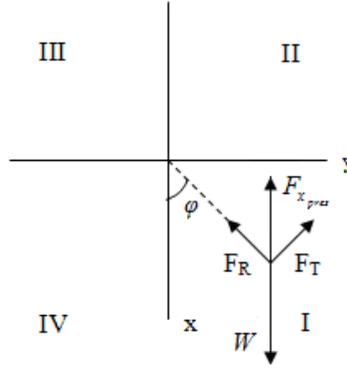


Figura 4.8. Diagrama vectorial que muestra el único cuadrante en donde es posible localizar al rotor cuando se presuriza en la parte central inferior de una chumacera corta con $F_{x_{pres}} < W$.

La ecuación (4.71) muestra al igual que en la presurización superior que la dependencia entre el nuevo ángulo de equilibrio y la excentricidad de equilibrio es la misma que la encontrada en el caso clásico de Ocvirk (4.42), pero nuevamente el ángulo de equilibrio y la excentricidad son diferentes en ambos casos.

Sustituyendo (4.70) en (4.61) y reemplazando $\text{Cos}\varphi_{pres}$ y $\text{Sin}\varphi_{pres}$ de (4.65) se tiene:

$$W - F_{\text{dim}} \left(\frac{L}{D} \right)^2 \left[\frac{4\pi \varepsilon_{pres}^2}{(1 - \varepsilon_{pres}^2)^2} \frac{4\varepsilon_{pres}}{\sqrt{16\varepsilon_{pres}^2 + \pi^2(1 - \varepsilon_{pres}^2)}} + \frac{\pi^2 \varepsilon_{pres}}{(1 - \varepsilon_{pres}^2)} \frac{\pi}{\sqrt{16\varepsilon_{pres}^2 + \pi^2(1 - \varepsilon_{pres}^2)}} \right] - \Delta F_{pres} \left(\frac{L}{D} \right)^2 \frac{1}{8 \left[1 + \frac{4\varepsilon_{pres}^2}{\sqrt{16\varepsilon_{pres}^2 + \pi^2(1 - \varepsilon_{pres}^2)}} \right]^3} = 0 \quad (4.72)$$

Procediendo de igual forma a como se hizo en la presurización superior, usando la definición del número de Sommerfeld y después de algunas transformaciones se puede escribir (4.72) en la forma:

$$S = \frac{(1 - (\varepsilon_{pres}^{abaja})^2)^2}{\pi \varepsilon_{pres}^{abaja} \gamma_{pres}^{abaja}} \left[\left(\frac{D}{L} \right)^2 - f_{prt} \frac{(\gamma_{pres}^{abaja})^3}{8 [\gamma_{pres}^{abaja} - 4(\varepsilon_{pres}^{abaja})^2]^3} \right]. \quad (4.73)$$

Ahora, $\varepsilon_{pres}^{abaja}$ significa la excentricidad de equilibrio en una chumacera presurizada en su parte central inferior en el caso 1 ($F_{x_{pres}} < W$). Nótese que γ_{pres}^{abaja} y f_{prt} están dados por:

$$\gamma_{pres}^{abaja} = \sqrt{16(\varepsilon_{pres}^{abaja})^2 + \pi^2 [1 - (\varepsilon_{pres}^{abaja})^2]}, \quad f_{prt} = \frac{\Delta F_{pres}}{W}. \quad (4.74)$$

Puesto que la fuerza de presurización es menor que el peso del sistema, $F_{X_{pres}} < W$, de (4.72) se puede notar que para esto sea cierto debe cumplirse que:

$$\Delta F_{pres} \left(\frac{L}{D}\right)^2 \frac{(\gamma_{pres}^{abajo_1})^3}{8[\gamma_{pres}^{abajo_1} - 4(\varepsilon_{pres}^{abajo_1})^2]^3} < W, \tag{4.75}$$

o bien, en forma adimensional:

$$f_{prt} < \left(\frac{D}{L}\right)^2 \frac{8[\gamma_{pres}^{abajo_1} - 4(\varepsilon_{pres}^{abajo_1})^2]^3}{(\gamma_{pres}^{abajo_1})^3}. \tag{4.76}$$

En la figura 4.9 aparece el comportamiento de (4.76) para $(L/D)=1/4$. Ésta es de gran importancia pues permite conocer los valores admisibles de la fuerza de presurización f_{prt} para los cuales el rotor permanecerá en el cuadrante I.

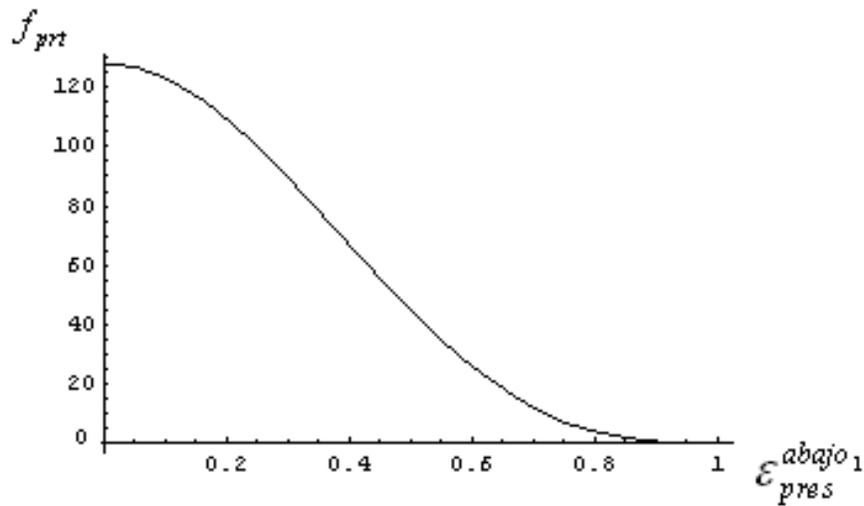


Figura 4.9. Valores admisibles de f_{prt} como función de la excentricidad para una chumacera corta presurizada en su parte central inferior. $L/D=1/4$, $a=0$. $F_X < W$

En la figura anterior se puede observar que los valores permitidos de la fuerza de presurización estarán en el intervalo:

$$0 < f_{prt} < 128 = 8 \left(\frac{D}{L}\right)^2. \tag{4.77}$$

Por tanto, si la fuerza de presurización $f_{prt} > 128$, puede concluirse con seguridad que el rotor no estará ubicado en el primer cuadrante; luego entonces $f_{prt} = 128$ es un indicador del peso del sistema.

En la figura 4.10 se muestra la dependencia del número de Sommerfeld con respecto a la excentricidad de equilibrio para diversos valores de la fuerza de presurización. Esta dependencia está dada por (4.73).

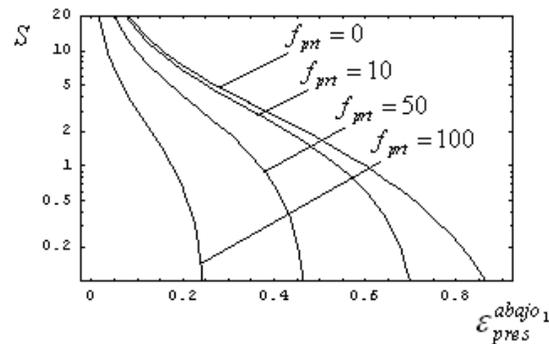


Figura 4.10. Excentricidad de equilibrio contra el número de Sommerfeld de una chumacera corta presurizada en su parte central inferior. $L/D = 1/4$, $a = 0$. $F_X < W$

En ésta se nota que al incrementar la fuerza de presurización en la parte inferior de la chumacera la excentricidad disminuye, pues el muñón tiende a moverse hacia arriba cada vez más. Si la fuerza tomara el valor de 128, el muñón estaría ubicado en el centro geométrico de la chumacera con un valor de excentricidad de cero.

Como en el caso de presurización superior la escala de la figura 4.10 es logarítmica por lo que la determinación exacta de la excentricidad se dificulta. Entonces es necesario construir la tabla 4.3 [9] (para $L/D = 1/4$) con ayuda de (4.71) y (4.73), en la cual aparece la dependencia del número de Sommerfeld con la excentricidad de equilibrio, la fuerza de presurización y el ángulo de equilibrio.

Recordando que en la práctica el dato de entrada es el número de Sommerfeld, es posible interpolar la tabla 4.3, utilizando Mathematica 8.0, y así tener los datos para los que a partir de un número Sommerfeld y una fuerza de presurización dados, se pueda encontrar la posición de equilibrio. Lo anterior se resume en la tabla 4.4 [9].

Tabla 4.3. Puerto de Inyección Inferior, $L/D = 1/4$. $F_{X\ pres} < W$

Número de Sommerfeld como función de la excentricidad de equilibrio, el ángulo de equilibrio y la fuerza de presurización de una chumacera corta presurizada en su parte central inferior. Los datos contenidos en esta tabla son tomados de la figura 4.10.

Excentricidad ε_{pres}	$f_{prt} = 0$	$f_{prt} = 1$	$f_{prt} = 5$	$f_{prt} = 10$	$f_{prt} = 20$	$f_{prt} = 50$	$f_{prt} = 100$	Ángulo Equilibrio φ_{pres}
0.05	32.2356981	31.9816	30.9645	29.6932	27.1506	19.5228	6.8097	86.35°
0.1	15.8395922	15.7111	15.1968	14.5538	13.268	9.4105	2.9814	82.70°
0.15	10.2552619	10.1679	9.8184	9.3816	8.5079	5.8870	1.5187	79.06°
0.2	7.37906829	7.3118	7.0425	6.7060	6.0330	4.0138	0.6486	75.43°
0.25	5.59178482	5.5360	5.3130	5.0342	4.4767	2.8042	0.0166	71.80°
0.3	4.35479751	4.3063	4.1122	3.8697	3.3846	1.9242		68.17°
0.35	3.438115	3.3943	3.2191	3.0002	2.5622	1.2484		64.55°
0.4	2.72736128	2.6866	2.5236	2.3199	1.9126	0.6904		60.93°
0.45	2.15943673	2.1205	1.9649	1.7705	1.3816	0.2149		57.31°
0.5	1.69678403	1.6587	1.5067	1.3166	0.9364			53.68°
0.55	1.31569559	1.2776	1.1256	0.9355	0.5553			50.02°
0.6	1.00047416	0.9615	0.8058	0.6113	0.2221			46.32°
0.65	0.7402962	0.6994	0.5360	0.3318				42.55°
0.7	0.52742744	0.4833	0.3068	0.0863				38.70°
0.75	0.3561598	0.3068	0.1094					34.70°
0.8	0.22215371	0.1642						30.50°
0.85	0.12201857	0.0492						25.95°

Tabla 4.4. Puerto de Inyección Inferior, $L/D = \frac{1}{4}$. $F_{X\ pres} < W$

Valores de excentricidad y ángulo de equilibrio como función del número de Sommerfeld de una chumacera corta presurizada en su parte central inferior. Esta tabla es el resultado de la interpolación de la tabla 4.3.

S	$f_{prt} = 0$		$f_{prt} = 1$		$f_{prt} = 5$		$f_{prt} = 10$		$f_{prt} = 20$		$f_{prt} = 50$		$f_{prt} = 100$	
	ϵ_{pres}	φ_{pres}												
0.013	0.94998	14.47	0.8678	24.20	0.7768	32.47	0.7160	37.44	0.6345	43.71	0.4733	55.56	0.2501	71.77
0.02	0.93974	15.83	0.8642	24.55	0.7748	32.64	0.7144	37.53	0.6332	43.78	0.4725	55.64	0.2496	71.82
0.05	0.90312	20.45	0.8496	25.98	0.7663	33.35	0.7078	38.09	0.6281	44.13	0.4690	55.84	0.2470	72.01
0.10	0.86249	24.85	0.8266	28.11	0.7525	34.49	0.6970	38.92	0.6198	44.83	0.4634	56.15	0.2464	72.33
0.20	0.81297	29.06	0.7863	31.68	0.7261	36.62	0.6760	40.55	0.6035	46.05	0.4516	57.15	0.2341	72.95
0.30	0.77064	32.92	0.7521	34.52	0.7016	38.57	0.6561	42.08	0.5877	47.23	0.4405	57.99	0.2259	73.54
0.50	0.70721	38.14	0.6957	39.03	0.6573	41.99	0.6190	44.89	0.5578	49.44	0.4191	59.54	0.2106	74.65
0.80	0.63758	43.49	0.6296	44.09	0.6009	46.24	0.5699	48.55	0.5170	52.43	0.3894	61.69	0.1898	76.16
1.00	0.60008	46.31	0.5933	46.81	0.5685	48.65	0.5409	50.68	0.4923	54.23	0.3711	63.01	0.1774	77.06
1.30	0.55227	49.85	0.5467	50.29	0.5259	51.78	0.5020	53.53	0.4585	56.69	0.3457	64.85	0.1607	78.27
1.40	0.53806	50.90	0.5328	51.27	0.5130	52.72	0.4900	54.40	0.4481	57.44	0.3378	65.43	0.1557	78.64
1.50	0.52458	51.89	0.5196	52.24	0.5008	53.62	0.4786	55.23	0.4380	58.17	0.3301	65.99	0.1508	78.99
2.00	0.46609	56.14	0.4620	56.43	0.4465	57.56	0.4278	58.91	0.3926	61.46	0.2950	68.52	0.1297	80.52
2.30	0.43657	58.28	0.4329	58.54	0.4187	59.57	0.4016	60.81	0.3688	63.18	0.2768	69.85	0.1192	81.29
2.50	0.41871	59.58	0.4152	59.82	0.4019	60.79	0.3856	61.97	0.3543	64.23	0.2656	70.66	0.1130	81.40
3.00	0.37936	62.42	0.3763	62.64	0.3644	63.50	0.3500	64.54	0.3217	66.59	0.2407	72.47	0.0995	82.73
3.50	0.34616	64.83	0.3434	65.02	0.3327	65.79	0.3196	66.75	0.2939	68.70	0.2193	74.02	0.0896	83.45
4.00	0.31770	66.89	0.3152	67.06	0.3055	67.76	0.2935	68.63	0.2700	70.34	0.2004	75.39	0.0821	84.00
5.00	0.27207	70.19	0.2699	70.34	0.2616	70.94	0.2512	71.70	0.2310	73.15	0.1708	77.54	0.0714	84.79
7.00	0.20928	74.76	0.2076	74.87	0.2010	75.35	0.1932	75.92	0.1777	77.04	0.1309	80.44	0.0493	86.39
8.00	0.18708	76.37	0.1856	76.46	0.1801	76.87	0.1731	77.38	0.1588	78.42	0.1174	81.42	0.0469	86.57
10.00	0.15384	78.78	0.1525	78.87	0.1476	79.22	0.1421	79.62	0.1313	80.41	0.0957	83.01	0.0422	86.92
15.00	0.10732	82.17	0.1062	82.24	0.1018	82.56	0.0978	82.86	0.0922	83.26	0.0795	84.20	0.0263	88.07
20.00	0.08816	83.57	0.0879	83.58	0.0869	83.65	0.0858	83.74	0.0833	83.92	0.0435	86.81	0.0188	88.62

Caso 2. Cuando la componente vertical de la fuerza de presurización es mayor que el peso del sistema.

$$F_{x_{pres}} > W$$

En la figura 4.11 se aprecia un diagrama de cuerpo libre en donde se muestran: las fuerzas de la película de aceite en el caso clásico F_R y F_T , la componente vertical de la fuerza de presurización $F_{x_{pres}}$ y el peso W del sistema. Se puede notar que el cuadrante III es el único lugar en donde se puede localizar al rotor en estado estacionario, pues solo en éste se cumplen las ecuaciones de equilibrio.

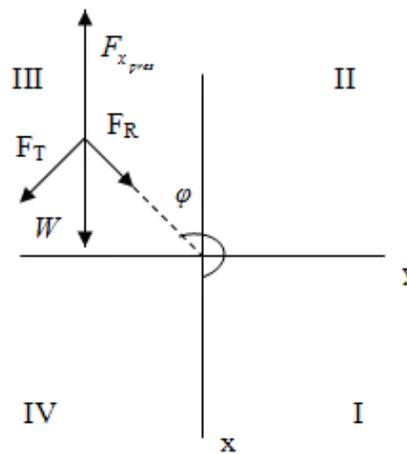


Figura4.11. Diagrama vectorial que muestra el único cuadrante en donde es posible localizar al rotor cuando se presuriza en la parte inferior de la chumacera con $F_{x_{pres}} > W$.

En este caso, la diferencia fundamental con el anterior es que siendo el cuadrante III la única posibilidad de encontrar al rotor en equilibrio, se verifica que $\text{Cos}\varphi < 0, \text{Sen}\varphi < 0$. Entonces, de la ecuación (4.65) se tiene

$$\text{Sen}\varphi_{pres} = -\frac{\pi\sqrt{1-\varepsilon_{pres}^2}}{\gamma}, \quad \text{Cos}\varphi_{ocv} = -\frac{4\varepsilon_{pres}}{\gamma}, \quad \gamma = \sqrt{16\varepsilon_{pres}^2 + \pi^2(1-\varepsilon_{pres}^2)}. \quad (4.78)$$

Procediendo de manera similar que en el caso anterior y tomando en cuenta a (4.78), se puede escribir:

$$S = \frac{[1 - (\varepsilon_{pres}^{abajo_2})^2]^2}{\pi\varepsilon_{pres}^{abajo_2}\gamma_{pres}^{abajo_2}} \left[f_{prt} \frac{(\gamma_{pres}^{abajo_2})^3}{8[\gamma_{pres}^{abajo_2} + 4(\varepsilon_{pres}^{abajo_2})^2]^3} - \left(\frac{D}{L}\right)^2 \right]. \quad (4.79)$$

Ahora, $\varepsilon_{pres}^{abajo_2}$ significa la excentricidad de equilibrio en una chumacera presurizada en su parte central inferior ($F_{X_{pres}} > W$). Para que se cumpla $F_{X_{pres}} > W$ es necesario que

$$\Delta F_{pres} \left(\frac{L}{D} \right)^2 \frac{(1-a^2)(\gamma_{pres}^{abajo_2})^3}{8[\gamma_{pres}^{abajo_2} + 4(\varepsilon_{pres}^{abajo_2})^2]^3} > W, \tag{4.80}$$

o bien, en forma adimensional:
$$f_{prt} > \left(\frac{D}{L} \right)^2 \frac{8[\gamma_{pres}^{abajo_2} + 4(\varepsilon_{pres}^{abajo_2})^2]^3}{(\gamma_{pres}^{abajo_2})^3} \tag{4.81}$$

En la figura 4.12 se ilustra el comportamiento de (4.81). Esta gráfica muestra los valores admisibles de f_{prt} para $(L/D)=1/4$. Como se esperaba, para valores $f_{prt} > 128$ el rotor experimentará una fuerza de presurización que excede el peso del sistema, por lo que la posición de equilibrio estará por encima del centro geométrico de la chumacera.

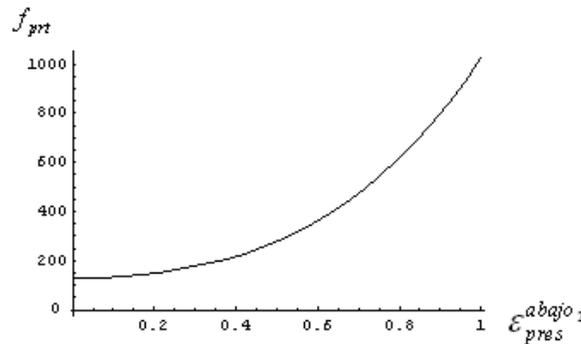


Figura 4.12. Valores admisibles de f_{prt} como función de la excentricidad para una chumacera presurizada en su parte central inferior cuando la fuerza de presurización es mayor que el peso del sistema.
 $L/D = 1/4, a = 0.$

La figura 4.13 muestra el comportamiento del número de Sommerfeld con respecto a la excentricidad para diversos valores de la fuerza de presurización. La dependencia está dada por la ecuación (4.79). Esta figura muestra que para valores de presurización grandes (que exceden el peso del sistema) la excentricidad de equilibrio se incrementa. Obsérvese que esta excentricidad se encuentra medida en el cuadrante III.

Como en los casos analizados anteriormente, la tabla 4.5 proporciona los datos de la figura 4.13 en forma más exacta dados un número de Sommerfeld y una fuerza de presión. Posteriormente, mediante una interpolación se construye la tabla 4.6, la cual permite encontrar la posición de equilibrio una vez dado el número de Sommerfeld [9].

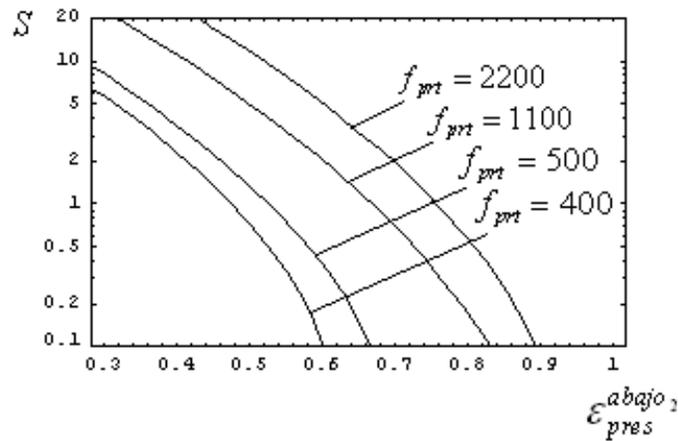


Figura 4.13. Excentricidad de equilibrio contra el número de Sommerfeld de una chumacera corta presurizada en su parte central inferior. $L/D = 1/4$, $a = 0$. $F_X > W$

Tabla 4.5. Puerto de Inyección Inferior, $L/D = 1/4$. $F_{X_{pres}} > W$

Número de Sommerfeld como función de la excentricidad de equilibrio, el ángulo de equilibrio y la fuerza de presurización de una chumacera corta presurizada en su parte central inferior. Los datos contenidos en esta tabla son tomados de la figura 4.13.

Excentricidad	$f_{prt} = 400$	$f_{prt} = 500$	$f_{prt} = 1100$	$f_{prt} = 2200$	Ángulo equilibrio
ϵ_{pres}	400	500	1100	2200	φ_{pres}
0.35	5.5550	8.0320	22.897	50.150	248.17
0.35	3.6197	5.3840	15.970	35.380	244.55°
0.4	2.2760	3.5268	11.030	24.790	240.93°
0.45	1.3543	2.2328	7.500	17.160	237.31°
0.5	0.7383	1.3470	5.000	11.700	233.68°
0.55	0.3429	0.7575	3.240	7.800	230.02°
0.6	0.1045	0.3807	2.030	5.070	226.32°
0.65		0.1539	1.220	3.190	222.55°
0.7		0.02984	0.690	1.920	218.70°
0.75			0.368	1.0920	214.70°
0.8			0.173	0.5690	210.50°

Tabla 4.6. Puerto de Inyección Inferior, $L/D = 1/4$. $F_{X\ pres} > W$

Valores de excentricidad y ángulo de equilibrio como función del número de Sommerfeld de una chumacera corta presurizada en su parte central inferior. Esta tabla es el resultado de la interpolación de la tabla 4.5.

S	$f_{prt} = 400$		$f_{prt} = 500$		$f_{prt} = 1100$		$f_{prt} = 2200$	
	ε_{pres}	φ_{pres}	ε_{pres}	φ_{pres}	ε_{pres}	φ_{pres}	ε_{pres}	φ_{pres}
0.20	0.5776	227.9	0.6362	223.6	0.7919	211.1	0.8620	209.6
0.50	0.5262	231.7	0.5851	227.4	0.7255	216.6	0.8095	210.1
0.80	0.4945	234.0	0.5460	230.3	0.6886	219.5	0.7756	212.5
1.00	0.4788	235.2	0.5294	231.5	0.6709	220.8	0.7575	214.0
1.50	0.4413	237.9	0.4905	234.3	0.6325	223.8	0.7218	216.9
2.00	0.4150	239.8	0.4633	236.3	0.6021	226.1	0.6964	218.9
2.50	0.3907	241.6	0.4383	238.1	0.5795	227.8	0.6766	220.4
3.00	0.3722	242.9	0.4197	239.5	0.5598	229.2	0.6578	221.9
3.50	0.3544	244.2	0.4018	242.0	0.5417	230.6	0.6409	223.2
4.00	0.3391	245.3	0.3861	243.8	0.5273	231.6	0.6276	224.2
5.00	0.3136	247.1	0.3599	251.1	0.5000	233.6	0.6019	226.1
10.00			0.2594	267.6	0.4137	238.9	0.5207	232.1
15.00					0.3592	243.8	0.4668	235.6
20.00					0.3196	246.7	0.4300	238.7
30.00							0.3740	242.8
50.00							0.3004	248.1

4.3.3.3 Presurización horizontal de la chumacera.

Primero reescribimos las ecuaciones (4.61) y (4.62), obtenidas anteriormente:

$$W - F_{\text{dim}} \left(\frac{L}{D} \right)^2 \left(\frac{4\pi\epsilon_{\text{pres}}^2}{(1-\epsilon_{\text{pres}}^2)^2} \text{Cos}\varphi_{\text{pres}} + \frac{\pi^2\epsilon_{\text{pres}}}{(1-\epsilon_{\text{pres}}^2)^{3/2}} \text{Sen}\varphi_{\text{pres}} \right) + \Delta F_{\text{pres}} \left(\frac{L}{D} \right)^2 \frac{(1-a^2)\text{Cos}(\pi+\beta)}{8(1+\epsilon_{\text{pres}}\text{Cos}(\pi+\beta-\varphi_{\text{pres}}))^3} = 0 \quad (4.82)$$

$$F_{\text{dim}} \left(\frac{L}{D} \right)^2 \left(-\frac{4\pi\epsilon_{\text{pres}}^2}{(1-\epsilon_{\text{pres}}^2)^2} \text{Sen}\varphi_{\text{pres}} + \frac{\pi^2\epsilon_{\text{pres}}}{(1-\epsilon_{\text{pres}}^2)^{3/2}} \text{Cos}\varphi_{\text{pres}} \right) + \Delta F_{\text{pres}} \left(\frac{L}{D} \right)^2 \frac{(1-a^2)\text{Sen}(\pi+\beta)}{8(1+\epsilon_{\text{pres}}\text{Cos}(\pi+\beta-\varphi_{\text{pres}}))^3} = 0 \quad (4.83)$$

Estas representan un sistema de dos ecuaciones no lineales con respecto a una excentricidad estacionaria ϵ_{pres} y a un ángulo de equilibrio φ_{pres} . Con estas ecuaciones puede determinarse la posición exacta del rotor en una chumacera corta presurizada.

En este análisis colocaremos el puerto de inyección en una posición horizontal, iniciando con los valores de

$$\begin{aligned} a &= 0 \\ \beta &= 3\pi/2 \end{aligned} \quad (4.84)$$

Es importante reacomodar el sistema de ecuaciones y por conveniencia elegimos la ecuación (4.83) para facilitar el desarrollo, ya que contiene menos términos. Pasando el segundo término al segundo miembro

$$F_{\text{dim}} \left(\frac{L}{D} \right)^2 \left(-\frac{4\pi\epsilon_{\text{pres}}^2}{(1-\epsilon_{\text{pres}}^2)^2} \text{Sen}\varphi_{\text{pres}} + \frac{\pi^2\epsilon_{\text{pres}}}{(1-\epsilon_{\text{pres}}^2)^{3/2}} \text{Cos}\varphi_{\text{pres}} \right) = -\Delta F_{\text{pres}} \left(\frac{L}{D} \right)^2 \frac{(1-a^2)\text{Sen}(\pi+\beta)}{8(1+\epsilon_{\text{pres}}\text{Cos}(\pi+\beta-\varphi_{\text{pres}}))^3} \quad (4.85)$$

Como la posición axial del puerto de inyección es $a = 0$, lo cual significa que el puerto está ubicado a la mitad de la longitud de la chumacera

$$F_{\text{dim}} \left(\frac{L}{D} \right)^2 \left(-\frac{4\pi\epsilon_{\text{pres}}^2}{(1-\epsilon_{\text{pres}}^2)^2} \text{Sen} \varphi_{\text{pres}} + \frac{\pi^2 \epsilon_{\text{pres}}}{(1-\epsilon_{\text{pres}}^2)^{3/2}} \text{Cos} \varphi_{\text{pres}} \right) = -\Delta F_{\text{pres}} \left(\frac{L}{D} \right)^2 \frac{\text{Sen}(\pi + \beta)}{8(1 + \epsilon_{\text{pres}} \text{Cos}(\pi + \beta - \varphi_{\text{pres}}))^3}. \quad (4.86)$$

Simplificando algunos términos del primer miembro:

$$a = \frac{4\pi\epsilon_{\text{pres}}^2}{(1-\epsilon_{\text{pres}}^2)^2}, \quad b = \frac{\pi\epsilon_{\text{pres}}^2}{(1-\epsilon_{\text{pres}}^2)^{3/2}}. \quad (4.87)$$

Sustituyendo (4.87) en (4.86) resulta

$$F_{\text{dim}} \left(\frac{L}{D} \right)^2 (-a \text{Sen} \varphi_{\text{pres}} + b \text{Cos} \varphi_{\text{pres}}) = -\Delta F_{\text{pres}} \left(\frac{L}{D} \right)^2 \frac{\text{Sen}(\pi + \beta)}{8(1 + \epsilon_{\text{pres}} \text{Cos}(\pi + \beta - \varphi_{\text{pres}}))^3}. \quad (4.88)$$

Dividiendo términos semejantes

$$F_{\text{dim}} (-a \text{Sen} \varphi_{\text{pres}} + b \text{Cos} \varphi_{\text{pres}}) = -\Delta F_{\text{pres}} \frac{\text{Sen}(\pi + \beta)}{8(1 + \epsilon_{\text{pres}} \text{Cos}(\pi + \beta - \varphi_{\text{pres}}))^3}. \quad (4.89)$$

De (4.60) sabemos que la presión adimensional es [1]:

$$-\bar{q}_{\text{prt}} = -\frac{\Delta F_{\text{pres}}}{F_{\text{dim}}}, \quad \text{simplificando} \quad C = \frac{\bar{q}_{\text{prt}}}{8}. \quad (4.90)$$

Sustituyendo (4.90) en (4.89)

$$(-a \text{Sen} \varphi_{\text{pres}} + b \text{Cos} \varphi_{\text{pres}}) = -C \frac{\text{Sen}(\pi + \beta)}{(1 + \epsilon_{\text{pres}} \text{Cos}(\pi + \beta - \varphi_{\text{pres}}))^3}. \quad (4.91)$$

Ahora procederemos a simplificar la ecuación (4.82). Se puede observar que el tercer término es igual a cero, ya que $\beta = 3\pi/2$.

Sustituyendo en (4.82)

$$W - F_{\text{dim}} \left(\frac{L}{D} \right)^2 \left(\frac{4\pi\epsilon_{\text{pres}}^2}{(1-\epsilon_{\text{pres}}^2)^2} \text{Cos} \varphi_{\text{pres}} + \frac{\pi^2 \epsilon_{\text{pres}}}{(1-\epsilon_{\text{pres}}^2)^{3/2}} \text{Sen} \varphi_{\text{pres}} \right) = 0. \quad (4.92)$$

Utilizando (4.87), despejando y haciendo para una chumacera corta (L/D) = $\frac{1}{4}$ resulta

$$W = \left(\frac{F_{\text{dim}}}{16} \right) (a \cos \varphi_{\text{pres}} + b \sin \varphi_{\text{pres}}). \quad (4.93)$$

Recordando que el número de Sommerfeld [1], [2], [3] es $S = \frac{W}{F_{\text{dim}}}$, (4.94)

sustituimos (4.94) en (4.93) obteniendo $S = \left(\frac{a \cos \varphi_{\text{pres}} + b \sin \varphi_{\text{pres}}}{16} \right)$. (4.95)

Otra ecuación que requeriremos utilizar en los cálculos es la solución de Ocvirk [1], [2], [3], siendo esta:

$$S_{\text{Ocv}} = \left(\frac{(1 - \varepsilon_{\text{pres}}^2)^2}{\pi \varepsilon_{\text{pres}} \sqrt{16 \varepsilon_{\text{pres}}^2 + \pi^2 (1 - \varepsilon_{\text{pres}}^2)^2}} \right) \left(\frac{D}{L} \right)^2. \quad (4.96)$$

Cálculo del ángulo φ_{pres} por medio del método iterativo para $\beta = \pi/2$.

Por medio del método iterativo, utilizando las expresiones (4.87), (4.90), (4.91), (4.95) y (4.96) podemos determinar la posición del rotor. A continuación se muestra el procedimiento para calcular una columna de las siguientes tablas. Cabe decir que para determinar la posición del rotor ubicando el puerto de inyección en $\beta = \pi/2$, se efectúa un procedimiento similar, pues únicamente se sustituye en las mismas ecuaciones el nuevo valor β ; no así para los otros casos en los que $\beta = \pi/4, 3\pi/4, 5\pi/4$ y $7\pi/4$, puesto que nuestro sistema de ecuaciones sufre algunas sustituciones importantes.

Por otro lado, para efectuar los cálculos, se tuvo que utilizar un programa de manipulación simbólica que fuese fácil de usar. En nuestro caso se eligió el programa Mathematica 8.0, ya que obtiene las raíces de nuestro sistema de ecuaciones muy rápidamente. Por lo anterior procederemos como se muestra a continuación, calculando solamente para el puerto de inyección de lubricante ubicado en $\beta = \pi/2$:

i. Como primer paso se asignan diversos valores adimensionales a la excentricidad ε . En nuestro caso dividimos en 17 veces el valor de “ ε ”, el cual va de 0.1 hasta 0.9 de cinco en cinco centésimas. Además $f_{prt} = 5$, valor que aumentará a 20 y a 100, siendo estas las fuerzas de presión que manejaremos para diversas tablas. El valor inicial del cual partiremos para el número de Sommerfeld es $S = 1$. Ahora, si $\varepsilon = 0.1$, sustituyéndolo en las expresiones (4.87) obtenemos:

$$a = \frac{4\pi\varepsilon^2_{pres}}{(1-\varepsilon^2_{pres})^2}, \quad b = \frac{\pi\varepsilon^2_{pres}}{(1-\varepsilon^2_{pres})^{3/2}}. \quad (4.87)$$

$$a = 0.1282, \quad b = 1.0019$$

ii. Posteriormente calculamos C . Aquí $C = \frac{\bar{q}_{prt}}{8}$. (4.90)

Luego $q_{prt} = \frac{f_{prt}}{S}$, con $f_{prt} = 5$, $S = 1$.

En este análisis, aunque las tablas Khonsari [5] recomiendan $S = 16.2271$ para un valor inicial más aproximado, por análisis propuesto propio tomaremos el valor inicial de $S = 1$, recordando que manejamos cantidades adimensionales. Por otra parte, se elige $f_{prt} = 5$, que es la menor fuerza de presurización que se usa para una chumacera corta [1], con lo que obtenemos:

$$C^0 = 0.625.$$

En este resultado inicial, el superíndice 0 indica que es el valor inicial.

iii. Ahora ingresamos estos valores a la ecuación (4.91) y tomamos $\beta = \pi/2$:

$$\left(-a\text{Sen}\varphi_{pres} + b\text{Cos}\varphi_{pres}\right) = -C \frac{\text{Sen}(\pi + \beta)}{(1 + \varepsilon_{pres}\text{Cos}(\pi + \beta - \varphi_{pres}))^3}. \quad (4.91)$$

Ingresando ésta en el programa Mathematica 8.0, podemos determinar el valor del ángulo φ_{pres} , el cual corresponde a:

$$\varphi_{\frac{\pi}{2}}^0 = 35.065^\circ.$$

Aquí el subíndice del ángulo de “attitude” o equilibrio indica la ubicación del puerto de inyección el cual corresponde a $\beta = \pi/2$ y el superíndice 0 señala que se trata del valor inicial.

iv. Los valores antes calculados para a , b y φ , ahora se sustituyen en la ecuación (4.94) obteniendo el número de Sommerfeld inicial:

$$S = \left(\frac{a \cos \varphi_{pres} + b \sin \varphi_{pres}}{16} \right). \quad (4.95)$$

$$S_{\frac{\pi}{2}}^0 = 23.5111.$$

v. Ahora debemos calcular el valor de S_{Ocv} mediante la ecuación (4.95). Aquí $(L/D)=\frac{1}{4}$, que es el valor para una chumacera corta, y $\varepsilon=0.1$. De este modo resulta:

$$S_{Ocv} = \left(\frac{(1 - \varepsilon_{pres}^2)^2}{\pi \varepsilon_{pres} \sqrt{16 \varepsilon_{pres}^2 + \pi^2 (1 - \varepsilon_{pres}^2)^2}} \right) \left(\frac{D}{L} \right)^2. \quad (4.96)$$

$$S_{Ocv} = 15.8396.$$

vi. Ahora que hemos determinado los valores de S_{Ocv} y $S_{\frac{\pi}{2}}^0$, debemos comparar la diferencia y obtener el porcentaje de variación; así sabremos qué tan exacto es nuestro cálculo. Es importante partir de un valor para llevar a cabo el método iterativo; por ello, utilizando la ecuación (4.96) podemos tener una idea del dato numérico que requeriremos. El proceso iterativo consiste en ir resolviendo y recalculando nuestro sistema de ecuaciones hasta obtener un valor menor a 1%.

$$S_{Ocv} - S_{\frac{\pi}{2}}^0 = 15.8396 - 23.5111 = -7.6715 = 767\%$$

Ahora debemos iterar nuevamente y de esta forma encontrar un resultado más exacto. Esto se lleva a cabo volviendo a resolver el sistema de ecuaciones, sustituyendo los valores obtenidos, así:

vii. Para iterar sabemos que: $C^1 = \frac{5}{8S_{Ocv}} = 0.03946.$

Este nuevo valor determinado para C^1 se sustituye en la ecuación (4.90) e indicando la siguiente iteración se obtiene: $\varphi_{\frac{\pi}{2}}^1 = 79.6526^\circ$.

viii. Posteriormente se procede como en iv y se obtiene: $S_{\frac{\pi}{2}}^1 = 15.8630$.

ix. Nuevamente se compara con el valor ya antes calculado correspondiente a S_{Ocv} .

Así tenemos: $S_{Ocv} - S_{\frac{\pi}{2}}^0 = 15.8396 - 15.8630 = -0.0234 = 2.34\%$

Por el hecho de no cumplir con un valor menor o igual al 1%, es necesario volver a iterar, por lo tanto:

x. Para la segunda iteración tenemos que: $C^2 = \frac{5}{8S_{\frac{\pi}{2}}^1} = 0.03940$.

xi. De igual manera obtenemos el nuevo ángulo $\varphi_{\frac{\pi}{2}}^1$ con la ecuación ya conocida (4.91),

resultando: $\varphi_{\frac{\pi}{2}}^2 = 79.6526^\circ$.

xii. Ahora obtenemos el número de Sommerfeld utilizando (4.95) con $\varphi_{\frac{\pi}{2}}^2$, así:

$$S_{\frac{\pi}{2}}^2 = 15.8630$$

xiii. Comparando a $S_{\frac{\pi}{2}}^2$ con $S_{\frac{\pi}{2}}^1$ tendremos: $S_{\frac{\pi}{2}}^2 - S_{\frac{\pi}{2}}^1 = 15.8630 - 15.8630 = 0 = 0\%$.

Este valor satisface la condición. Finalmente comparamos el valor final de $\varphi_{\frac{\pi}{2}}^2$ con $\varphi_{\frac{\pi}{2}}^1$ para saber la exactitud del cálculo, así:

$$\varphi_{\frac{\pi}{2}}^2 - \varphi_{\frac{\pi}{2}}^1 = 79.6526^\circ - 79.6526^\circ = 0^\circ = 0\%$$

De esta manera se procede a calcular las demás columnas y las posteriores tablas, con su correspondiente aumento de excentricidad ε e incremento de presión f_{prt} , para así ubicar la posición exacta del rotor correspondiente a $\varphi_{\frac{\pi}{2}}^2$. En las tablas 4.7 a 4.12 se muestran los resultados obtenidos para $\beta = \pi/2$ y $\beta = 3\pi/2$.

Tabla 4.7. Puerto de Inyección Lateral Derecho, $L/D = 1/4$, $f_{prt} = 5$, $\beta = \pi/2$.

Valores del ángulo de equilibrio ("attitude") en grados, en función de la excentricidad adimensional para una chumacera corta presurizada en su parte lateral derecha.

ϵ	0.1	0.15	0.20	0.25	0.3	0.35	0.4	0.45	0.5	0.55	0.6	0.65	0.7	0.75	0.8	0.85	0.9
S_{ov}	15.8396	10.2553	7.37916	5.5918	4.3548	3.4381	2.7273	2.1594	1.6967	1.3157	1.0004	0.7402	0.5274	0.3561	0.2221	0.1220	0.0530
$S_{\frac{0}{2}}$	23.5111	12.3861	8.3396	6.1848	4.6650	3.6290	2.8455	2.2313	1.7389	1.3390	1.0124	0.7456	0.5295	0.3568	0.2223	0.1220	0.0530
$S_{\frac{1}{2}}$	15.8630	10.2757	7.3992	5.6572	4.3763	3.4601	2.7491	2.1800	1.7151	1.3310	1.0123	0.7488	0.5330	0.3594	0.2238	0.1227	0.0532
$S_{\frac{2}{2}}$	15.8630	10.2756	7.3991	5.6567	4.3760	3.4598	2.7488	2.1796	1.7148	1.3307	1.0121	0.7487	0.5329	0.3594	0.2238	0.1227	0.0532
-a	0.1282	0.2959	0.5454	0.8193	1.3657	1.9991	2.8495	4.0010	5.5850	7.8135	11.0447	15.9196	23.6737	36.9297	62.0562	117.902	281.960
b	1.0019	1.5318	2.0985	2.7182	3.4108	4.2024	5.1279	6.2361	7.5976	9.3185	11.5659	14.6179	18.9689	25.5796	36.5541	57.3884	107.254
C^0	0.625	0.625	0.625	0.625	0.625	0.625	0.625	0.625	0.625	0.625	0.625	0.625	0.625	0.625	0.625	0.625	0.625
C^1	0.0394	0.0609	0.0846	0.1117	0.1435	0.1817	0.2291	0.2894	0.3683	0.4750	0.6247	0.8443	1.1850	1.7551	2.8140	5.1229	11.7925
C^2	0.0394	0.0608	0.0844	0.1104	0.1428	0.1806	0.2273	0.2866	0.3644	0.4695	0.6174	0.8346	1.1726	1.7390	2.7926	5.0937	11.7481
$\varphi_{\frac{0}{2}}$	35.065	44.96	47.6644	48.9019	47.1659	45.8939	44.3699	42.7369	41.041	39.312	37.5173	35.6322	33.5696	31.2147	28.4072	24.9179	20.4546
$\varphi_{\frac{1}{2}}$	79.6526	75.4815	71.2301	68.2393	62.504	58.0979	53.7205	49.4348	45.2961	41.3231	37.523	33.8847	30.3725	26.9118	23.4225	19.7556	15.6532
$\varphi_{\frac{2}{2}}$	79.6526	75.4872	71.2358	68.2966	62.5338	58.138	53.7721	49.5036	45.3683	41.4005	37.5975	33.9592	30.4355	26.9634	23.4626	19.7785	15.6704
φ_{ov}	82.7078	79.0667	75.4312	71.8017	68.1780	64.5584	60.9396	57.3161	53.6802	50.0203	46.3207	42.5591	38.704	34.7086	30.5002	25.9543	20.8260
ERROR S%	0.0	0.0009	0.001	0.0	0.0	0.008	0.0109	0.0183	0.0174	0.0225	0.0197	0.0133	0.0187	0.0	0.0	0.0	0.0
ERROR f%	0.0	0.0075	0.0080	0.0	0.0	0.0689	0.0959	0.1389	0.1591	0.1869	0.1981	0.2198	0.2069	0.1913	0.1709	0.1157	0.1097

Tabla 4.8. Puerto de Inyección Lateral Derecho, $L/D = 1/4$, $f_{prt} = 20$, $\beta = \pi/2$.

Valores del ángulo de equilibrio ("attitude") en grados, en función de la excentricidad adimensional para una chumacera corta presurizada en su parte lateral derecha.

ϵ	0.1	0.15	0.20	0.25	0.3	0.35	0.4	0.45	0.5	0.55	0.6	0.65	0.7	0.75	0.8	0.85	0.9
S_{Ocv}	15.8396	10.2553	7.3791	5.5918	4.3548	3.4381	2.7273	2.1594	1.6967	1.3157	1.0004	0.7402	0.5274	0.3561	0.2221	0.1220	0.0530
$S_{O\frac{1}{2}}$	23.1430	14.1110	15.3984	15.6354	7.7780	5.1128	3.6249	2.6566	1.9721	1.4644	1.0770	1.2793	0.5428	0.3615	0.2235	0.1222	0.0530
$S_{I\frac{1}{2}}$	16.2030	10.5704	7.6748	5.9341	4.6229	3.6819	2.9398	2.3361	1.8372	1.4220	1.0769	0.7922	0.5604	0.3754	0.2322	0.1264	0.0544
$S_{I\frac{2}{2}}$	16.1864	10.5522	7.6548	5.9034	4.5967	3.6565	2.9171	2.3177	1.8232	1.4121	1.0704	0.7883	0.5582	0.3743	0.2317	0.1262	0.0544
-a	0.1282	0.2959	0.5454	0.8193	1.3657	1.9991	2.8495	4.0010	5.5850	7.8135	11.0447	15.9196	23.6737	36.9297	62.0562	117.902	281.960
b	1.0019	1.5318	2.0985	2.7182	3.4108	4.2024	5.1279	6.2361	7.5976	9.3185	11.5659	14.6179	18.9689	25.5796	36.5541	57.3884	107.254
C^0	2.5	2.5	2.5	2.5	2.5	2.5	2.5	2.5	2.5	2.5	2.5	2.5	2.5	2.5	2.5	2.5	2.5
C^1	0.1578	0.2437	0.3379	0.4470	0.5740	0.7271	0.9166	1.1577	1.4734	1.9001	2.4990	3.3774	4.7402	7.0205	11.2562	20.4918	47.1698
C^2	0.1542	0.2365	0.3257	0.4212	0.5407	0.6789	0.8503	1.0701	1.3607	1.7580	2.3214	3.1557	4.4611	6.6595	10.7666	19.7785	45.9559
$\varphi_{\frac{0}{2}}$	35.9015	35.6838	14.0661	4.3544	12.2269	16.8163	19.7384	21.6922	23.0386	23.9726	24.5913	24.9466	25.0268	24.769	24.0012	22.4141	19.4405
$\varphi_{\frac{1}{2}}$	70.5655	65.0479	59.4787	54.9810	48.5696	43.5906	39.0242	34.8874	31.1345	27.7254	24.5971	21.6865	18.9248	16.2434	13.5562	10.7487	7.6013
$\varphi_{\frac{2}{2}}$	70.8405	65.4490	60.0116	55.9092	49.5093	44.6563	40.1586	36.0161	32.2174	28.7224	25.4852	22.4542	19.5665	16.7647	13.9630	11.0466	7.8036
φ_{Ocv}	82.7078	79.0667	75.4312	71.8017	68.1780	64.5584	60.9396	57.3161	53.6802	50.0203	46.3207	42.5591	38.704	34.7086	30.5002	25.9543	20.8260
ERROR S%	0.1020	0.1724	0.3924	0.5200	0.5699	0.6946	0.7781	0.7938	0.7678	0.7010	0.6072	0.4947	0.3941	0.2938	0.2157	0.1584	0.0
ERROR f%	0.3881	0.6128	0.8879	1.6601	1.8980	2.3864	2.8247	3.1338	3.3612	3.4711	3.4847	3.4189	3.2795	3.1095	2.9134	2.6967	2.5923

Tabla 4.9. Puerto de Inyección Lateral Derecho, $L/D = 1/4$, $f_{prt} = 100$, $\beta = \pi/2$.

Valores del ángulo de equilibrio ("attitude") en grados, en función de la excentricidad adimensional para una chumacera corta presurizada en su parte lateral derecha.

ϵ	0.1	0.15	0.20	0.25	0.3	0.35	0.4	0.45	0.5	0.55	0.6	0.65	0.7	0.75	0.8	0.85	0.9
S_{ov}	15.8396	10.2553	7.3791	5.5918	4.3548	3.4381	2.7273	2.1594	1.6967	1.3157	1.0004	0.7402	0.5274	0.3561	0.2221	0.1220	0.0530
$S_{\frac{n}{2}}$	16.24	13.36	10.30	7.9133	5.96	4.78	3.776	3.133	2.292	1.748	1.223	0.942	0.655	0.4314	0.2622	0.1401	0.0592
:	:	:	:	:	:	:	:	:	:	:	:	:	:	:	:	:	:
$S_{\frac{n}{2}}$	21.85	15.28	10.84	8.3769	6.46	5.09	3.984	3.103	2.393	1.813	1.345	0.970	0.6726	0.4419	0.2681	0.1432	0.0605
-a	0.1282	0.29	0.54	0.81	1.36	1.99	2.849	4.001	5.585	7.813	11.044	15.919	23.673	36.9297	62.0562	117.902	281.960
b	1.0019	1.53	2.09	2.71	3.41	4.20	5.127	6.236	7.597	9.318	11.565	14.617	18.968	25.5796	36.5541	57.388	107.254
C^0	0.572	0.81	1.16	1.5796	1.91	2.43	3.134	4.028	5.227	6.879	9.286	12.873	18.5846	28.2869	46.6242	87.2905	206.612
:	:	:	:	:	:	:	:	:	:	:	:	:	:	:	:	:	:
C^n	0.572	0.82	1.15	1.4922	1.93	2.45	3.137	4.023	5.223	6.894	9.293	12.886	18.5846	28.2869	46.6242	87.2905	206.612
$\varphi_{\frac{n}{2}}$	-69.958	39.17	31.51	28.64	25.21	20.62	17.18	14.152	11.041	8.823	6.531	4.354	2.291	0.3437	-1.5870	-3.5466	-5.6207
:	:	:	:	:	:	:	:	:	:	:	:	:	:	:	:	:	:
$\varphi_{\frac{n}{2}}$	39.173 n=27	31.51 n=7	28.64 n=6	25.5081 n=8	20.62 n=7	17.18 n=5	14.152 n=10	11.401 n=7	8.823 n=6	6.531 n=5	4.354 n=5	2.291 n=5	0.3437 n=6	-1.5870 n=5	-3.5466 n=5	-5.6207 n=5	-7.9583 n=4
φ_{dev}	82.7078	79.0667	75.4312	71.8017	68.1780	64.5584	60.9396	57.3161	53.6802	50.0203	46.3207	42.5591	38.704	34.7086	30.5002	25.9543	20.8260
ERROR S%	0.0	0.98	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.128	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
ERROR f%	0.0	1.25	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.499	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0

Tabla 4.10. Puerto de Inyección Lateral Izquierdo, $L/D = 1/4$, $f_{prt} = 5$, $\beta = 3\pi/2$.

Valores del ángulo de equilibrio ("attitude") en grados, en función de la excentricidad adimensional para una chumacera corta presurizada en su parte lateral izquierda.

ϵ	0.1	0.15	0.20	0.25	0.3	0.35	0.4	0.45	0.5	0.55	0.6	0.65	0.7	0.75	0.8	0.85	0.9
S_{ov}	15.8396	10.2553	7.3791	5.5918	4.3548	3.4381	2.7273	2.1594	1.6967	1.3157	1.0004	0.7402	0.5274	0.3561	0.2221	0.1220	0.0530
$S_{\frac{0}{2\pi}}^0$	17.9825	10.6318	7.4855	5.6725	4.3688	3.4439	2.7298	2.1605	1.6972	1.3159	1.0005	0.7403	0.5274	0.3561	0.2221	0.1220	0.0530
$S_{\frac{1}{2\pi}}^1$	15.8472	10.2590	7.3812	5.6369	4.3556	3.4386	2.7277	2.1596	1.6969	1.3158	1.0005	0.7403	0.5274	0.3561	0.2221	0.1220	0.0530
$S_{\frac{2}{2\pi}}^2$	15.8472	10.2590	7.3812	5.6369	4.3556	3.4386	2.7277	2.1596	1.6969	1.3158	1.0005	0.7403	0.5274	0.3561	0.2221	0.1220	0.0530
-a	0.1282	0.2959	0.5454	0.8193	1.3657	1.9991	2.8495	4.0010	5.5850	7.8135	11.0447	15.9196	23.6737	36.9297	62.0562	117.902	281.960
b	1.0019	1.5318	2.0985	2.7182	3.4108	4.2024	5.1279	6.2361	7.5976	9.3185	11.5659	14.6179	18.9689	25.5796	36.5541	57.3884	107.254
C^0	0.625	0.625	0.625	0.625	0.625	0.625	0.625	0.625	0.625	0.625	0.625	0.625	0.625	0.625	0.625	0.625	0.625
C^1	0.0394	0.0609	0.0846	0.1117	0.1430	0.1817	0.2291	0.2894	0.3683	0.4750	0.6247	0.8443	1.1850	1.7551	2.8140	5.1229	11.7925
C^2	0.0394	0.0609	0.0846	0.1108	0.1434	0.1817	0.2291	0.2894	0.3683	0.4749	0.62478	0.8443	1.1850	1.7551	2.8140	5.1229	11.7925
$\phi_{\frac{0}{2\pi}}^0$	110.959	94.3547	85.0949	79.7557	72.7599	67.8726	63.3749	59.1292	55.0326	51.0276	47.0685	43.1036	39.0929	34.9791	30.6762	26.0581	20.8729
$\phi_{\frac{1}{2\pi}}^1$	84.3852	80.5407	76.742	74.4043	69.2362	65.5349	61.8393	58.1609	54.4826	50.7870	47.0685	43.2984	39.4424	34.9791	31.2892	26.7972	21.7667
$\phi_{\frac{2}{2\pi}}^2$	84.3852	80.5407	76.742	74.3928	69.2419	65.5349	61.8393	58.1609	54.4826	50.7870	47.0685	43.2984	39.4424	34.9791	31.2892	26.7972	21.7667
ϕ_{ov}	82.7078	79.0667	75.4312	71.8017	68.1780	64.5584	60.9396	57.3161	53.6802	50.0203	46.3207	42.5591	38.704	34.7086	30.5002	25.9543	20.8260
ERROR S%	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
ERROR f%	0.0	0.0	0.0	0.0154	0.0082	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0

Tabla 4.11. Puerto de Inyección Lateral Izquierdo, $L/D = 1/4$, $f_{prt} = 20$, $\beta = 3\pi/2$.

Valores del ángulo de equilibrio ("attitude") en grados, en función de la excentricidad adimensional para una chumacera corta presurizada en su parte lateral izquierda.

ϵ	0.1	0.15	0.20	0.25	0.3	0.35	0.4	0.45	0.5	0.55	0.6	0.65	0.7	0.75	0.8	0.85	0.9
S_{ov}	15.8396	10.2553	7.3791	5.5918	4.3548	3.4381	2.7273	2.1594	1.6967	1.3157	1.0004	0.7402	0.5274	0.3561	0.2221	0.1220	0.0530
$S_{\frac{0}{2\pi}}^0$	33.0751	24.4910	10.6089	6.3298	4.5807	3.5265	2.7644	2.1755	1.7038	1.3187	1.0017	0.7408	0.5276	0.3562	0.2221	0.1220	0.0530
$S_{\frac{1}{2\pi}}^1$	15.9506	10.3103	7.4100	5.6546	4.3666	3.4472	2.7326	2.1630	1.6992	1.3175	1.0017	0.7412	0.5280	0.3566	0.2224	0.1222	0.0531
$S_{\frac{2}{2\pi}}^2$	15.9491	10.3096	7.4097	5.6542	4.3665	2.4458	2.7325	2.1630	1.6992	1.3157	1.0017	0.7412	0.5280	0.3566	0.2224	0.1222	0.0531
-a	0.1282	0.2959	0.5454	0.8193	1.3657	1.9991	2.8495	4.0010	5.5850	7.8135	11.0447	15.9196	23.6737	36.9297	62.0562	117.902	281.960
b	1.0019	1.5318	2.0985	2.7182	3.4108	4.2024	5.1279	6.2361	7.5976	9.3185	11.5659	14.6179	18.9689	25.5796	36.5541	57.3884	107.254
C^0	2.5	2.5	2.5	2.5	2.5	2.5	2.5	2.5	2.5	2.5	2.5	2.5	2.5	2.5	2.5	2.5	2.5
C^1	0.1578	0.2437	0.3387	0.4470	0.5740	0.7271	0.9148	1.1577	1.4734	1.9001	2.4990	3.3774	4.7402	7.0205	11.2562	20.4918	47.1698
C^2	0.1567	0.2424	0.3373	0.4421	0.5725	0.7252	0.9064	1.1558	1.4712	1.9001	2.4990	3.3729	4.7348	7.0106	11.241	20.4583	47.0810
$\phi_{\frac{0}{2\pi}}^0$	144.093	144.311	121.3580	100.308	86.2473	77.4123	70.3363	64.2916	58.9001	53.9268	49.2285	44.6964	40.2446	35.7755	31.1976	26.3675	21.0276
$\phi_{\frac{1}{2\pi}}^1$	89.4444	84.9696	80.6495	77.9108	72.3875	68.4054	64.4921	60.6361	56.8145	53.0215	49.2285	45.4184	41.5509	37.5975	33.4894	29.1234	24.3049
$\phi_{\frac{2}{2\pi}}^2$	89.3986	84.9353	80.6266	77.8592	72.3760	68.3940	64.4807	60.6304	56.8088	53.0215	49.2285	45.4126	41.5509	37.5918	33.4837	29.1177	24.2991
ϕ_{ov}	82.7078	79.0667	75.4312	71.8017	68.1780	64.5584	60.9396	57.3161	53.6802	50.0203	46.3207	42.5591	38.704	34.7086	30.5002	25.9543	20.8260
ERROR S%	0.0094	0.0067	0.0040	0.0070	0.0022	0.0406	0.0036	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
ERROR F%	0.0512	0.0403	0.0284	0.0662	0.0158	0.0166	0.0176	0.5681	0.0100	0.0	0.0	0.0127	0.0	0.0151	0.0170	0.0195	0.0238

Tabla 4.12. Puerto de Inyección Lateral Izquierdo, $L/D = 1/4$, $f_{prt} = 100$, $\beta = 3\pi/2$.

Valores del ángulo de equilibrio ("attitude") en grados, en función de la excentricidad adimensional para una chumacera corta presurizada en su parte lateral izquierda.

ϵ	0.1	0.15	0.20	0.25	0.3	0.35	0.4	0.45	0.5	0.55	0.6	0.65	0.7	0.75	0.8	0.85	0.9
S_{ov}	15.83	10.25	7.37	5.59	4.35	3.43	2.72	2.15	1.69	1.31	1.00	0.74	0.52	0.35	0.22	0.12	0.05
S_{ov}^0	17.8306	12.4630	8.6278	6.3080	4.8824	3.7406	2.9283	2.2957	1.7906	1.3809	1.0459	0.7718	0.5490	0.3705	0.2312	0.1273	0.0556
:	:	:	:	:	:	:	:	:	:	:	:	:	:	:	:	:	:
S_{ov}^n	18.4769	11.5696	8.1086	6.0717	4.6221	3.6095	2.8404	2.2335	1.7488	1.3516	1.0254	0.7576	0.5392	0.3640	0.2271	0.1249	0.0544
-a	0.1282	0.2959	0.5454	0.8193	1.3657	1.9991	2.8495	4.001	5.585	7.8135	11.0447	15.9196	23.6737	36.9297	62.0562	117.902	281.960
b	1.0019	1.5318	2.0985	2.7182	3.4108	4.2024	5.1279	6.236	7.5976	9.3185	11.5659	14.6179	18.9689	25.5796	36.5541	57.388	107.254
C^0	0.7010	1.0029	1.4488	1.9816	2.5599	3.3417	4.2686	5.4449	6.9809	9.0520	11.9514	16.1959	22.7687	3.7382	54.0657	98.1932	224.82
:	:	:	:	:	:	:	:	:	:	:	:	:	:	:	:	:	:
C^n	0.6765	1.0804	1.5415	2.0587	2.7044	3.4630	4.4007	5.5915	7.1477	9.2476	12.1914	16.4995	23.1825	34.3407	55.0418	100.08	229.779
$\phi_{\frac{3\pi}{2}}^0$	110.037	113.698	106.639	99.9181	95.0709	87.7599	82.288	77.1545	72.313	67.7007	63.2717	58.9975	54.8321	50.7297	46.656	42.5536	38.3251
:	:	:	:	:	:	:	:	:	:	:	:	:	:	:	:	:	:
$\phi_{\frac{3\pi}{2}}^n$	113.698 n=9	106.639 n=7	99.9181 n=7	95.0709 n=6	87.7599 n=9	82.288 n=5	77.1545 n=8	72.313 n=6	67.7007 n=5	63.2717 n=5	58.9975 n=4	54.8321 n=4	50.7297 n=4	46.656 n=4	42.5536 n=3	38.3251 n=4	33.8332 n=4
ϕ_{ov}	82.7078	79.06	75.43	71.80	68.17	64.55	60.93	57.31	53.68	50.02	46.32	42.55	38.70	34.70	30.50	25.95	20.82
ERROR S%	0.0059	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0035	0.0044	0.0	0.0073	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
ERROR f%	0.0052	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0242	0.0128	0.0	0.0091	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0

4.4 Ubicación de algunas posiciones de equilibrio en un rotor presurizado.

Presurización vertical.

En esta sección se muestran gráficamente algunos resultados que se obtienen a partir de las tablas 4.2, 4.4 y 4.6 dado un número de Sommerfeld, sin olvidar que este número está directamente relacionado con la velocidad de operación. Por lo tanto, en las figuras siguientes se presentarán las posiciones de equilibrio que tiene un rotor trabajando a velocidad constante (Sommerfeld fijo) y sometido a diferentes fuerzas de presurización.

En las figuras 4.14, 4.15, 4.16 y 4.17 aparecen algunos puntos negros y blancos; los cuales representan la posición del rotor al presurizar la chumacera en su parte superior e inferior respectivamente. Esto con la finalidad de compararlos con la inyección clásica cuya posición la determina la estrella.

En estas figuras se aprecia la posición de equilibrio para cada caso; de igual manera permiten ver que a bajas velocidades (números de Sommerfeld pequeños) la presurización superior no produce cambios grandes en la posición de equilibrio, pues los puntos negros permanecen muy cerca entre sí (ver las figuras 4.14 y 4.15). Sin embargo, a altas velocidades, el rotor experimenta valores de excentricidad cada vez mayores respecto a la inyección clásica (ver las figuras 4.16 y 4.17).

Nótese que en estas figuras se pudo observar que la posición de equilibrio se mantuvo en el cuadrante I, pues el valor más grande de la fuerza de presurización fue de 100. Sin embargo, como se determinó en secciones anteriores, cuando la fuerza de inyección es mayor que 128, es de esperarse que el rotor se ubique en el cuadrante III, provocando un incremento considerable de la excentricidad. En la figura 4.18 aparece el comportamiento descrito anteriormente para un número de Sommerfeld fijo. Si la fuerza de presurización es de 128 el muñón debería localizarse en el centro del sistema coordinado; observar que los puntos marcados con los números 6 y 7 corresponden a valores de presurización de 400 y 500 respectivamente.

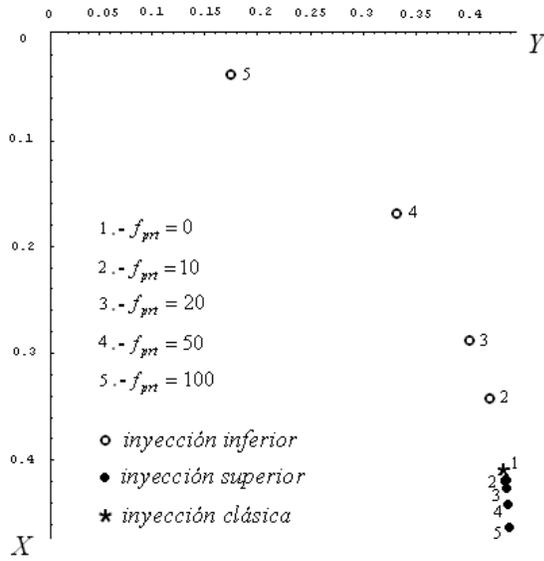


Figura 4.14. Posiciones de equilibrio del rotor cuando se presuriza verticalmente una chumacera corta

$$L/D = 1/4, a = 0, \boxed{S=1}$$

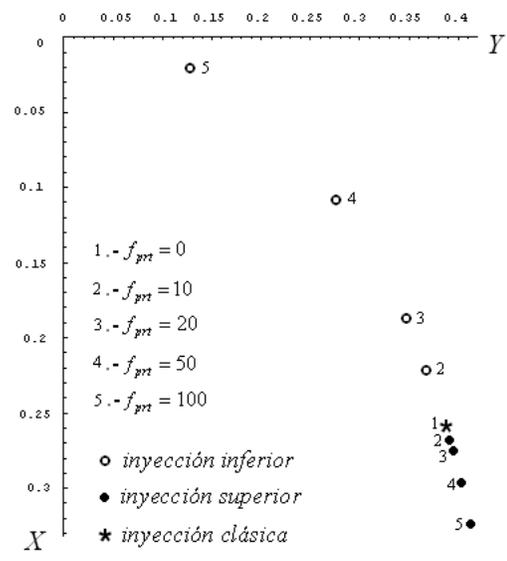


Figura 4.15. Posiciones de equilibrio del rotor cuando se presuriza verticalmente una chumacera corta

$$L/D = 1/4, a = 0, \boxed{S=2}$$

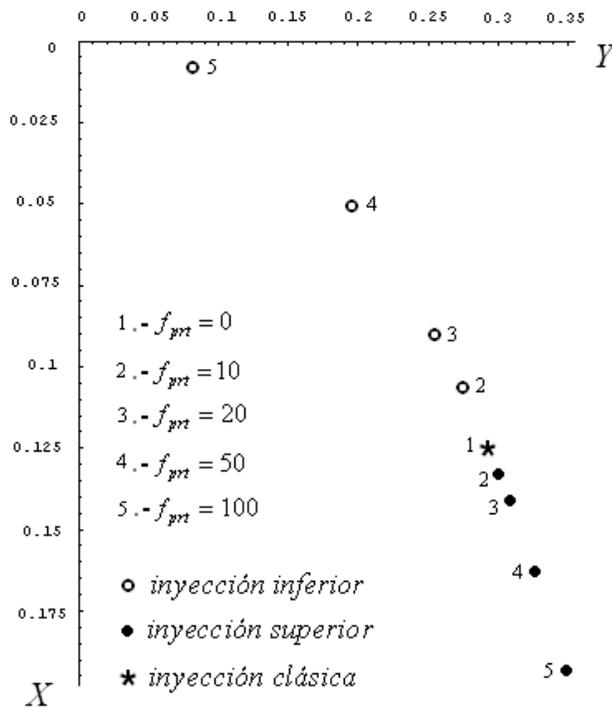


Figura 4.16. Posiciones de equilibrio del rotor cuando se presuriza verticalmente una chumacera corta

$$L/D = 1/4, a = 0, \boxed{S=4}$$

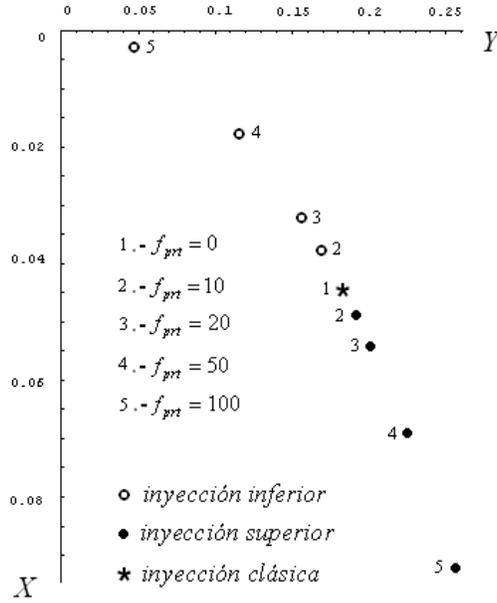


Figura 4.17. Posiciones de equilibrio del rotor cuando se presuriza verticalmente una chumacera corta

$L/D = 1/4, a = 0, [S = 8]$.

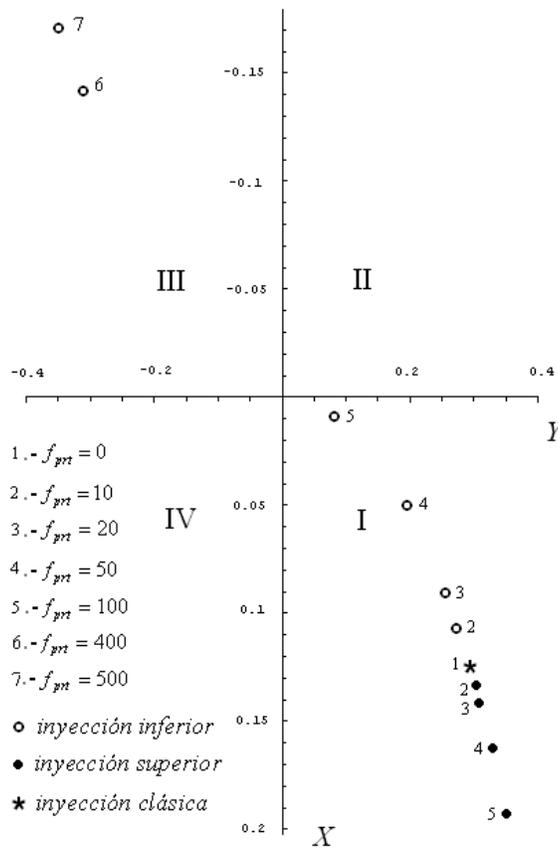


Figura 4.18. Posiciones de equilibrio del rotor, cuando se presuriza verticalmente una chumacera corta hasta valores de fuerza de presurización que exceden el peso del sistema. Nótese los puntos por encima del centro geométrico de la chumacera (en el III cuadrante) $L/D = 1/4, a = 0, [S = 4]$.

Presurización horizontal.

Posición final del rotor para $\beta = \pi/2$

Una vez efectuadas las iteraciones correspondientes, se procede a graficar los ángulos encontrados φ . Para las tablas 4.7 y 4.8 solo se requirió iterar dos veces, siendo así un cálculo rápido; caso contrario a lo que sucedió con la tabla 4.9, en la cual se usó una presión $f_{prt} = 100$. Durante el desarrollo numérico de esta tabla se requirió de un mayor número de iteraciones para encontrar la aproximación establecida que corresponde a un valor menor o igual al 1%, siendo éstas denotadas por el superíndice “n”, el cual indica dicho proceso numérico.

La figura 4.19 incluye los resultados obtenidos en las tres tablas mencionadas. Aquí podemos representar por medio de un punto el desplazamiento final del rotor para tres diferentes presurizaciones, así como la presión inicial de Ocvirk, dependiente de una excentricidad estacionaria ε con respecto al ángulo de equilibrio obtenido φ , correspondiente al puerto de inyección de lubricante ubicado en el extremo lateral derecho, $\beta = \pi/2$.

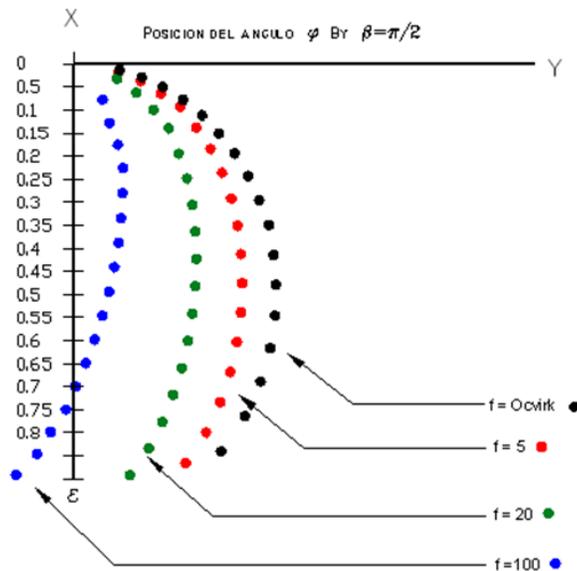


Figura 4.19. Posiciones de equilibrio del rotor con diferentes presurizaciones en una chumacera corta, $(L/D) = 1/4$. La presurización es horizontal y el puerto está a la derecha de la chumacera, $\beta = \pi/2$.

En esta imagen se observa que efectivamente la hipótesis predicha es correcta, ya que al inyectar lubricante en el extremo derecho del rotor por medio de un puerto de

inyección, éste se desplazará en sentido opuesto, hecho que certifica el correcto resultado de las ecuaciones 4.82 y 4.83. Dato importante de mencionar es que a medida que se aumenta la presión el rotor se va desplazando proporcionalmente, circunstancia que no sucede así con los otros puertos. Esto se explicará posteriormente.

Posición final del rotor para $\beta = 3\pi/2$

Para el cálculo de las tablas resultantes 4.10 y 4.11, de igual manera que en el caso anterior, solo se requirió iterar dos veces para encontrar la posición del rotor, resultando siendo así un cálculo fácil, pero al aumentar la presión a $f_{prt} = 100$, los cálculos iterativos resultaron ser más largos (tabla 4.12), aunque para encontrar el primer punto se necesitó de menos iteraciones. En este caso sólo fueron nueve. Podemos deducir que al ir aumentando la presión resulta más difícil calcular la ubicación del rotor.

En la figura 4.20, la cual es la representación de las tablas 4.10, 4.11 y 4.12. Puede observarse que, aunque se han aplicado las mismas presiones para ambos puertos de inyección de lubricante, en el presente caso no hay un movimiento tan notorio, tal vez debido a la velocidad angular, la cual, como ya antes se menciona, es en sentido antihorario, dando como resultado que se aprecie una mayor estabilidad.

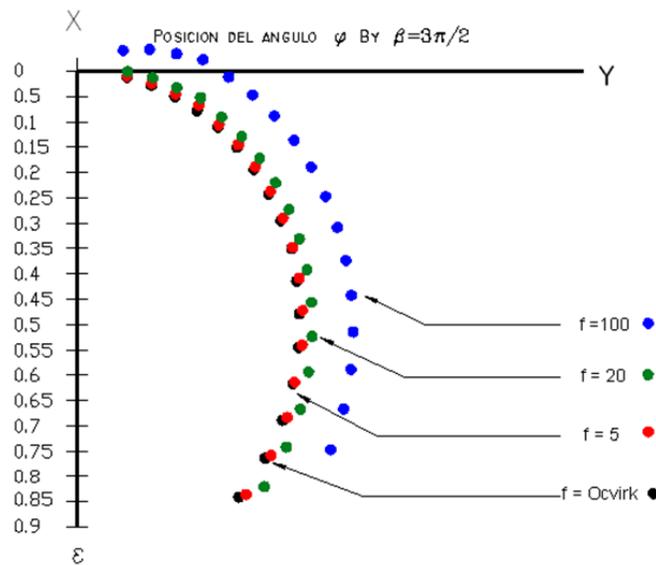


Figura 4.20. Posiciones de equilibrio del rotor con diferentes presurizaciones en una chumacera corta, $(L/D) = 1/4$. La presurización es horizontal y el puerto está a la izquierda de la chumacera, $\beta = 3\pi/2$.

4.5 Resultados.

Ahora que hemos encontrado la ubicación exacta del rotor podemos representar el cambio relativo del ángulo de equilibrio φ , tanto para $\beta = \pi/2$ como para $\beta = 3\pi/2$, usando la expresión 4.97. Es posible construir gráficas con el resultado de los cálculos obtenidos en las tablas 4.9 y 4.12.

$$\Delta\varphi = \frac{\varphi_{Ocv} - \varphi_{\pi/2}^2}{\varphi_{Ocv}} * 100. \tag{4.97}$$

Graficando los resultados para $\beta = \pi/2$ obtenemos la figura 4.21, donde se muestra el cambio relativo del ángulo φ para diferentes presurizaciones, dependiente del ángulo φ_{Ocv} . Cada punto representa las posición relativa del rotor, dependiente de la fuerza de presión, pudiendo observarse un movimiento expresado en porcentaje del ángulo de equilibrio de Ocvirk, correspondiente al eje vertical $\Delta\varphi$. Puede apreciarse en la imagen un desplazamiento significativo a medida que aumentan la presurización y la excentricidad.

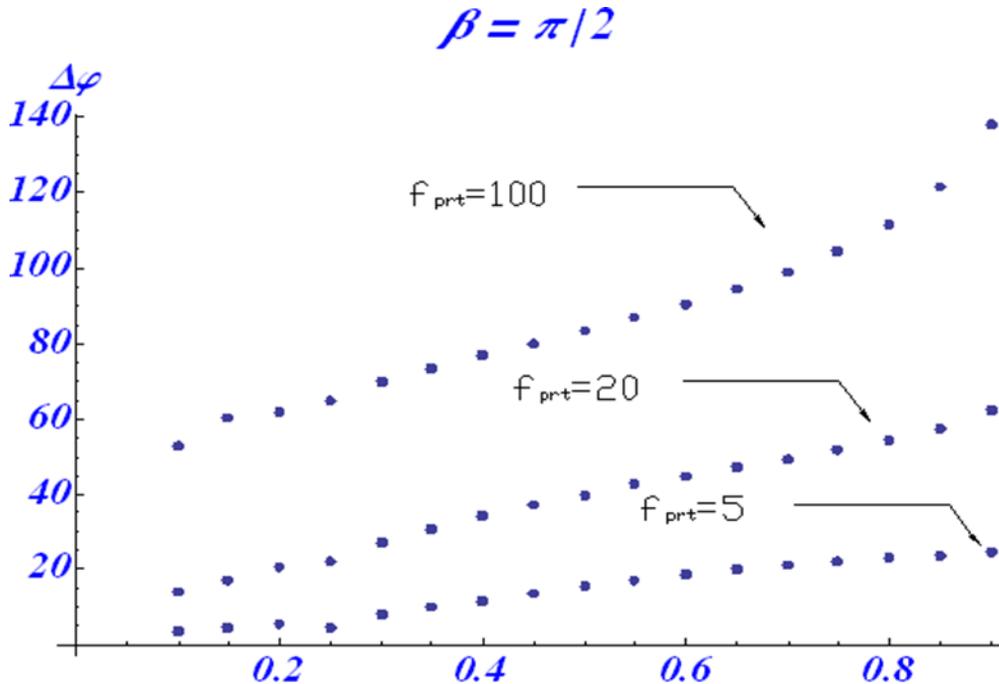


Figura 4.21. Cambio relativo del ángulo de equilibrio del rotor con diferentes presurizaciones en una chumacera corta, $(L/D) = 1/4$. La presurización es horizontal y el puerto está a la derecha de la chumacera, $\beta = \pi/2$.

Para el caso de $\beta = 3\pi/2$, al graficar los resultados obtenemos la figura 4.22, donde también se muestra el cambio relativo del ángulo φ para diferentes presurizaciones, dependiente del ángulo φ_{Ocv} . Ahora puede observarse un cambio relativo menor que para el caso anterior, que a su vez produce unas curvas menos amplias, lo cual nos indica que en este puerto el rotor sufre un movimiento menos brusco, pues como ya se explicó, la figura representa un cambio relativo expresado en porcentaje.

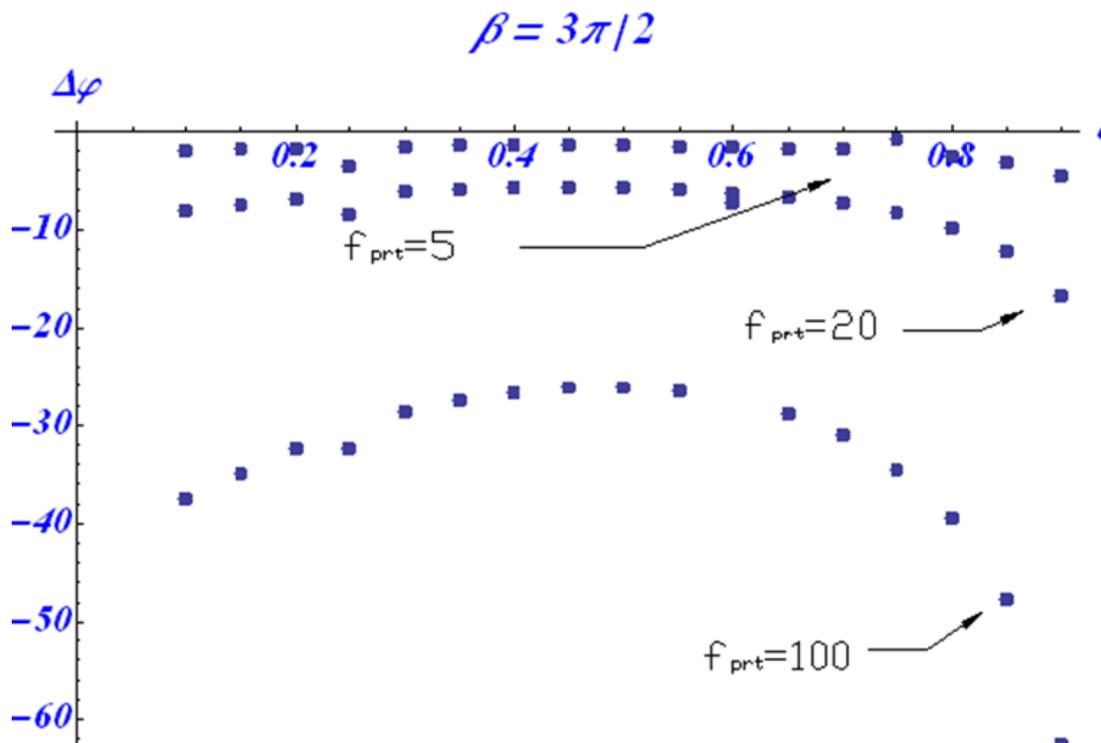


Figura 4.22. Cambio relativo del ángulo de equilibrio del rotor con diferentes presurizaciones en una chumacera corta, $(L/D) = 1/4$. La presurización es horizontal y el puerto está a la izquierda de la chumacera, $\beta = 3\pi/2$.

Nótese que, en la figura 4.20, las curvas representan que el muñón se desplazó menos que en el caso para $\beta = \pi/2$, además de que están desplazadas en sentido opuesto debido a la ubicación del puerto de inyección de lubricante.

Es importante saber que estos datos son de gran importancia, ya que nos dan una medida relativa, expresada en porcentaje, con la cual podemos saber cómo se ha ido desplazando el rotor a medida que se va aumentando la fuerza de presión.

Referencias

- [1] Ocvirk, F. (1952) “*Short Bearing Approximation for Full Journal Bearings*”, NACA TN 20808.
- [2] Schwartz, L. (1950), “*Théorie des Distributions*”, Hermann & Cie, editeurs.
- [3] Arfken (2000), “*Mathematical Methods for Physics*”, Academic Press 5ta Ed.
- [4] Szeri. (1998) “*Fluid Film Lubrication. Theory and Design*”. Cambridge University Press.
- [5] Khonsari, M.M., Booser, E.R. (2001) “*Applied Tribology: Bearing Design and Lubrication*,” John Wiley & Sons.
- [6] Booker, J. (1965) “*A table of the Journal Bearing Integral*”, Journal of Basic Engineering. Pp. 533-535.
- [7] Ramírez, I. Nosov, V. Gómez-Mancilla, J. (2004). “*Campos de presión de lubricante en chumacera híbrida presurizada con anillo y/o línea unidimensional de presurización*”, 8° Congreso Nacional de Ingeniería Electromecánica y de Sistemas IPN. México D.F.
- [8] Nosov, V.R., Gómez Mancilla, J.C., Ramírez Vargas, I. (2006) “*New model and stationary position for a shortjournal bearing with Upper point injection port*”. 7th IFTOMM conference on rotor dynamics. Vienna, Austria, 25- 28 September 2006
- [9] Nosov V., Ramírez Vargas I., Gómez Mancilla J. (2006). “*New model and Stationary Position for a Short Journal Bearings with Point Injection Ports*”. To be published in the Journal of Tribology.
- [10] J. V. Fedor, (1961) “*Journal Bearings with arbitrary Position of Source*”, ASME Trans, Journal of Basic Engineering.
- [11] Childs, D. (1993), “*Turbomachinery Rotordynamics: Phenomena, Modeling, and Analysis*,” John Wiley and Sons, Inc. New York.
- [12] Khonsari, M.M., Booser, E.R. (2001) “*Applied Tribology: Bearing Design and Lubrication*,” John Wiley & Sons.
- [13] Nosov, V.R , Ramírez Vargas, I., Gómez Mancilla, J.C. (2005), “*Uso de Funciones Generalizadas Espaciales en modelos Rotodinámicos Presurizados*” , 1° Congreso Internacional de Matemáticas Aplicadas, México D.F.
- [14] Vance, J., (1988) “*Rotordynamics of Turbomachinery*”, John Wiley and Sons.
- [15] Nosov V. R., and Gómez-Mancilla J. (2004), “*On the appearance of cavitation in Journal bearings*”, Tribology Transactions.

CAPÍTULO 5

Coeficientes dinámicos de rigidez y amortiguamiento

5.1 Introducción

El comportamiento de un rotor está fuertemente influenciado por las características de sus soportes. Las fuerzas que se generan sobre el muñón por la película de lubricante de la chumacera hidrodinámica, son funciones no lineales de la posición y velocidad del centro del eje.

Por tanto, para llevar a cabo el cálculo de las velocidades críticas, las amplitudes de vibración del rotor, así como para examinar su estabilidad contra vibraciones auto-excitadas, es fundamental conocer la respuesta que la película de aceite en la chumacera añade a los desplazamientos y velocidades del muñón [1].

Si los desplazamientos y velocidades del muñón son pequeños, entonces las fuerzas en el lubricante se pueden linealizar alrededor de su posición de equilibrio estático; pero aun así, con esta aproximación, la película del lubricante no se puede simular por un simple sistema elástico disipativo.

Existen términos acoplados de rigidez y amortiguamiento que se necesitan para describir la relación entre el incremento de las fuerzas de la película de aceite y los desplazamientos y velocidades que las causan. En la figura 5.1 se muestra una vista transversal de la chumacera, en la cual aparecen rigideces y amortiguamientos que simulan la conducta dinámica del fluido lubricante.

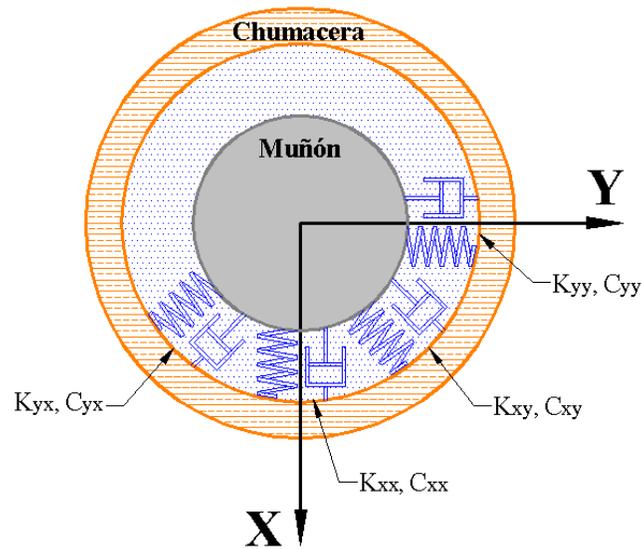


Figura 5.1. Propiedades dinámicas de rigidez y amortiguamiento (coeficientes rotodinámicos) de la película de lubricante en una chumacera hidrodinámica.

Es posible escribir el incremento de las fuerzas de la película de aceite en forma matemática como:

$$\begin{pmatrix} dF_x \\ dF_y \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} k_{xx} & k_{xy} \\ k_{yx} & k_{yy} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} c_{xx} & c_{xy} \\ c_{yx} & c_{yy} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} \quad (5.1)$$

Las ecuaciones de movimiento de un sistema rotor-chumacera contienen coeficientes que corresponden a los de la película del lubricante de las chumaceras (de rigidez y amortiguamiento). Estos parámetros cambian con la velocidad de rotación y por consecuencia también con la adición externa de presión. Es por eso que el comportamiento dinámico siempre es influenciado por los valores que puedan tomar estos coeficientes. En la literatura se encuentra que a medida que la velocidad de operación aumenta, uno de los coeficientes de rigidez puede tomar valores negativos y dependiendo de su magnitud el sistema puede llegar a la inestabilidad. En rotodinámica, a los coeficientes de rigidez y amortiguamiento se les conoce como *coeficientes rotodinámicos* [2].

5.2 Definición clásica de los coeficientes rotodinámicos.

Sea O_B el centro de la chumacera, O_{J_s} representa la posición de equilibrio de la rotación del eje, la excentricidad dimensional es e_0 (o bien ε_0 en forma adimensional) y el ángulo de equilibrio es φ_0 . Las componentes de la fuerza del lubricante a lo largo del sistema de coordenadas radial y tangencial (R, T) son $(F_R)_0$ y $(F_T)_0$. Esto se ilustra en la figura 5.2.

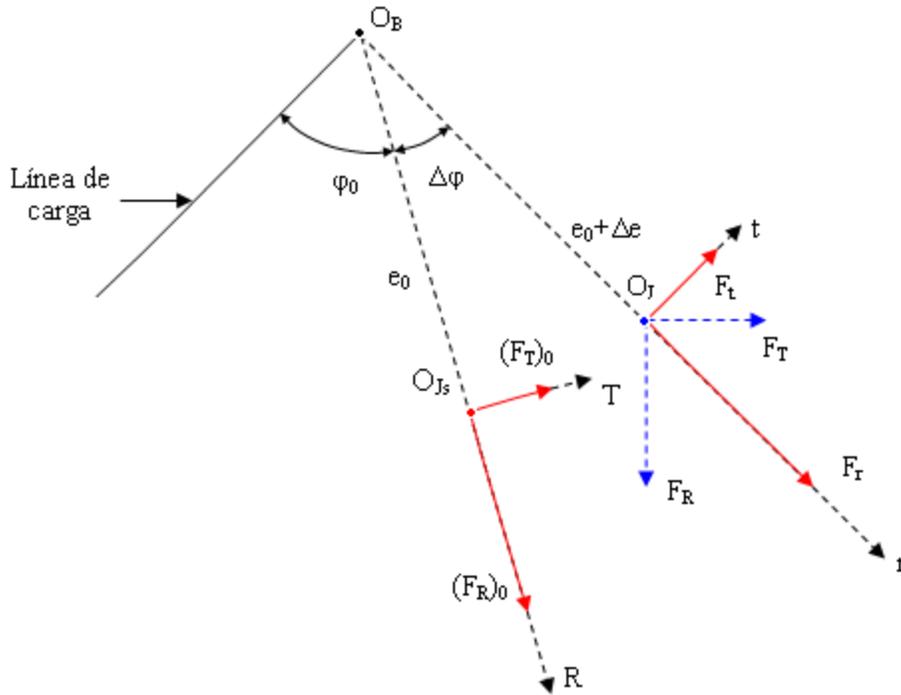


Figura 5.2. Descomposición de fuerzas de la película de lubricante en una chumacera hidrodinámica.

Si hay una pequeña fuerza de desbalance en el muñón, éste orbitará alrededor de la posición de equilibrio estática (e_0, φ_0) . En un instante particular ocupará la posición O_J (un punto genérico sobre la órbita). En O_J la excentricidad es $e = e_0 + \Delta e$, el ángulo de equilibrio es $\varphi = \varphi_0 + \Delta \varphi$ y las velocidades del centro del muñón son \dot{e} y $e\dot{\varphi}$.

La fuerza instantánea de la película del lubricante tiene ahora las componentes F_r y F_t relativas a los ejes coordenados (r, t) . Estas fuerzas instantáneas en O_J pueden ser

obtenidas respecto del sistema de coordenadas (R, T) mediante la aplicación de la matriz de rotación correspondiente:

$$\begin{pmatrix} F_R \\ F_T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\Delta\varphi & -\sin\Delta\varphi \\ \sin\Delta\varphi & \cos\Delta\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_r \\ F_t \end{pmatrix} \quad (5.2)$$

Para pequeños desplazamientos angulares a partir de la posición de equilibrio, es posible asumir $\cos\Delta\varphi \approx 1$ y $\sin\Delta\varphi \approx \Delta\varphi$.

entonces:

$$\begin{pmatrix} F_R \\ F_T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\Delta\varphi \\ \Delta\varphi & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_r \\ F_t \end{pmatrix}, \quad (5.3)$$

o bien

$$\begin{aligned} F_R &= F_r - \Delta\varphi F_t \\ F_T &= \Delta\varphi F_r + F_t \end{aligned} \quad (5.4)$$

Pero el interés está en evaluar las componentes de las fuerzas cuando el muñón pasa de la posición O_{J_s} a la O_J . Entonces el incremento de tales fuerzas está dado por

$$\begin{aligned} \Delta F_R &= F_r - (F_R)_0 \\ \Delta F_T &= F_t - (F_T)_0 \end{aligned} \quad (5.5)$$

Estos incrementos pueden encontrarse sustituyendo (5.4) en (5.5)

$$\begin{aligned} \Delta F_R &= F_r - \Delta\varphi F_t \\ \Delta F_T &= \Delta\varphi F_r + F_t - (F_T)_0 \end{aligned} \quad (5.6)$$

Las funciones escalares F_r y F_t pueden ser expandidas en series de Taylor alrededor de la posición de equilibrio de la manera siguiente:

$$F_r = (F_R)_0 + \left(\frac{\partial F_R}{\partial e}\right)_0 de + \left(\frac{\partial F_R}{\partial \varphi}\right)_0 d\varphi + \left(\frac{\partial F_R}{\partial \dot{e}}\right)_0 d\dot{e} + \left(\frac{\partial F_R}{\partial \dot{\varphi}}\right)_0 d\dot{\varphi} \quad (5.7)$$

$$F_t = (F_T)_0 + \left(\frac{\partial F_T}{\partial e}\right)_0 de + \left(\frac{\partial F_T}{\partial \varphi}\right)_0 d\varphi + \left(\frac{\partial F_T}{\partial \dot{e}}\right)_0 d\dot{e} + \left(\frac{\partial F_T}{\partial \dot{\varphi}}\right)_0 d\dot{\varphi}$$

Nótese que las derivadas son evaluadas en la posición de equilibrio. Sustituyendo (5.7) en (5.6) y despreciando los términos de orden superior por ser muy pequeños:

$$\Delta F_R = \frac{\partial F_R}{\partial e} de + \frac{\partial F_R}{\partial \varphi} d\varphi + \frac{\partial F_R}{\partial \dot{e}} d\dot{e} + \frac{\partial F_R}{\partial \dot{\varphi}} d\dot{\varphi} - \Delta \varphi F_T \quad (5.8)$$

$$\Delta F_T = \Delta \varphi F_R + \frac{\partial F_T}{\partial e} de + \frac{\partial F_T}{\partial \varphi} d\varphi + \frac{\partial F_T}{\partial \dot{e}} d\dot{e} + \frac{\partial F_T}{\partial \dot{\varphi}} d\dot{\varphi}$$

o bien, en forma matricial:

$$\begin{pmatrix} dF_R \\ dF_T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_R}{\partial \varepsilon} & \frac{\partial F_R}{\partial \varphi} - F_T \\ \frac{\partial F_T}{\partial \varepsilon} & \frac{\partial F_T}{\partial \varphi} + F_R \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d\varepsilon \\ d\varphi \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{\partial F_R}{\partial \dot{\varepsilon}} & \frac{\partial F_R}{\partial \dot{\varphi}} \\ \frac{\partial F_T}{\partial \dot{\varepsilon}} & \frac{\partial F_T}{\partial \dot{\varphi}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d\dot{\varepsilon} \\ d\dot{\varphi} \end{pmatrix}. \quad (5.9)$$

Comparando (5.9) y (5.1), se puede decir que se han obtenido las expresiones para los coeficientes rotodinámicos (dimensionales) de rigidez y amortiguamiento (en forma genérica) en las direcciones radial y transversal [2]:

$$\begin{pmatrix} k_{RR} & k_{RT} \\ k_{TR} & k_{TT} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_R}{\partial \varepsilon} & \frac{\partial F_R}{\partial \varphi} - F_T \\ \frac{\partial F_T}{\partial \varepsilon} & \frac{\partial F_T}{\partial \varphi} + F_R \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} c_{RR} & c_{RT} \\ c_{TR} & c_{TT} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_R}{\partial \dot{\varepsilon}} & \frac{\partial F_R}{\partial \dot{\varphi}} \\ \frac{\partial F_T}{\partial \dot{\varepsilon}} & \frac{\partial F_T}{\partial \dot{\varphi}} \end{pmatrix}. \quad (5.10)$$

Para calcular las fuerzas requeridas en (5.10), es necesario ir a la ecuación de Reynolds en estado no estacionario. Del capítulo 3, se reescribe la ecuación (3.1):

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \left(h^3 \frac{\partial p}{\partial \theta} \right) + R^2 \frac{\partial}{\partial z} \left(h^3 \frac{\partial p}{\partial z} \right) = 12 \frac{\mu R^2}{C_r^3} \left[C_r \dot{\varepsilon} \cos \theta + C_r \varepsilon \left(\dot{\varphi} - \frac{\omega}{2} \right) \sin \theta \right].$$

Recordando que para adimensionalizar la ecuación anterior se debe tener en cuenta

$$z = \frac{L}{2} \bar{z}, \quad N = \frac{\omega}{2\pi}, \quad p = \mu N \left(\frac{R}{C_r} \right)^2 \bar{p},$$

bajo condiciones de carga dinámica es apropiado utilizar una adimensionalización adicional para la presión dada por:

$$\hat{p} = \frac{\bar{p}}{\left(1 - \frac{2\dot{\varphi}}{\omega}\right)} \quad (5.11)$$

Usando las sustituciones anteriores se puede escribir

$$\mu N \left(\frac{R}{C_r}\right)^2 \left(1 - \frac{2\dot{\varphi}}{\omega}\right) \left[\frac{\partial}{\partial \theta} \left(h^3 \frac{\partial \hat{p}}{\partial \theta} \right) + \frac{4R^2}{L} \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \left(h^3 \frac{\partial \hat{p}}{\partial \bar{z}} \right) \right] = \frac{12\mu R^2}{C_r^2} \left[\dot{\varepsilon} \text{Cos} \theta + \varepsilon \left(\dot{\varphi} - \frac{\omega}{2} \right) \text{Sen} \theta \right] \quad (5.12a)$$

o bien:

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \left(h^3 \frac{\partial \hat{p}}{\partial \theta} \right) + \left(\frac{D}{L}\right)^2 \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \left(h^3 \frac{\partial \hat{p}}{\partial \bar{z}} \right) = \frac{24\pi}{\omega \left(1 - \frac{2\dot{\varphi}}{\omega}\right)} \left[\dot{\varepsilon} \text{Cos} \theta + \varepsilon \left(\dot{\varphi} - \frac{\omega}{2} \right) \text{Sen} \theta \right] \quad (5.12b)$$

Finalmente, después de simplificar a (5.12b) se obtiene:

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \left(h^3 \frac{\partial \hat{p}}{\partial \theta} \right) + \left(\frac{D}{L}\right)^2 \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \left(h^3 \frac{\partial \hat{p}}{\partial \bar{z}} \right) = -12\pi \varepsilon \text{Sen} \theta + 24\pi \frac{\frac{\dot{\varepsilon}}{\omega}}{\left(1 - \frac{2\dot{\varphi}}{\omega}\right)} \text{Cos} \theta \quad (5.12c)$$

Nótese que la solución de (5.12c) es una función de

$$\hat{p} = \hat{p} \left(\varepsilon, \varphi, \frac{\dot{\varepsilon}}{\omega}, \frac{\dot{\varphi}}{\omega} \right) \quad (5.13)$$

Es posible resolver la ecuación (5.12c) usando las condiciones de Swift-Stiebler [3] para obtener los coeficientes de fuerza. De forma similar como se obtuvo en el capítulo 4, las componentes de fuerza adimensional son:

$$\bar{F}_R = \frac{\frac{F_R}{LD}}{\mu N \left(\frac{R}{C_r} \right)^2} = \left(1 - \frac{2\dot{\varphi}}{\omega} \right) \left(\frac{1}{4} \int_0^1 \int_0^{\theta_2} \hat{p} \cos \theta \, d\theta \, d\bar{z} \right) \quad (5.14)$$

$$\bar{F}_T = \frac{\frac{F_T}{LD}}{\mu N \left(\frac{R}{C_r} \right)^2} = \left(1 - \frac{2\dot{\varphi}}{\omega} \right) \left(\frac{1}{4} \int_0^1 \int_0^{\theta_2} \hat{p} \sin \theta \, d\theta \, d\bar{z} \right). \quad (5.15)$$

Usando la notación: $f_R = \frac{1}{4} \int_0^1 \int_0^{\theta_2} \hat{p} \cos \theta \, d\theta \, d\bar{z}$ (5.16)

$$f_T = \frac{1}{4} \int_0^1 \int_0^{\theta_2} \hat{p} \sin \theta \, d\theta \, d\bar{z}, \quad (5.17)$$

podemos escribir a (5.14) y (5.15) en la forma simbólica siguiente, pues es necesario conocer a la función \hat{p} para integrar a f_R y f_T . Entonces se obtiene:

$$\bar{F}_R = \left(1 - \frac{2\dot{\varphi}}{\omega} \right) f_R \left[\varepsilon, \varphi, \frac{\frac{\dot{\varepsilon}}{\omega}}{\left(1 - \frac{2\dot{\varphi}}{\omega} \right)} \right] \quad (5.18)$$

$$\bar{F}_T = \left(1 - \frac{2\dot{\varphi}}{\omega} \right) f_T \left[\varepsilon, \varphi, \frac{\frac{\dot{\varepsilon}}{\omega}}{\left(1 - \frac{2\dot{\varphi}}{\omega} \right)} \right]. \quad (5.19)$$

Se observa que (5.10) necesita las derivadas parciales de (5.18) y (5.19), que se pueden determinar de la forma siguiente:

$$\text{Para } \bar{F}_R, \text{ de (5.18): } \quad \frac{\partial \bar{F}_R}{\partial \varepsilon} = \left(1 - \frac{2\dot{\varphi}}{\omega}\right) \frac{\partial f_R}{\partial \varepsilon} \quad (5.20)$$

$$\frac{\partial \bar{F}_R}{\partial \varphi} = \left(1 - \frac{2\dot{\varphi}}{\omega}\right) \frac{\partial f_R}{\partial \varphi} \quad (5.21)$$

$$\frac{\partial \bar{F}_R}{\partial \left(\frac{\dot{\varepsilon}}{\omega}\right)} = \left(1 - \frac{2\dot{\varphi}}{\omega}\right) \frac{\partial f_R}{\partial \left(\frac{\dot{\varepsilon}}{\omega}\right)} \cdot \frac{1}{\left(1 - \frac{2\dot{\varphi}}{\omega}\right)} \quad (5.22)$$

$$\frac{\partial \bar{F}_R}{\partial \left(\frac{\dot{\varphi}}{\omega}\right)} = -2f_R + \left(1 - \frac{2\dot{\varphi}}{\omega}\right) \frac{\partial f_R}{\partial \left(\frac{\dot{\varepsilon}}{\omega}\right)} \cdot \frac{\left(2\frac{\dot{\varepsilon}}{\omega}\right)}{\left(1 - \frac{2\dot{\varphi}}{\omega}\right)} \quad (5.23)$$

Para obtener la ecuación (5.22) es necesario tener en cuenta que

$$\frac{\partial \left(\frac{\dot{\varepsilon}}{\omega}\right)}{\partial \left(\frac{2\dot{\varphi}}{\omega}\right)} = \frac{1}{1 - \frac{2\dot{\varphi}}{\omega}} \frac{\partial \left(\frac{\dot{\varepsilon}}{\omega}\right)}{\partial \left(\frac{\dot{\varepsilon}}{\omega}\right)}, \quad (5.22a)$$

$$\text{donde } \quad \frac{\partial \left(\frac{\dot{\varepsilon}}{\omega}\right)}{\partial \left(\frac{\dot{\varphi}}{\omega}\right)} = \left(1 - \frac{2\dot{\varphi}}{\omega}\right) \frac{\partial \left(\frac{\dot{\varepsilon}}{\omega}\right)}{\partial \left(\frac{2\dot{\varphi}}{\omega}\right)}. \quad (5.22b)$$

Ahora, para obtener la ecuación (5.23), se observa que

$$\frac{\partial \left(\frac{\dot{\varepsilon}}{\omega} \right)}{\partial \left(\frac{\dot{\varphi}}{\omega} \right)} = \frac{\dot{\varepsilon}}{\omega} \left[\frac{2}{\left(1 - \frac{2\dot{\varphi}}{\omega} \right)^2} \right] \frac{\partial \left(\frac{\dot{\varphi}}{\omega} \right)}{\partial \left(\frac{\dot{\varphi}}{\omega} \right)}, \quad (5.23a)$$

donde

$$\frac{\partial \left(\frac{\dot{\varphi}}{\omega} \right)}{\partial \left(\frac{\dot{\varphi}}{\omega} \right)} = \frac{\partial \left(\frac{\dot{\varepsilon}}{\omega} \right) \left(1 - \frac{2\dot{\varphi}}{\omega} \right)^2}{\left(1 - \frac{2\dot{\varphi}}{\omega} \right) \frac{\omega}{2\dot{\varepsilon}}}. \quad (5.23b)$$

El cálculo de las derivadas parciales de (5.19) se muestra a continuación:

Para \bar{F}_T , de (5.19):

$$\frac{\partial \bar{F}_T}{\partial \varepsilon} = \left(1 - \frac{2\dot{\varphi}}{\omega} \right) \frac{\partial f_T}{\partial \varepsilon} \quad (5.24)$$

$$\frac{\partial \bar{F}_T}{\partial \varphi} = \left(1 - \frac{2\dot{\varphi}}{\omega} \right) \frac{\partial f_T}{\partial \varphi} \quad (5.25)$$

$$\frac{\partial \bar{F}_T}{\partial \left(\frac{\dot{\varepsilon}}{\omega} \right)} = \left(1 - \frac{2\dot{\varphi}}{\omega} \right) \frac{\partial f_T}{\partial \left(\frac{\dot{\varepsilon}}{\omega} \right)} \cdot \frac{1}{\left(1 - \frac{2\dot{\varphi}}{\omega} \right)} \quad (5.26)$$

$$\frac{\partial \bar{F}_T}{\partial \left(\frac{\dot{\varphi}}{\omega} \right)} = -2f_T + \left(1 - \frac{2\dot{\varphi}}{\omega} \right) \frac{\partial f_T}{\partial \left(\frac{\dot{\varphi}}{\omega} \right)} \cdot \frac{\left(\frac{2\dot{\varepsilon}}{\omega} \right)}{\left(1 - \frac{2\dot{\varphi}}{\omega} \right)}. \quad (5.27)$$

Haciendo uso de las expresiones anteriores (5.20) a (5.27) y evaluando alrededor de la posición de equilibrio $\varepsilon = \varepsilon_0$, $\varphi = \varphi_0$, $\dot{\varepsilon} = 0$ y $\dot{\varphi} = 0$, se puede escribir (5.9) en forma adimensional como:

$$\begin{pmatrix} d\bar{F}_R \\ d\bar{F}_T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_R}{\partial \varepsilon} & \frac{\partial f_R}{\partial \varphi} - \frac{f_T}{\varepsilon} \\ \frac{\partial f_T}{\partial \varepsilon} & \frac{\partial f_T}{\partial \varphi} + \frac{f_R}{\varepsilon} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d\varepsilon \\ \varepsilon d\varphi \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\partial f_R}{\partial \left(\frac{\dot{\varepsilon}}{\omega}\right)} & -\frac{2f_R}{\varepsilon} \\ \frac{\partial f_T}{\partial \left(\frac{\dot{\varepsilon}}{\omega}\right)} & -\frac{2f_T}{\varepsilon} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d\left(\frac{\dot{\varepsilon}}{\omega}\right) \\ \varepsilon d\left(\frac{\dot{\varphi}}{\omega}\right) \end{bmatrix}. \quad (5.28)$$

La primera matriz del segundo miembro en (5.28) representa la respuesta de la película de aceite al desplazamiento del muñón y es llamada la *matriz de rigidez adimensional* \bar{K} [2]. La segunda matriz del segundo miembro describe la respuesta a las velocidades $(\dot{\varepsilon}/\omega)$ y $\varepsilon(\dot{\varphi}/\omega)$ y se conoce como la *matriz de amortiguamiento adimensional* \bar{C} [2]. Estas matrices se muestran a continuación:

$$\bar{K} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_R}{\partial \varepsilon} & \frac{\partial f_R}{\partial \varphi} - \frac{f_T}{\varepsilon} \\ \frac{\partial f_T}{\partial \varepsilon} & \frac{\partial f_T}{\partial \varphi} + \frac{f_R}{\varepsilon} \end{pmatrix} \quad (5.29)$$

$$\bar{C} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_R}{\partial \left(\frac{\dot{\varepsilon}}{\omega_J}\right)} & -\frac{2f_R}{\varepsilon} \\ \frac{\partial f_T}{\partial \left(\frac{\dot{\varepsilon}}{\omega_J}\right)} & -\frac{2f_T}{\varepsilon} \end{pmatrix}. \quad (5.30)$$

Las matrices adimensionales \bar{K} y \bar{C} se relacionan con las matrices de rigidez y de amortiguamiento K y C , por medio de:

$$\bar{K} = \frac{C_r}{LDN\mu \left(\frac{R}{C_r}\right)^2} K \quad (5.31)$$

$$\bar{C} = \frac{C_r \omega}{LDN\mu \left(\frac{R}{C_r}\right)^2} C \quad (5.32)$$

Obsérvese que las matrices K y C tienen dimensiones de *fuerza/longitud* y *fuerza/velocidad*, respectivamente, por lo que es conveniente expresar los coeficientes rotodinámicos en la forma adimensional:

$$\bar{\bar{K}} = \frac{C_r}{W} K, \quad \bar{\bar{C}} = \frac{\omega C_r}{W} C, \quad (5.33)$$

donde W es la carga externa sobre el muñón. Sustituyendo (5.33) en (5.31) y (5.32) se puede obtener $\bar{\bar{K}} = S\bar{K}$, $\bar{\bar{C}} = S\bar{C}$, (5.34)

donde S es el número de Sommerfeld.

Para finalizar, es conveniente expresar a los coeficientes rotodinámicos en el sistema coordinado (X, Y) , que se relaciona con el sistema (R, T) mediante la matriz de rotación $[Q]$ como se muestra a continuación:

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}}_{[Q]} \begin{pmatrix} R \\ T \end{pmatrix}. \quad (5.35)$$

Por tanto, los coeficientes adimensionales se pueden calcular en el sistema (X, Y) a través de $[Q]$, realizando las siguientes operaciones matriciales:

$$\begin{aligned} \tilde{K} &= -[Q] [\bar{\bar{K}}] [Q]^T \\ \tilde{C} &= -[Q] [\bar{\bar{C}}] [Q]^T \end{aligned} \quad (5.36)$$

5.3 Coeficientes rotodinámicos de una chumacera corta no presurizada.

Una vez desarrollada la teoría clásica de los coeficientes rotodinámicos, es posible determinarlos para cualquier chumacera hidrodinámica en la cual se conozca el campo de presión en la película del lubricante. En forma particular para una chumacera corta, la ecuación de Reynolds en estado no estacionario puede encontrarse a partir de (5.12c); esto es:

$$\left(\frac{D}{L}\right)^2 \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \left[h^3(\theta) \frac{\partial \hat{p}}{\partial \bar{z}} \right] = -12\pi \varepsilon \text{Sen} \theta + 24\pi \frac{\frac{\dot{\varepsilon}}{\omega}}{\left(1 - \frac{2\dot{\varphi}}{\omega}\right)} \text{Cos} \theta \quad (5.37)$$

*Ecuación de Reynolds para una chumacera corta en caso general
en donde el muñón no está en equilibrio; $\dot{\varepsilon} \neq 0, \dot{\varphi} \neq 0$*

La solución de (5.37) es de la forma (ver ecuaciones 3.6 y 3.7 capítulo 3):

$$\left(\frac{D}{L}\right)^2 \hat{p} = \frac{6\pi(1 - \bar{z}^2)}{(1 + \varepsilon \text{Cos} \theta)^3} \left[\varepsilon \text{Sen} \theta - 2 \frac{\frac{\dot{\varepsilon}}{\omega}}{\left(1 - \frac{2\dot{\varphi}}{\omega}\right)} \text{Cos} \theta \right], \quad (5.38)$$

sustituyendo (5.38) en (5.16) y (5.17):

$$f_R = \frac{1}{4} \int_{-1}^1 \int_0^\pi \frac{6\pi(1 - \bar{z}^2)}{(1 + \varepsilon \text{Cos} \theta)^3} \left[\varepsilon \text{Sen} \theta - 2 \frac{\frac{\dot{\varepsilon}}{\omega}}{\left(1 - \frac{2\dot{\varphi}}{\omega}\right)} \text{Cos} \theta \right] \cdot \text{Cos} \theta d\theta d\bar{z} \cdot \left(\frac{L}{D}\right)^2 \quad (5.39)$$

$$f_T = \frac{1}{4} \int_{-1}^1 \int_0^\pi \frac{6\pi(1 - \bar{z}^2)}{(1 + \varepsilon \text{Cos} \theta)^3} \left[\varepsilon \text{Sen} \theta - 2 \frac{\frac{\dot{\varepsilon}}{\omega}}{\left(1 - \frac{2\dot{\varphi}}{\omega}\right)} \text{Cos} \theta \right] \cdot \text{Sen} \theta d\theta d\bar{z} \cdot \left(\frac{L}{D}\right)^2 \quad (5.40)$$

Para integrar (5.39) y (5.40) se emplea la sustitución de Sommerfeld, obteniendo:

$$f_R = \left(\frac{L}{D}\right)^2 \left[\frac{-4\pi\varepsilon^2}{(1-\varepsilon^2)^2} - \frac{2\pi^2(1+2\varepsilon^2)}{(1-\varepsilon^2)^{5/2}} \cdot \frac{\frac{\dot{\varepsilon}}{\omega}}{\left(1 - \frac{2\dot{\varphi}}{\omega}\right)} \right] \quad (5.41)$$

$$f_T = \left(\frac{L}{D}\right)^2 \left[\frac{\pi^2\varepsilon}{(1-\varepsilon^2)^{3/2}} + \frac{8\pi\varepsilon}{(1-\varepsilon^2)^2} \cdot \frac{\frac{\dot{\varepsilon}}{\omega}}{\left(1 - \frac{2\dot{\varphi}}{\omega}\right)} \right] \quad (5.42)$$

Fuerzas adimensionales radiales y transversales para una chumacera corta.

Caso general $\dot{\varepsilon} \neq 0, \dot{\varphi} \neq 0$

La determinación de los coeficientes rotodinámicos en las direcciones radial y transversal respectivamente, puede llevarse a cabo sustituyendo (5.41) y (5.42) en (5.29) y (5.30).

En la tabla 5.1 se muestran los coeficientes de rigidez y amortiguamiento obtenidos [4], [5].

Tabla 5.1. Coeficientes de rigidez y amortiguamiento de una chumacera corta (caso clásico) en el sistema de coordenadas R-T.

$\bar{K}_{RR} = -\frac{8\pi(1+\varepsilon^2)\varepsilon}{(1-\varepsilon^2)^3} \left(\frac{L}{D}\right)^2$	$\bar{C}_{RR} = \frac{-2\pi^2(1+2\varepsilon^2)}{(1-\varepsilon^2)^{5/2}} \left(\frac{L}{D}\right)^2$
$\bar{K}_{RT} = \frac{-\pi^2}{(1-\varepsilon^2)^{3/2}} \left(\frac{L}{D}\right)^2$	$\bar{C}_{RT} = \frac{8\pi\varepsilon}{(1-\varepsilon^2)^2} \left(\frac{L}{D}\right)^2$
$\bar{K}_{TR} = \frac{\pi^2(1+2\varepsilon^2)}{(1-\varepsilon^2)^{5/2}} \left(\frac{L}{D}\right)^2$	$\bar{C}_{TR} = \frac{8\pi\varepsilon}{(1-\varepsilon^2)^2} \left(\frac{L}{D}\right)^2$
$\bar{K}_{TT} = \frac{-4\pi\varepsilon}{(1-\varepsilon^2)^2} \left(\frac{L}{D}\right)^2$	$\bar{C}_{TT} = \frac{-2\pi^2}{(1-\varepsilon^2)^{5/2}} \left(\frac{L}{D}\right)^2$

Es importante observar que se puede suprimir el término $(L/D)^2$ que aparece en los coeficientes de la tabla 5.1 si se toma en cuenta (5.34), donde el número de Sommerfeld para una chumacera corta puede expresarse como:

$$S = \left(\frac{D}{L}\right)^2 \frac{(1-\varepsilon^2)^2}{\varepsilon\pi\sqrt{16\varepsilon^2 + \pi^2(1-\varepsilon^2)}} \quad (5.43)$$

Entonces, de (5.34),(5.35) y (5.36) se pueden determinar los coeficientes rotodinámicos respecto al sistema de coordenadas (x, y) . En la tabla 5.2 se muestran los coeficientes obtenidos [4], [5].

Tabla 5.2. Coeficientes de rigidez y amortiguamiento de una chumacera corta (caso clásico) en el sistema de coordenadas x-y.

$\tilde{k}_{xx} = \frac{4[\pi^2 + (32 + \pi^2)\varepsilon^2 + 2(16 - \pi^2)\varepsilon^4]}{(1 - \varepsilon^2)[\pi^2 + (16 - \pi^2)\varepsilon^2]^{3/2}}$	$\tilde{c}_{xx} = \frac{2\pi[\pi^2 + 2(24 - \pi^2)\varepsilon^2 + \pi^2\varepsilon^4]}{\varepsilon\sqrt{1 - \varepsilon^2}[\pi^2 + (16 - \pi^2)\varepsilon^2]^{3/2}}$
$\tilde{k}_{xy} = \frac{\pi[\pi^2 + (32 + \pi^2)\varepsilon^2 + 2(16 - \pi^2)\varepsilon^4]}{\varepsilon\sqrt{1 - \varepsilon^2}[\pi^2 + (16 - \pi^2)\varepsilon^2]^{3/2}}$	$\tilde{c}_{xy} = \frac{8[\pi^2 + 2(\pi^2 - 8)\varepsilon^2]}{[\pi^2 + (16 - \pi^2)\varepsilon^2]^{3/2}}$
$\tilde{k}_{yx} = \frac{\pi[-\pi^2 + 2\pi^2\varepsilon^2 + (16 - \pi^2)\varepsilon^4]}{\varepsilon\sqrt{1 - \varepsilon^2}[\pi^2 + (16 - \pi^2)\varepsilon^2]^{3/2}}$	$\tilde{c}_{yx} = \frac{8[\pi^2 + 2(\pi^2 - 8)\varepsilon^2]}{[\pi^2 + (16 - \pi^2)\varepsilon^2]^{3/2}}$
$\tilde{k}_{yy} = \frac{4[2\pi^2 + (16 - \pi^2)\varepsilon^2]}{[\pi^2 + (16 - \pi^2)\varepsilon^2]^{3/2}}$	$\tilde{c}_{yy} = \frac{2\pi(1 - \varepsilon^2)^{1/2}[\pi^2 + 2(\pi^2 - 8)\varepsilon^2]}{\varepsilon[\pi^2 + (16 - \pi^2)\varepsilon^2]^{3/2}}$

A continuación se muestra la manera detallada como se obtienen los coeficientes de la tabla 5.2.

5.4 Cálculo de los coeficientes rotodinámicos de rigidez y amortiguamiento de una chumacera corta en el sistema de coordenadas xy . Caso clásico.

Coeficientes de rigidez.

Los coeficientes de rigidez en la dirección radial y transversal de una chumacera corta están dados por:

$$\bar{K}_{RR} = -\frac{8\pi(1+\varepsilon^2)\varepsilon}{(1-\varepsilon^2)^3} \left(\frac{L}{D}\right)^2 \quad (5.44)$$

$$\bar{K}_{RT} = \frac{-\pi^2}{(1-\varepsilon^2)^{3/2}} \left(\frac{L}{D}\right)^2 \quad (5.45)$$

$$\bar{K}_{TR} = \frac{\pi^2(1+2\varepsilon^2)}{(1-\varepsilon^2)^{5/2}} \left(\frac{L}{D}\right)^2 \quad (5.46)$$

$$\bar{K}_{TT} = \frac{-4\pi\varepsilon}{(1-\varepsilon^2)^2} \left(\frac{L}{D}\right)^2. \quad (5.47)$$

Recordando que el número de Sommerfeld para chumaceras cortas puede definirse como

$$S = \left(\frac{D}{L}\right)^2 \frac{(1-\varepsilon^2)^2}{\varepsilon\pi\sqrt{16\varepsilon^2 + \pi^2(1-\varepsilon^2)}}, \quad (5.48)$$

es posible suprimir el término $(L/D)^2$ de las rigideces anteriores multiplicando cada una por el número de Sommerfeld, para obtener:

$$\bar{\bar{K}}_{RR} = S\bar{K}_{RR} \quad (5.49)$$

$$\bar{\bar{K}}_{RT} = S\bar{K}_{RT} \quad (5.50)$$

$$\bar{\bar{K}}_{TR} = S\bar{K}_{TR} \quad (5.51)$$

$$\bar{\bar{K}}_{TT} = S\bar{K}_{TT} \quad (5.52)$$

entonces:

$$\bar{\bar{K}}_{RR} = \frac{-8(1 + \varepsilon^2)}{(1 - \varepsilon^2)\sqrt{16\varepsilon^2 + \pi^2(1 - \varepsilon^2)}} \quad (5.53)$$

$$\bar{\bar{K}}_{RT} = \frac{-\pi\sqrt{1 - \varepsilon^2}}{\varepsilon\sqrt{16\varepsilon^2 + \pi^2(1 - \varepsilon^2)}} \quad (5.54)$$

$$\bar{\bar{K}}_{TR} = \frac{\pi(1 + 2\varepsilon^2)}{\sqrt{1 - \varepsilon^2}\varepsilon\sqrt{16\varepsilon^2 + \pi^2(1 - \varepsilon^2)}} \quad (5.55)$$

$$\bar{\bar{K}}_{TT} = \frac{-4}{\sqrt{16\varepsilon^2 + \pi^2(1 - \varepsilon^2)}} \quad (5.56)$$

En el sistema (x,y) , la matriz de rigidez está definida como:

$$\tilde{K} = -[Q]\bar{\bar{K}}[Q]^T \quad , \quad (5.57)$$

donde [Q] es la matriz de rotación dada por:

$$[Q] = \begin{bmatrix} \text{Cos } \varphi & -\text{Sen } \varphi \\ \text{Sen } \varphi & \text{Cos } \varphi \end{bmatrix} \quad (5.58)$$

Asimismo, recordando que las funciones trigonométricas que aparecen en (5.58) pueden escribirse como

$$\text{Sen } \varphi = \frac{\pi\sqrt{1 - \varepsilon^2}}{\sqrt{16\varepsilon^2 + \pi^2(1 - \varepsilon^2)}} \quad (5.59)$$

$$\text{Cos } \varphi = \frac{4\varepsilon}{\sqrt{16\varepsilon^2 + \pi^2(1 - \varepsilon^2)}} \quad , \quad (5.60)$$

se sustituyen (5.58), (5.59) y (5.60) en (5.57) para obtener:

$$[\tilde{K}] = - \begin{bmatrix} \text{Cos } \varphi & -\text{Sen } \varphi \\ \text{Sen } \varphi & \text{Cos } \varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\bar{K}}_{RR} & \bar{\bar{K}}_{RT} \\ \bar{\bar{K}}_{TR} & \bar{\bar{K}}_{TT} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \text{Cos } \varphi & \text{Sen } \varphi \\ -\text{Sen } \varphi & \text{Cos } \varphi \end{bmatrix} \quad (5.61)$$

El producto de las primeras dos matrices del segundo miembro, multiplicadas de derecha a izquierda, se puede escribir como:

$$[\bar{K}][Q]^T = \begin{pmatrix} \frac{-8(1+\varepsilon^2)}{(1-\varepsilon^2)\sqrt{16\varepsilon^2+\pi^2(1-\varepsilon^2)}} & \frac{-\pi\sqrt{1-\varepsilon^2}}{\varepsilon\sqrt{16\varepsilon^2+\pi^2(1-\varepsilon^2)}} \\ \frac{\pi(1+2\varepsilon^2)}{\varepsilon\sqrt{1-\varepsilon^2}\sqrt{16\varepsilon^2+\pi^2(1-\varepsilon^2)}} & \frac{-4}{\sqrt{16\varepsilon^2+\pi^2(1-\varepsilon^2)}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{4\varepsilon}{\sqrt{16\varepsilon^2+\pi^2(1-\varepsilon^2)}} & \frac{\pi\sqrt{1-\varepsilon^2}}{\sqrt{16\varepsilon^2+\pi^2(1-\varepsilon^2)}} \\ \frac{-\pi\sqrt{1-\varepsilon^2}}{\sqrt{16\varepsilon^2+\pi^2(1-\varepsilon^2)}} & \frac{4\varepsilon}{\sqrt{16\varepsilon^2+\pi^2(1-\varepsilon^2)}} \end{pmatrix}$$

o bien:

$$[\bar{K}][Q]^T = \begin{pmatrix} \frac{-32\varepsilon(1+\varepsilon^2)}{(1-\varepsilon^2)[16\varepsilon^2+\pi^2(1-\varepsilon^2)]} + \frac{\pi^2(1-\varepsilon^2)}{\varepsilon[16\varepsilon^2+\pi^2(1-\varepsilon^2)]} & \frac{-8\pi(1+\varepsilon^2)}{\sqrt{1-\varepsilon^2}[16\varepsilon^2+\pi^2(1-\varepsilon^2)]} - \frac{4\pi\sqrt{1-\varepsilon^2}}{[16\varepsilon^2+\pi^2(1-\varepsilon^2)]} \\ \frac{4\pi(1+2\varepsilon^2)}{\sqrt{1-\varepsilon^2}[16\varepsilon^2+\pi^2(1-\varepsilon^2)]} + \frac{4\pi\sqrt{1-\varepsilon^2}}{[16\varepsilon^2+\pi^2(1-\varepsilon^2)]} & \frac{\pi^2(1+2\varepsilon^2)}{\varepsilon[16\varepsilon^2+\pi^2(1-\varepsilon^2)]} - \frac{16\varepsilon}{[16\varepsilon^2+\pi^2(1-\varepsilon^2)]} \end{pmatrix}$$

Simplificando se tiene:

$$[\bar{K}][Q]^T = \begin{pmatrix} \frac{-32\varepsilon^2(1+\varepsilon^2)+\pi^2(1-\varepsilon^2)^2}{\varepsilon[16\varepsilon^2+\pi^2(1-\varepsilon^2)](1-\varepsilon^2)} & \frac{-8\pi(1+\varepsilon^2)-4\pi(1-\varepsilon^2)}{\sqrt{1-\varepsilon^2}[16\varepsilon^2+\pi^2(1-\varepsilon^2)]} \\ \frac{4\pi(1+2\varepsilon^2)+4\pi(1-\varepsilon^2)}{\sqrt{1-\varepsilon^2}[16\varepsilon^2+\pi^2(1-\varepsilon^2)]} & \frac{\pi^2(1+2\varepsilon^2)-16\varepsilon^2}{\varepsilon[16\varepsilon^2+\pi^2(1-\varepsilon^2)]} \end{pmatrix}. \quad (5.62)$$

Finalmente, la matriz de rigidez en el sistema (x,y) puede obtenerse sustituyendo a (5.62) en (5.61):

$$\tilde{K} = -[Q][\bar{K}][Q]^T =$$

$$-\begin{pmatrix} \frac{4\varepsilon}{\sqrt{16\varepsilon^2 + \pi^2(1-\varepsilon^2)}} & \frac{-\pi\sqrt{1-\varepsilon^2}}{\sqrt{16\varepsilon^2 + \pi^2(1-\varepsilon^2)}} \\ \frac{\pi\sqrt{1-\varepsilon^2}}{\sqrt{16\varepsilon^2 + \pi^2(1-\varepsilon^2)}} & \frac{4\varepsilon}{\sqrt{16\varepsilon^2 + \pi^2(1-\varepsilon^2)}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{-32\varepsilon^2(1+\varepsilon^2) + \pi^2(1-\varepsilon^2)^2}{\varepsilon[16\varepsilon^2 + \pi^2(1-\varepsilon^2)](1-\varepsilon^2)} & \frac{-8\pi(1+\varepsilon^2) - 4\pi(1-\varepsilon^2)}{\sqrt{1-\varepsilon^2}[16\varepsilon^2 + \pi^2(1-\varepsilon^2)]} \\ \frac{4\pi(1+2\varepsilon^2) + 4\pi(1-\varepsilon^2)}{\sqrt{1-\varepsilon^2}[16\varepsilon^2 + \pi^2(1-\varepsilon^2)]} & \frac{\pi^2(1+2\varepsilon^2) - 16\varepsilon^2}{\varepsilon[16\varepsilon^2 + \pi^2(1-\varepsilon^2)]} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \\ \\ \end{pmatrix}$$

Simplificando:

$$\tilde{K} = \begin{pmatrix} \underbrace{\frac{4[\pi^2 + \varepsilon^2(32 + \pi^2) + 2(16 - \pi^2)\varepsilon^4]}{(1-\varepsilon^2)[\pi^2 + (16 - \pi^2)\varepsilon^2]^{3/2}}}_{\tilde{K}_{xx}} & \underbrace{\frac{\pi[\pi^2 + (32 + \pi^2)\varepsilon^2 + 2(16 - \pi^2)\varepsilon^4]}{\varepsilon\sqrt{1-\varepsilon^2}[\pi^2 + (16 - \pi^2)\varepsilon^2]^{3/2}}}_{\tilde{K}_{xy}} \\ \underbrace{\frac{\pi[-\pi^2 + 2\pi^2\varepsilon^2 + (16 - \pi^2)\varepsilon^4]}{\varepsilon\sqrt{1-\varepsilon^2}[\pi^2 + (16 - \pi^2)\varepsilon^2]^{3/2}}}_{\tilde{K}_{yx}} & \underbrace{\frac{4[2\pi^2 + (16 - \pi^2)\varepsilon^2]}{[16\varepsilon^2 + \pi^2(1-\varepsilon^2)]^{3/2}}}_{\tilde{K}_{yy}} \end{pmatrix}. \quad (5.63)$$

Coeficientes de amortiguamiento.

Los coeficientes de amortiguamiento en la dirección radial y transversal de una chumacera corta están dados por:

$$\bar{C}_{RR} = \frac{-2\pi^2(1+2\varepsilon^2)}{(1-\varepsilon^2)^{5/2}} \left(\frac{L}{D}\right)^2 \quad (5.64)$$

$$\bar{C}_{RT} = \frac{8\pi\varepsilon}{(1-\varepsilon^2)^2} \left(\frac{L}{D}\right)^2 \quad (5.65)$$

$$\bar{C}_{TR} = \frac{8\pi\varepsilon}{(1-\varepsilon^2)^2} \left(\frac{L}{D}\right)^2 \quad (5.66)$$

$$\bar{C}_{TT} = \frac{-2\pi^2}{(1-\varepsilon^2)^{5/2}} \left(\frac{L}{D}\right)^2 \quad (5.67)$$

Como se mostró en los cálculos de los coeficientes de rigidez, es posible suprimir el término $(L/D)^2$ de los amortiguamientos anteriores multiplicando a cada uno por el número de Sommerfeld, para obtener:

$$\bar{\bar{C}}_{RR} = S\bar{C}_{RR} \quad (5.68)$$

$$\bar{\bar{C}}_{RT} = S\bar{C}_{RT} \quad (5.69)$$

$$\bar{\bar{C}}_{TR} = S\bar{C}_{TR} \quad (5.70)$$

$$\bar{\bar{C}}_{TT} = S\bar{C}_{TT} , \quad (5.71)$$

entonces:

$$\bar{\bar{C}}_{RR} = \frac{-2\pi(1+2\varepsilon^2)}{\varepsilon\sqrt{1-\varepsilon^2}\sqrt{16\varepsilon^2+\pi^2(1-\varepsilon^2)}} \quad (5.72)$$

$$\bar{\bar{C}}_{RT} = \frac{8}{\sqrt{16\varepsilon^2+\pi^2(1-\varepsilon^2)}} \quad (5.73)$$

$$\bar{\bar{C}}_{TR} = \frac{8}{\sqrt{16\varepsilon^2+\pi^2(1-\varepsilon^2)}} \quad (5.74)$$

$$\bar{\bar{C}}_{TT} = \frac{-2\pi\sqrt{1-\varepsilon^2}}{\varepsilon\sqrt{16\varepsilon^2+\pi^2(1-\varepsilon^2)}} . \quad (5.75)$$

La matriz de amortiguamiento en el sistema (x,y) está definida como:

$$[\tilde{c}] = -[Q][\bar{\bar{C}}][Q]^T . \quad (5.76)$$

Procediendo de igual forma que en los coeficientes de rigidez, se puede escribir:

$$[\tilde{C}] = \begin{bmatrix} \text{Cos } \varphi & -\text{Sen } \varphi \\ \text{Sen } \varphi & \text{Cos } \varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\bar{C}}_{RR} & \bar{\bar{C}}_{RT} \\ \bar{\bar{C}}_{TR} & \bar{\bar{C}}_{TT} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \text{Cos } \varphi & \text{Sen } \varphi \\ -\text{Sen } \varphi & \text{Cos } \varphi \end{bmatrix} \quad (5.77)$$

El producto de las primeras dos matrices del segundo miembro, multiplicadas de derecha a izquierda, se puede escribir como:

$$[\bar{c}] [q]^T = \left(\begin{array}{cc} \frac{-2\pi(1+2\varepsilon^2)}{\varepsilon\sqrt{1-\varepsilon^2}\sqrt{16\varepsilon^2+\pi^2(1-\varepsilon^2)}} & \frac{8}{\sqrt{16\varepsilon^2+\pi^2(1-\varepsilon^2)}} \\ \frac{8}{\sqrt{16\varepsilon^2+\pi^2(1-\varepsilon^2)}} & \frac{-2\pi\sqrt{1-\varepsilon^2}}{\varepsilon\sqrt{16\varepsilon^2+\pi^2(1-\varepsilon^2)}} \end{array} \right) \left(\begin{array}{cc} \frac{4\varepsilon}{\sqrt{16\varepsilon^2+\pi^2(1-\varepsilon^2)}} & \frac{\pi\sqrt{1-\varepsilon^2}}{\sqrt{16\varepsilon^2+\pi^2(1-\varepsilon^2)}} \\ \frac{-\pi\sqrt{1-\varepsilon^2}}{\sqrt{16\varepsilon^2+\pi^2(1-\varepsilon^2)}} & \frac{4\varepsilon}{\sqrt{16\varepsilon^2+\pi^2(1-\varepsilon^2)}} \end{array} \right)$$

Simplificando:

$$[\bar{c}] [q]^T = \left(\begin{array}{cc} \frac{-16\pi-16\pi\varepsilon^2+8\pi\varepsilon^2}{\sqrt{1-\varepsilon^2}[16\varepsilon^2+\pi^2(1-\varepsilon^2)]} & \frac{-2\pi^2-4\pi^2\varepsilon^2+32\varepsilon^2}{\varepsilon[16\varepsilon^2+\pi^2(1-\varepsilon^2)]} \\ \frac{32\varepsilon^2+2\pi^2-2\pi^2\varepsilon^2}{\varepsilon[16\varepsilon^2+\pi^2(1-\varepsilon^2)]} & 0 \end{array} \right). \quad (5.78)$$

Sustituyendo (5.78) en (5.77), y después de simplificar se obtiene:

$$[\tilde{c}] = -[q][\bar{c}][q]^T = \left(\begin{array}{cc} \frac{2\pi[\pi^2+2(24-\pi^2)\varepsilon^2+\pi^2\varepsilon^4]}{\varepsilon\sqrt{1-\varepsilon^2}[\pi^2+(16-\pi^2)\varepsilon^2]^{3/2}} & \frac{8[\pi^2+2(\pi^2-8)\varepsilon^2]}{[\pi^2+(16-\pi^2)\varepsilon^2]^{3/2}} \\ \frac{8[\pi^2+2(\pi^2-8)\varepsilon^2]}{[\pi^2+(16-\pi^2)\varepsilon^2]^{3/2}} & \frac{2\pi(1-\varepsilon^2)^{1/2}[\pi^2+2(\pi^2-8)\varepsilon^2]}{\varepsilon[\pi^2+(16-\pi^2)\varepsilon^2]^{3/2}} \end{array} \right). \quad (5.79)$$

5.5 Comportamiento gráfico de los coeficientes rotodinámicos. $L/D = 1/4$

Chumacera corta no presurizada (caso clásico).

El comportamiento gráfico de los coeficientes rotodinámicos de una chumacera corta no presurizada externamente, es bien conocido y analizado en los libros clásicos [2], [3]. En las figuras 5.3 y 5.4 se aprecian los coeficientes de rigidez y amortiguamiento obtenidos a partir de las fórmulas dadas en la tabla 5.2, y la manera en que éstos van cambiando como función de la excentricidad de equilibrio. **Nota:** Las líneas punteadas en las figuras representan valores negativos.

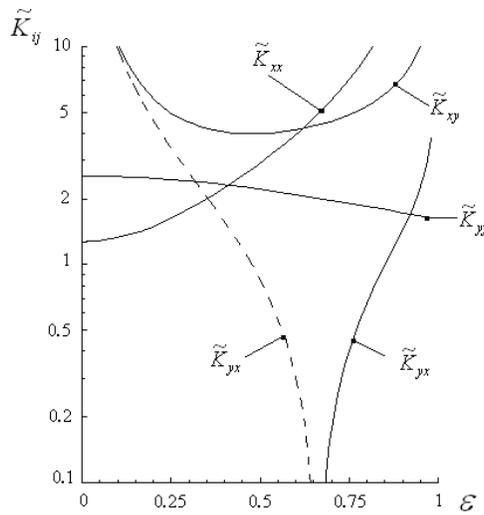


Figura 5.3. Coeficientes rotodinámicos de **rigidez** para una chumacera corta no presurizada.

$$L/D = 1/4, f_{prt} = 0.$$

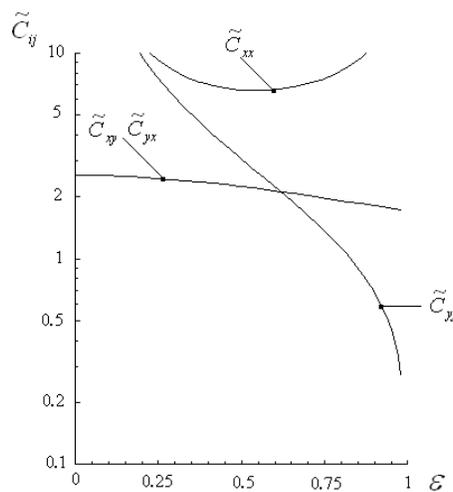


Figura 5.4. Coeficientes rotodinámicos de **amortiguamiento** para una chumacera corta no presurizada.

$$L/D = 1/4, f_{prt} = 0.$$

Referencias

- [1] Gómez Mancilla J.C. “*Steam whirl instability in Rotating shafts*”. Dissertation Doctoral, Washington University 1993.
- [2] Szeri. (1998) “*Fluid Film Lubrication. Theory and Design*”. Cambridge University Press.
- [3] Khonsari, M.M., Booser, E.R. (2001) “*Applied Tribology: Bearing Design and Lubrication*,” John Wiley & Sons.
- [4] Nosov, V.R , Ramírez Vargas, I., Gómez Mancilla, J.C. (2005), “*Uso de Funciones Generalizadas Espaciales en modelos Rotodinámicos Presurizados*” , 1° Congreso Internacional de Matemáticas Aplicadas, México D.F.
- [5] Antonio García, A., Nosov, V. R., Gómez Mancilla J.C., (2002) “*Comparación de coeficientes Rotodinámicos de Chumaceras Hidrodinámicas usando la teoría de Chumaceras Largas, Cortas y Warner*”. 3° Congreso Internacional de Ingeniería Electromecánica y de Sistemas IPN.
- [6] Ramírez, I. Nosov, V. Gómez-Mancilla, J. (13 Octubre 2005). “*Cálculo de los Coeficientes Rotodinámicos de una Chumacera corta Presurizada*”, 7° Congreso Iberoamericano de Ingeniería Mecánica. México D.F.
- [7] Childs, D. (1993), “*Turbomachinery Rotordynamics: Phenomena, Modeling, and Analysis*,” John Wiley and Sons, Inc. New York.
- [8] Lund J., and Thomsen, K. (1978), “*A Calculation Method and Data for the Dynamic Coefficients of Oil-Lubricated Journal Bearings*,” Topics in Fluid Film Bearing and Rotor Bearing System Design and Optimization, ASME, New York, pp. 1-28.
- [9] Lund, J. W. (1987), “*Review of the Concept of Dynamic Coefficients for Fluid Film Journal Bearings*,” Journal of Tribology, Transactions of the ASME, Vol. 109, pp. 37-41.
- [10] Rao, J.S., (1991) “*Rotor-Dynamics*”, John Wiley and Sons.
- [11] Vance, J., (1988) “*Rotordynamics of Turbomachinery*”, John Wiley and Sons.

Conclusiones

En el capítulo 2 se realiza una comparación del orden de magnitud con el que participan las diversas fuerzas utilizando el análisis dimensional, determinándose que las fuerzas viscosas y las de presión son predominantes en la operación de la chumacera. Considerando además la película de fluido como un líquido newtoniano con flujo laminar y que el efecto de la curvatura de la chumacera es despreciable, se simplifican las ecuaciones de Navier-Stokes y se muestra una deducción detallada de la ecuación general de lubricación de Reynolds en coordenadas cartesianas y cilíndricas para estado estacionario, es decir, con el eje rotando en su posición de equilibrio. La ecuación de Reynolds se expresa en forma adimensional, lo cual permite una mayor generalización y la simplificación de los desarrollos en los capítulos siguientes.

En el capítulo 3, a partir de la ecuación de Reynolds se obtienen, para una chumacera corta, el modelo clásico (sin presurización externa) y, mediante el uso de la función de Dirac, un modelo presurizado con un punto de inyección de lubricante. Adicionalmente se presentan otros dos modelos, uno con un anillo de presurización y otro con una línea longitudinal de presurización.

Aunque la función de Dirac no es propiamente una función, esta metodología alternativa utilizada permite la caracterización de una chumacera hidrodinámica, ya que su uso para modelar la presurización externa en una chumacera corta resulta satisfactorio y permite la obtención de campos de presión, fuerzas de presión y posiciones de equilibrio aceptables, por lo que los modelos presentados permiten predecir el comportamiento del sistema rotor-chumaceras.

En el capítulo 4 se obtienen los campos de presión para el modelo sin presurización externa, mediante la solución de Ocvirk, y para el modelo con presurización puntual. Posteriormente se calculan las fuerzas de presión y las posiciones de equilibrio para

ambos modelos. Para el modelo presurizado se analizan cuatro posiciones diferentes para el puerto de inyección del lubricante:

1. En la parte central superior.
2. En la parte central inferior.
3. En la parte central lateral derecha.
4. En la parte central lateral izquierda.

Utilizando Mathematica 8.0, se obtienen tabulaciones útiles que permiten conocer los valores de excentricidad adimensional y del ángulo de equilibrio a partir de la velocidad de operación, que tiene relación con el número de Sommerfeld. Esto es importante porque se puede predecir con exactitud la posición del rotor a partir de la presurización externa utilizada. Estos datos también son necesarios para conocer los coeficientes de rigidez y amortiguamiento, que dependen de la posición de equilibrio, cuando el rotor tiene alguna posición específica.

A partir de los resultados obtenidos para la presurización superior, se confirma que la excentricidad se incrementa de manera importante al aumentarse la fuerza de presión (al mismo tiempo que el ángulo de equilibrio decrece), ya que ésta se incrementa al peso del sistema y hace que el eje se desplace hacia abajo, lo cual es una condición crítica. Con una fuerza de presión relativamente baja, la excentricidad tiende al valor de 1, lo cual es indeseable porque significa contacto entre la chumacera y el eje.

En el caso de la presurización inferior, como se esperaba, la excentricidad se reduce de manera importante al aumentarse la fuerza de presión (al mismo tiempo que el ángulo de equilibrio crece), ya que ésta se opone al peso del sistema y hace que el eje se desplace hacia arriba, lo cual es una condición favorable. Se encontró también que para valores de fuerza de presión adimensional mayores que 128, la excentricidad empieza a crecer debido a que dicha fuerza se torna mayor que el peso del sistema, desplazando la posición de equilibrio del eje al tercer cuadrante.

Para el caso de la presurización horizontal, fue necesario resolver numéricamente las ecuaciones, obteniéndose valores para el ángulo de equilibrio como función de la

excentricidad adimensional para diferentes valores de la fuerza de presión adimensional.

Se concluye que, a bajas velocidades (números de Sommerfeld pequeños), la presurización superior no produce cambios grandes en la posición de equilibrio, mientras que, a altas velocidades, el rotor experimenta valores de excentricidad cada vez mayores respecto al caso clásico. La presurización inferior produce menores valores de excentricidad hasta que la fuerza de presión iguala el peso del sistema, como se mencionó antes.

En cuanto a la presurización horizontal, al inyectar lubricante en el extremo derecho del rotor, se confirma que éste se desplazará hacia la izquierda, observándose que a medida que se aumenta la presión el rotor se va desplazando proporcionalmente, circunstancia que no sucede así con los otros puertos.

Cuando la inyección es en el lado izquierdo de la chumacera no se aprecia un desplazamiento del eje muy notorio, debido posiblemente a la que la velocidad angular se consideró en sentido antihorario, dando como resultado que se perciba una mayor estabilidad aparente.

Considerando el cambio relativo del ángulo de equilibrio, para la inyección por la derecha se observa un desplazamiento significativo del eje a medida que aumentan la presurización y la excentricidad, mientras que para la inyección por la izquierda, dicho desplazamiento es bastante menor. Estos datos son importantes porque proporcionan una medida relativa, expresada en porcentaje, con la cual se puede saber cómo se ha ido desplazando el rotor a medida que se va aumentando la fuerza de presión.

En el capítulo 5 se muestra la solución de la ecuación de Reynolds para el cálculo de los coeficientes rotodinámicos de rigidez y amortiguamiento para el caso clásico de una chumacera corta con relación $L/D = 1/4$. Dichos coeficientes se obtienen en el sistema de coordenadas $R-T$ y en coordenadas cartesianas $x-y$, como función de la excentricidad adimensional. Como los valores de rigidez y amortiguamiento son cambiantes con la velocidad de rotación y con la adición externa de presión, uno de los coeficientes de rigidez puede tomar valores negativos y dependiendo de su magnitud el

sistema puede llegar a la inestabilidad. Esta condición se observa para el coeficiente de rigidez K_{yx} , debido a los valores utilizados para obtener las gráficas.

En resumen, los resultados obtenidos en esta tesis tienen aplicación práctica como auxiliares en el monitoreo y diagnóstico de máquinas rotatorias soportadas por chumaceras hidrodinámicas que son presurizadas para reducir vibraciones excesivas.

Entre los trabajos futuros a realizar se encuentran el cálculo de los coeficientes de rigidez y amortiguamiento bajo condiciones de presurización externa, la consideración del desalineamiento del eje, cálculo de la estabilidad del rotor basado en la velocidad umbral y operación del equipo en estado transitorio.