



Subsecretaría de Educación Superior  
Dirección General de Educación Superior Tecnológica  
Instituto Tecnológico de Pachuca

# Respuesta vibratoria de un rotor desbalanceado con eje flexible soportado por chumaceras cortas hidrodinámicas con excitación

Tesis  
que para obtener el grado de  
Maestro en Ingeniería Mecánica

Presenta  
**Humberto Corro Hernández**

Director de Tesis: Dr. Ignacio Ramírez Vargas  
Codirectores: M. en C. Luis Manuel Palacios Pineda  
Dr. Abdiel Gómez Mercado

Pachuca, Hidalgo, México. Abril de 2014



Carr. México –Pachuca Km 87.5, A. P. 276, C.P. 42080, Col. Venta Prieta.  
Pachuca, Hidalgo. Tels. (771) 711 3073, 711 3596, 711 5119, 7115538. Fax: 711 3399.

[www.itpachuca.edu.mx](http://www.itpachuca.edu.mx)



ESTADOS UNIDOS MEXICANOS



DIRECCIÓN GENERAL DE EDUCACIÓN SUPERIOR TECNOLÓGICA  
Instituto Tecnológico de Pachuca

"2014, Año de Octavio Paz"

Pachuca, Hidalgo, **07/marzo/2014**

OFICIO No. DEPI-087-2014

**C. ING. HUMBERTO CORRO HERNÁNDEZ  
PRESENTE**

La que suscribe, Jefa de la División de Estudios de Posgrado e Investigación, comunica a Usted que se autoriza la impresión de Tesis titulada:

**"RESPUESTA VIBRATORIA DE UN ROTOR DESBALANCEADO CON EJE FLEXIBLE SOPORTADO POR CHUMACERAS CORTAS HIDRODINÁMICAS CON EXCITACIÓN"**

Para obtener el grado de Maestro en Ingeniería Mecánica, una vez que han sido efectuadas las correcciones indicadas por el Jurado correspondiente.

Sin otro particular por el momento, quedo de Usted.

**ATENTAMENTE**  
"EL HOMBRE ALIMENTA EL INGENIO EN CONTACTO CON LA CIENCIA"

**DRA. ERIKA OSIRIS ÁVILA DÁVILA  
JEFA DE LA DIVISIÓN DE ESTUDIOS DE POSGRADO E INVESTIGACIÓN**



SECRETARÍA DE EDUCACIÓN PÚBLICA  
DIRECCIÓN GENERAL DE EDUCACIÓN  
SUPERIOR TECNOLÓGICA  
I. T. PACHUCA  
DIVISIÓN DE ESTUDIOS DE  
POSGRADO E INVESTIGACIÓN

C.p. Coordinación de Ingeniería Mecánica  
Archivo  
LMPP/Impp



Carretera México-Pachuca Km. 87.5 A. P. 276 C.P. 42080, Col.  
Verde Plena, Pachuca, Hidalgo, Tlax. - T113073, 7113596, 7112110, 7113119,  
7115538 Fax (01721)7113399 www.itepachuca.edu.mx



---

## Agradecimientos

---

Dedico esta tesis a mis padres, Humberto y Xóchitl, quienes con su apoyo moral y material me permitieron proseguir con mi formación académica.

Agradezco al CONACyT y COCyTEH por la beca proporcionada para mis estudios de maestría, a través del Fondo Mixto de Fomento a la Investigación Científica y Tecnológica CONACyT - Gobierno del Estado de Hidalgo: Proyecto No. FOMIX-HGO-2009-C01-131238.

También quiero reconocer a mis profesores de maestría, asesores y colegas por compartir desinteresadamente sus conocimientos y su tiempo para poder concluir exitosamente este proyecto.

Y finalmente, un señalamiento general a todos los que con su orientación y apoyo hicieron posible este trabajo y el grado que representa.

Jamädi

## **Resumen**

En este trabajo se estudian los efectos que tienen sobre el comportamiento dinámico de un rotor el uso de chumaceras hidrodinámicas cortas como soporte.

Entre las características del rotor estudiado se considera que está desbalanceado y además que el eje del mismo es flexible, lo que influye en la formulación matemática y la consiguiente obtención de la respuesta vibratoria.

Dentro de la caracterización de los apoyos, se estudia en primer lugar el uso de chumaceras sin presurización –caso clásico- para efectos comparativos. Se prosigue con el análisis de los efectos de la adición de presurización externa a tres niveles diferentes, siendo el origen de la excitación de los soportes.

Se consideran soluciones analíticas lineales para la obtención de coeficientes de rigidez y amortiguamiento de los soportes a partir de un desarrollo de la ecuación de Reynolds especial para el caso de la chumacera corta.

Se presentan soluciones de tipo numérico fundamentadas en teoría del elemento finito. Varios modelos de rotor se crearon a partir de la programación de códigos en ANSYS APDL en un grado ascendente de complejidad. La solución de estos modelos permite realizar análisis del tipo modal, armónico y transitorio.

Por su importancia en la fundamentación de este trabajo, se anexan los desarrollos matemáticos completos vinculados, además de los códigos resultantes para uso y consulta.

**Abstract**

Effects on a rotor's dynamic response by the use of short journal bearings as supports are studied on this work.

As part of the supports' characterization, first it is studied the case of a journal bearing with no pressurization –classic case- for comparative reference. So is continued with the analysis of the effects of external pressure addition at three different levels, being the source of excitation.

Among the characteristics of the rotor it is considered its unbalance, and that shaft is flexible, so that influences the mathematical formulation and the subsequent finding of vibrational response.

Analytic linear solutions for the stiffness and damping coefficients of supports are considered from the special development of Reynolds' Equation for short journal bearings.

Numeric solutions based on the finite element theory are shown. Many rotor models are created by code programming in ANSYS APDL in an ascending degree of complexity. Solutions of those models allow to generate modal, harmonic and transient type analysis.

Due their importance in the bases of this work, the full mathematical developments are annexed as well the generated codes for use and reference.

---

**ÍNDICE**

<b>Resumen</b>	<b>iv</b>
<b>Abstract</b>	<b>v</b>
<b>Índice</b>	<b>vi</b>
<b>Nomenclatura</b>	<b>ix</b>
<b>Índice de figuras</b>	<b>xii</b>
<b>Índice de tablas</b>	<b>xviii</b>
<b>Introducción</b>	<b>1</b>
Antecedentes	1
Justificación	2
Planteamiento del problema	4
Hipótesis	4
Objetivo general	4
Objetivos específicos	4
Alcances y limitaciones	5
<b>Capítulo 1. Marco teórico</b>	<b>6</b>
1.1 Antecedentes históricos	7
1.2 Sistemas rotatorios y ecuaciones relativas	8
1.3 Generalidades de un rotor	12
1.4 Generalidades de una chumacera	14
1.5 El número de Sommerfeld	16
1.6 Efectos giroscópicos	18
1.7 Inestabilidad y estabilidad	19
1.8 Consideraciones importantes de la rotodinámica	23
<b>Capítulo 2. Vibraciones y modelos vibratorios</b>	<b>24</b>
2.1 Modelo vibratorio en un solo grado de libertad	24
2.1.1 Vibraciones libres y forzadas sin amortiguamiento	26
2.1.2 Vibraciones libres y forzadas con amortiguamiento	31
2.2 Modelo vibratorio para múltiples grados de libertad	37

---

2.3	El rotor de Jeffcott	39
<b>Capítulo 3. Lubricación y chumaceras</b>		<b>43</b>
3.1	Las ecuaciones de Navier-Stokes y de Reynolds	44
3.2	Ecuación de Reynolds para chumaceras cortas	46
3.3	Fuerzas en la película de lubricante para la chumacera corta.	47
3.4	Condiciones de equilibrio para una chumacera corta y coeficientes vinculados	49
3.5	El rotor de Jeffcott con aplicación de la teoría de chumaceras	57
3.6	Chumaceras presurizadas	61
<b>Capítulo 4. Modelo numérico y experimentación</b>		<b>65</b>
4.1	Diseño de experimentos	65
4.2	Introducción al método de elemento finito	68
4.3	Módulo de rotodinámica en ANSYS	74
4.4	Programación del modelo	77
<b>Capítulo 5. Resultados y conclusiones</b>		<b>81</b>
5.1	Modelo de rotor de Jeffcott apoyado en chumaceras hidrodinámicas cortas. Caso clásico	81
5.1.1	Análisis modal	82
5.1.2	Análisis armónico	84
5.1.3	Análisis transitorio	86
5.2	Modelo de rotor de Jeffcott apoyado en chumaceras hidrodinámicas cortas. Caso con presurización externa en la parte superior	98
5.2.1	Análisis modal	100
5.2.2	Análisis armónico	103
5.2.3	Análisis transitorio	106
5.3	Conclusiones	134

---

---

<b>Referencias</b>	<b>136</b>
<b>Anexo A – Ecuación de Reynolds</b>	<b>140</b>
A.1 Las ecuaciones de Navier-Stokes	140
A.2 Análisis de orden de magnitud	141
A.2.1 El número de Reynolds	141
A.2.2 El número de Froude	143
A.2.3 El número de Euler	144
A.3 Hipótesis válidas para chumaceras hidrodinámicas	145
A.4 Deducción de la ecuación de Reynolds	146
A.5 Ecuación de Reynolds en ecuaciones cilíndricas	156
<b>Anexo B – Soluciones analíticas aproximadas para chumaceras cortas</b>	<b>168</b>
B.1 Evaluación de los principales parámetros	169
B.2 Condiciones de frontera	176
B.3 Propiedades dinámicas del lubricante en las chumaceras	178
B.4 Teoría de chumaceras infinitamente cortas	181
B.4.1 Análisis de chumaceras cortas	183
B.5 Teoría de chumaceras infinitamente largas	190
B.5.1 Análisis de chumaceras largas con condiciones de frontera de Sommerfeld	190
B.5.2 Análisis de chumaceras largas con condiciones de frontera de Gumbel	196
<b>Anexo C – Tabla de integrales para chumaceras hidrodinámicas</b>	<b>205</b>
<b>Anexo D – Códigos de programación</b>	<b>208</b>
D.1 Modelo de rotor de Jeffcott apoyado en chumaceras hidrodinámicas cortas. Código para análisis en estado estable	208
D.2 Modelo de rotor de Jeffcott apoyado en chumaceras hidrodinámicas cortas. Código para análisis en estado transitorio	213

---

---

**Nomenclatura**

	<b>Descripción</b>
$A$	Amplitud de vibración general
$a, b$	Coeficientes constantes
$a$	Coordenada axial de ubicación de puerto de presurización en chumacera
$\vec{a}$	Vector de aceleración
$B$	Matriz de amortiguamiento rotatorio
$C$	Matriz de amortiguamiento
$C_i$	Constante $i$ -ésima
$C_r$	Claro radial
$c$	Coeficiente de amortiguamiento en una dirección
$c_{ij}$	Coeficiente de amortiguamiento ( $N/m$ ) en las componentes $i, j$
$\bar{c}_{ij}$	Coeficiente de amortiguamiento adimensionalizado en la dirección $i, j$
$\bar{c}_{ijp}$	Coeficiente de amortiguamiento adimensionalizado y afectado por presurización en la dirección $i, j$
$e$	Excentricidad
$E$	Módulo de Young
$F$	Magnitud de una fuerza
$\vec{F}$	Vector de fuerza
$F(t)$	Función de fuerza dependiente del tiempo
$F_C$	Fuerza centrífuga
$F_i$	Componente de la fuerza en la dirección $i$
$f$	Factor de presurización
$f_i$	Función $i$ -ésima
$G$	Matriz de efectos giroscópicos
$H$	Espesor de la película de lubricante
$h$	Espesor adimensionalizado de la película de lubricante
$K$	Matriz de rigidez
$k$	Coeficiente de rigidez en una dirección
$k_{ij}$	Coeficiente de rigidez ( $N/m$ ) en las componentes $i, j$
$\bar{k}_{ij}$	Coeficiente de rigidez adimensionalizado en la dirección $i, j$

---

---

$\bar{k}_{ijp}$	Coeficiente de rigidez adimensionalizado y afectado por presurización en la dirección $i, j$
$I$	Momento de inercia
$L$	Longitud del eje, longitud de la chumacera
$\mathbf{M}$	Matriz de inercia
$m$	Masa, masa del rotor
$\vec{M}$	Momento de fuerza
$M_i$	Componente del momento de fuerza en la dirección $i$
$N$	Número de vueltas, nodo función
$P$	Presión
$q$	Coordenada generalizada
$Q_i$	Función de fuerza
$\bar{q}_p$	Presurización adimensionalizada respecto al Número de Sommerfeld
$R$	Radio, radio de la chumacera
$\vec{r}$	Vector radial, vector de posición
$Re$	Número de Reynolds
$S$	Número de Sommerfeld
$t$	Tiempo
$\vec{t}$	Vector tangencial
$T$	Coordenada tangencial
$u, v, w$	Componentes de velocidad en cartesianas
$u$	Vector genérico adimensionalizado
$\vec{v}$	Vector de velocidad
$W$	Peso, peso del rotor
$X, Y, Z$	Coordenadas espaciales cartesianas del sistema inercial
$x, y, z$	Coordenadas espaciales cartesianas
$x_i(t)$	Posición $i$ -ésima respecto al tiempo
$\alpha, \beta$	Componentes real e imaginario de un parámetro
$\beta$	Coordenada angular de ubicación de puerto de presurización en chumacera
$\delta t$	Incremento de tiempo

---

$\varepsilon$	Relación de excentricidad de la chumacera $e/C_r$
$\theta$	Desplazamiento angular en la chumacera
$\lambda$	Parámetro
$\mu$	Viscosidad absoluta del lubricante
$\phi$	Ángulo de equilibrio (attitude)
$\varphi_i$	Función solución $i$ -ésima
$\Omega$	Velocidad de operación del rotor (rad/s)
$\omega$	Frecuencia
$\omega_n$	Frecuencia natural
$\vec{\omega}$	Vector de rotación

---

**Índice de figuras**

	<b>Descripción</b>	<b>Página</b>
1.1	Sistema rotatorio representado por dos vectores	9
1.2	Marcos de referencia fijo y relativo.	11
1.3	Esquema clásico de un rotor en turbomáquina.	13
1.4	Impulsor de la turbina de vapor Coppus TF-12.	13
1.5	Esquema básico de una chumacera.	15
1.6	Convenciones asumidas y correspondencias de los sistemas de referencia empleados	15
1.7	Esquema básico de un giroscopo	18
2.1	Modelo masa-resorte-amortiguador con excitación externa.	25
2.2	Modelo masa-resorte en vibración libre	26
2.3	Modelo masa-resorte en vibración forzada	27
2.4	Amplitud de vibración para modelo sin amortiguamiento	30
2.5	Modelo masa-resorte-amortiguador sin excitación externa	31
2.6	Comportamiento de un sistema masa-resorte-amortiguador sin excitación sobreamortiguado	32
2.7	Comportamiento de un sistema masa-resorte-amortiguador sin excitación subamortiguado	33
2.8	Comportamiento de un sistema masa-resorte-amortiguador sin excitación críticamente amortiguado	34
2.9	Amplitud de vibración para modelo amortiguado	37
2.10	Rotor de Jeffcott en vista de perfil	39
2.11	Disco del Rotor de Jeffcott	40
3.1	Esquema de relación de las dimensiones de una chumacera	46
3.2	Campo de presión para una chumacera corta con $L/D=0.5$ y $\epsilon=0.15$	48
3.3	Coeficientes directos y cruzados de rigidez y amortiguamiento para una chumacera.	53

---

3.4	Coeficientes de rigidez para una chumacera corta en función de la razón de excentricidad.	56
3.5	Coeficientes de amortiguamiento para una chumacera corta en función de la razón de excentricidad.	56
3.6a	Modelo de Rotor de Jeffcott con apoyos flexibles visto de perfil	58
3.6b	Modelo de Rotor de Jeffcott con apoyos flexibles visto de frente	58
3.7	Esquema de chumacera presurizada con cuatro puntos de inyección.	61
3.8	Ubicación de un punto arbitrario de presión para una chumacera presurizada en función de los parámetros $\alpha$ y $\beta$ .	63
4.1	Metodología de experimentación	66
4.2	GE Bently Nevada RK4, rotor para experimentación	67
4.2	Ejemplo de discretización para un rotor sobre dos apoyos rígidos	72
4.3	Discretización del modelo	79
5.1	Diagrama de Campbell para el rotor propuesto. Caso sin presurizar	82
5.2	Amplitud de desplazamiento del nodo equivalente al disco en función de la frecuencia de operación para estado estacionario	84
5.3	Orbitas tridimensionales del rotor para estado estacionario	85
5.4	Mapeo de la amplitud del modelo del rotor a 3600 RPM	86
5.5a	Interpolación de los coeficientes de rigidez a partir de los valores de la razón de excentricidad	88
5.5b	Interpolación de los coeficientes de rigidez a partir de los valores de la razón de excentricidad	88
5.6a	Amplitud vibracional absoluta en el disco del disco para estado transitorio de 0 a 6 s	90
5.6b	Amplitud vibracional absoluta en el disco del disco para estado transitorio de 0 a 8 s	91
5.7a	Órbita del nodo equivalente a la chumacera durante el estado transitorio de 0 a 6 s.	92

---

---

5.7b	Órbita del nodo equivalente a la chumacera durante el estado transitorio de 0 a 8 s.	92
5.8a	Órbita del nodo equivalente a la chumacera durante el estado transitorio de 0 a 1 s	93
5.8b	Órbita del nodo equivalente a la chumacera durante el estado transitorio de 6.4 a 6.5 s	94
5.8c	Órbita del nodo equivalente a la chumacera durante el estado transitorio de 7.8 a 8 s	95
5.9a	Órbita del nodo equivalente al disco durante el estado transitorio de 0 a 6 s.	95
5.9b	Órbita del nodo equivalente al disco durante el estado transitorio de 0 a 8 s.	96
5.10a	Órbita del nodo equivalente al disco durante el estado transitorio de 0 a 1 s	96
5.10b	Órbita del nodo equivalente al disco durante el estado transitorio de 6.35 a 6.55 s	97
5.10c	Órbita del nodo equivalente al disco durante el estado transitorio de 7.8 a 8 s	97
5.11a	Diagrama de Campbell para el rotor propuesto. Caso con puerto de inyección en la parte superior y $f=20$ .	100
5.11b	Diagrama de Campbell para el rotor propuesto. Caso con puerto de inyección en la parte superior y $f=50$ .	101
5.11c	Diagrama de Campbell para el rotor propuesto. Caso con puerto de inyección en la parte superior y $f=100$ .	101
5.12a	Amplitud de desplazamiento del nodo equivalente al disco en función de la frecuencia de operación para estado estacionario. $f=20$	104
5.12b	Amplitud de desplazamiento del nodo equivalente al disco en función de la frecuencia de operación para estado estacionario. $f=100$	104
5.13a	Orbitas tridimensionales del rotor para estado estacionario $f=20$	105
5.13b	Orbitas tridimensionales del rotor para estado estacionario $f=100$	106

---

---

5.14a	Interpolación de los coeficientes de rigidez a partir de los valores de la razón de excentricidad	108
5.14b	Interpolación de los coeficientes de amortiguamiento a partir de los valores de la razón de excentricidad	108
5.15a	Coefficientes de rigidez adimensionalizado para una chumacera corta en función de la razón de excentricidad. Caso presurizado con $f=20$	109
5.15b	Coefficientes de amortiguamiento adimensionalizado para una chumacera corta en función de la razón de excentricidad. Caso presurizado con $f=20$	109
5.16	Amplitud vibracional absoluta en el disco del disco para estado transitorio de 0 a 8 s. $f=20$	110
5.17	Órbita del nodo equivalente a la chumacera durante el estado transitorio de 0 a 8 s. $f=20$	111
5.18a	Órbita del nodo equivalente a la chumacera durante el estado transitorio de 0 a 1 s. $f=20$	112
5.18b	Órbita del nodo equivalente a la chumacera durante el estado transitorio de 6.35 a 6.55 s. $f=20$	112
5.18c	Órbita del nodo equivalente a la chumacera durante el estado transitorio de 7.8 a 8 s. $f=20$	113
5.19	Órbita del nodo equivalente al disco durante el estado transitorio de 0 a 8 s. $f=20$	113
5.20a	Órbita del nodo equivalente al disco durante el estado transitorio de 0 a 1 s. $f=20$	114
5.20b	Órbita del nodo equivalente al disco durante el estado transitorio de 6.35 a 6.55 s. $f=20$	114
5.20c	Órbita del nodo equivalente al disco durante el estado transitorio de 7.8 a 8 s. $f=20$	115
5.21a	Interpolación de los coeficientes de rigidez a partir de los valores de la razón de excentricidad $f=50$	116
5.21b	Interpolación de los coeficientes de amortiguamiento a partir de los valores de la razón de excentricidad $f=50$	117

---

---

5.22a	Coeficientes de rigidez adimensionalizado para una chumacera corta en función de la razón de excentricidad. Caso presurizado con $f=50$	117
5.22b	Coeficientes de amortiguamiento adimensionalizado para una chumacera corta en función de la razón de excentricidad. Caso presurizado con $f=50$	118
5.23	Figura 5.15. Amplitud vibracional absoluta en el disco del disco para estado transitorio de 0 a 8 s. $f=50$	119
5.24	Órbita del nodo equivalente a la chumacera durante el estado transitorio de 0 a 8 s. $f=50$	120
5.25a	Órbita del nodo equivalente a la chumacera durante el estado transitorio de 0 a 1 s. $f=50$	121
5.25b	Órbita del nodo equivalente a la chumacera durante el estado transitorio de 6.35 a 6.55 s. $f=50$	121
5.25c	Órbita del nodo equivalente a la chumacera durante el estado transitorio de 7.8 a 8 s. $f=50$	122
5.26	Órbita del nodo equivalente al disco durante el estado transitorio de 0 a 8 s. $f=50$	122
5.27a	Órbita del nodo equivalente al disco durante el estado transitorio de 0 a 1 s. $f=50$	123
5.27b	Órbita del nodo equivalente al disco durante el estado transitorio de 6.35 a 6.55 s. $f=50$	123
5.27c	Órbita del nodo equivalente al disco durante el estado transitorio de 7.8 a 8 s. $f=50$	124
5.28a	Interpolación de los coeficientes de rigidez a partir de los valores de la razón de excentricidad $f=100$	125
5.28b	Interpolación de los coeficientes de amortiguamiento a partir de los valores de la razón de excentricidad $f=100$	126
5.29a	Coeficientes de rigidez adimensionalizado para una chumacera corta en función de la razón de excentricidad. Caso presurizado con $f=100$	126
5.29b	Coeficientes de amortiguamiento adimensionalizado para una	127

---

---

	chumacera corta en función de la razón de excentricidad. Caso presurizado con $f=100$	
5.30	Amplitud vibracional absoluta en el disco del disco para estado transitorio de 0 a 8 s. $f=100$	128
5.31	Órbita del nodo equivalente a la chumacera durante el estado transitorio de 0 a 8 s. $f=100$	129
5.32a	Órbita del nodo equivalente a la chumacera durante el estado transitorio de 0 a 1 s. $f=100$	130
5.32b	Órbita del nodo equivalente a la chumacera durante el estado transitorio de 6.35 a 6.55 s. $f=100$	130
5.32c	Órbita del nodo equivalente a la chumacera durante el estado transitorio de 7.8 a 8 s. $f=100$	131
5.33	Órbita del nodo equivalente al disco durante el estado transitorio de 0 a 8 s. $f=100$	132
5.34a	Órbita del nodo equivalente al disco durante el estado transitorio de 0 a 1 s. $f=100$	132
5.34b	Órbita del nodo equivalente al disco durante el estado transitorio de 6.35 a 6.55 s. $f=100$	133
5.34c	Órbita del nodo equivalente al disco durante el estado transitorio de 7.8 a 8 s. $f=100$	133
A.1	Nomenclatura de una chumacera hidrodinámica en reposo	147
A.2	Frontera de una chumacera hidrodinámica	153
A.3	Espesor de la película de lubricante en la chumacera	157
A.4	Posición arbitraria del muñón en una chumacera	158
A.5	Posición arbitraria del muñón en una chumacera	159
A.6	Vectores unitarios en las direcciones radial y transversal del punto arbitrario $S$ de la película de lubricante, y el centro del muñón $J$ .	160
A.7	Auxiliares para el producto vectorial	162
B.1	Componentes radial y tangencial de la carga	170

---

---

B.2	Chumacera hidrodinámica en forma desenvuelta	171
B.3	Película del lubricante en forma desenvuelta	175
B.4	Descomposición de fuerzas en chumaceras hidrodinámicas	179
B.5	Campo de presión de estado estable para chumacera corta con $\varepsilon = 0.5$	184
B.6	Relación entre coordenadas X-Y y R-T	189
B.7	Perfil del campo de presión de estado estable para chumaceras largas con condiciones de frontera de SOMMERFELD para $\varepsilon = 0.5$	193
B.8	Coeficientes rotodinámicos directos para chumaceras cortas	201
B.9	Coeficientes rotodinámicos acoplados para chumaceras cortas	201
B.10	Coeficientes rotodinámicos directos para chumaceras largas en donde el campo de presión se evalúo con condiciones de frontera de SOMMERFELD	202
B.11	Coeficientes rotodinámicos acoplados para chumaceras largas en donde el campo de presión se evalúo con condiciones de frontera de SOMMERFELD	202
B.12	Coeficientes rotodinámicos directos para chumaceras largas en donde el campo de presión se evalúo con condiciones de frontera de GÜMBEL	203
B.13	Coeficientes rotodinámicos acoplados para chumaceras largas en donde el campo de presión se evalúo con condiciones de frontera de GÜMBEL	203

---

**Índice de tablas**

	<b>Descripción</b>	<b>Página</b>
1.1	Componentes de la aceleración para un sistema rotatorio	10
3.1	Diversos criterios para la clasificación de una chumacera corta por autor	47
3.2	Coeficientes adimensionalizados de rigidez y amortiguamiento en coordenadas radiales y tangenciales para una chumacera corta. Aproximación lineal	54
3.3	Coeficientes adimensionalizados de rigidez y amortiguamiento en coordenadas cartesianas para una chumacera corta. Aproximación lineal	55
3.4	Sistema de ecuaciones para un rotor de Jeffcott apoyado en chumaceras hidrodinámicas	60
3.5	Coeficientes adimensionalizados de rigidez y amortiguamiento en coordenadas radiales y tangenciales para una chumacera corta con puertos de presurización puntual	62
3.6	Coeficientes adimensionalizados de rigidez en coordenadas cartesianas para una chumacera corta con puertos de presurización puntual	64
4.1	Comparativa entre el marco de referencia estacionario y rotatorio en el módulo rotodinámico de ANSYS	76
4.2	Características asignadas al modelo del rotor	78
4.3	Características asignadas a las chumaceras	79
5.1	Frecuencias naturales del sistema en relación a la velocidades de prueba estudiadas. Caso clásico	83
5.2	Valores de rigidez y amortiguamiento en las chumaceras a distintas velocidades de operación.	87
5.3a	Frecuencias naturales del sistema en relación a la velocidades	102

---

	de prueba estudiadas. $f=20$	
5.3b	Frecuencias naturales del sistema en relación a la velocidades de prueba estudiadas. $f=50$	102
5.3c	Frecuencias naturales del sistema en relación a la velocidades de prueba estudiadas. $f=100$	103
5.4	Valores de rigidez y amortiguamiento en las chumaceras a distintas velocidades de operación. $f=20$	107
5.5	Valores de rigidez y amortiguamiento en las chumaceras a distintas velocidades de operación. $f=50$	116
5.6	Valores de rigidez y amortiguamiento en las chumaceras a distintas velocidades de operación. $f=100$	125
B.1	Coeficientes rotodinámicos para chumaceras cortas en el sistema R-T	188
B.2	Coeficientes rotodinámicos para chumaceras cortas en el sistema X-Y	189
B.3	Coeficientes rotodinámicos para chumaceras largas con condiciones de Sommerfeld en el sistema R-T.	195
B.4	Coeficientes rotodinámicos para chumaceras largas con condiciones de frontera de Sommerfeld expresados en el sistema X-Y.	196
B.5	Coeficientes rotodinámicos para chumaceras largas con condiciones de Gumbel en el sistema R-T.	200
B.6	Coeficientes rotodinámicos para chumaceras largas con condiciones de Gumbel en el sistema X-Y.	200

## **Introducción**

---

### **Antecedentes**

Las turbomáquinas son un componente esencial de la vida moderna, particularmente por ser la forma más común y directa de transformar energía eléctrica en trabajo mecánico y viceversa [0.1]. Se han convertido en la manera más efectiva de generar potencia con recursos limitados en varias aplicaciones.

En una descripción básica las turbomáquinas constan de dos tipos de elementos: aquellos que están fijos y aquellos que son móviles. El elemento móvil es el rotor propiamente dicho, mientras que el soporte o soportes de dicho rotor son lo que le brindan un apoyo físico. Ambos están estrechamente relacionados y se debe estudiar uno para tener una adecuada descripción del otro.

Un rotor en particular tiene una velocidad de operación alta en comparación a otros tipos de máquinas. Como resultado de la operación normal, se presentan efectos de cargas inerciales importantes, y es posible tener efectos de volanteo, vibraciones e inestabilidad entre otros.

Del estudio de la rotodinámica se considera que las predicciones realizadas teóricamente para los problemas citados son confiables. De ahí la utilidad que tienen los modelos generados para el estudio de las condiciones de operación para evitar problemas durante la misma.

Por la segunda vertiente de este estudio, los apoyos de una máquina de este tipo son importantes ya que determinan características que se transmiten al modelo en movimiento; en particular cuando se trabaja con chumaceras hidrodinámicas se implica considerar elementos de fluidos, los cuales alimentan al sistema rotatorio en forma de rigidez y amortiguamiento.

## Justificación

Con el panorama anterior, se plantean cuestiones respecto a la conveniencia de desarrollar este tema, así como respecto a las posibilidades a encontrar y posibles cursos de acción.

A saber, la modelación es un hecho inherente a la investigación, y una aproximación necesaria para cualquier estudio. Muchos de estos se simplifican u omiten hechos reales con el único fin de hacerlo más comprensible. El hecho importante radica en que tan fielmente refleja este modelo el comportamiento del fenómeno estudiado y qué tan frecuente es encontrar un ejemplo con condiciones similares.

De una revisión del estado del arte, se encuentra que hay diversos modelos para rotores, que toman en cuenta características que son de interés en cada caso. Por lo general, se resaltan una o dos características y otras se simplifican para tener una complejidad manejable.

Con respecto a la complejidad y el manejo del propio modelo actualmente las herramientas y el software especializado en simulación se encuentran muy disponibles, generan respuestas a problemas que experimentalmente son difíciles de observar, requieren un tiempo de estudio demasiado largo o son restringidos económicamente.

Asimismo, el modelo es perfectible y se puede ajustar al corresponder observaciones posteriores con dicho modelo en pruebas de laboratorio o en comparaciones con otros trabajos del tema.

Debe advertirse que dicho estudio puede llegar a ser excesivo si no se le acota adecuadamente. Otro problema podría ser la complejidad obtenida; el involucrar chumaceras hidrodinámicas hace que el sistema sea no lineal por necesidad.

Las máquinas con componentes que operan con ejes a rotación son bastante comunes en la industria. De ahí que la previsión de su comportamiento sea relevante en varios sentidos. Principalmente, porque las aplicaciones se harían

extensivas a varios mecanismos de función similar, tomando el modelo como punto de partida.

Aunque se tengan otros modelos, es necesario recordar que estas son construcciones que reflejan la realidad a través de un filtro, que es el creador del mismo. Por ello, un nuevo modelo podría ampliar el panorama de los estudios relacionados al considerar nuevas variables y relaciones entre estas. Además, cualquier estudio posterior destinado a aumentar la vida útil de los ejes rotatorios para un mecanismo en particular, requeriría un fundamento como el que se propone crear.

Se espera que el modelo obtenido sirviera de referencia a las investigaciones del campo, y a la vez como una herramienta útil al servicio de la técnica. El contar con un modelo confiable que describa el comportamiento de este elemento, así como su tiempo de falla permitirá una economía en cuanto a una mejor planeación de mantenimientos, que redundaría en un mejor aprovechamiento del tiempo y de los recursos materiales implicados en la operación de máquinas semejantes.

### **Planteamiento del problema**

Hasta ahora, durante la operación de turbomaquinaria, se conoce una serie de factores que permiten conocer las condiciones aisladas en las cuales una turbomáquina puede fallar o es inestable.

La dificultad de encontrar dicha solución radica en las condiciones de los apoyos físicos y los ejes, que no se establecen de forma sencilla y a la vez tienen gran relevancia en dichos resultados. El conocimiento de esta información será ampliamente útil en aplicaciones prácticas que pudieran modelarse como una turbomáquina general.

## **Hipótesis**

A partir de las condiciones medidas y observadas para un modelo de rotor y sus apoyos, sobre todo las relacionadas con la rigidez y amortiguamiento, se obtienen la respuesta vibratoria del mismo, las estabilidades y otras características importantes de operación.

## **Objetivo principal**

- Describir el comportamiento dinámico de un rotor desbalanceado con eje flexible soportado por chumaceras cortas hidrodinámicas con excitación y obtener la respuesta vibratoria correspondiente.

## **Objetivos específicos**

- Especificar las características de interés del rotor aplicables al modelo.
- Especificar las características de interés de las chumaceras.
- Obtener un modelo matemático que describa el comportamiento del rotor elegido.
- Determinar y justificar a partir de los puntos anteriores la información que alimenta al modelo matemático.
- Validar los resultados mediante ejemplos experimentales y/o comparación con estudios publicados.

## **Alcances y limitaciones**

El siguiente proyecto se considera a partir de la modelación y solución por métodos numéricos de un sistema de un rotor desbalanceado con eje flexible soportado por chumaceras cortas hidrodinámicas con excitación.

Se considera que el rotor analizado es sencillo pues presenta un solo disco desbalanceado, y su eje presenta flexibilidad; pero es a la vez muy importante porque ejemplifica perfectamente casos reales y específicos. Se llegará a una formulación por medio de las teorías de mecánica clásica.

En cuanto a los coeficientes de rigidez y amortiguamiento de los soportes, estos se analizarán mediante la teoría de lubricación hidrodinámica y se aproximarán mediante una función.

La comprobación del mismo es inherente al problema, sin embargo, debido a limitaciones económicas no se realizará experimentación de forma directa, sino que se realizará una comparación con la literatura disponible y la información publicada al respecto.

---

## Capítulo 1 – Marco teórico

---

En principio la rotodinámica trata sobre el estudio del comportamiento de maquinaria que opera de forma rotatoria a grandes velocidades. Combina elementos tanto de vibraciones como de dinámica estructural e hidrodinámica [1.1]. En particular el estudio de vibraciones aplicado a turbinas y máquinas semejantes derivó en la constitución de la rotodinámica como rama de la mecánica aplicada por derecho propio.

Un **rotor** es definido como cualquier elemento rotatorio de una máquina, que al estar suspendido por una serie de elementos cilíndricos puede girar libremente en un eje [1.2]. Para el caso de turbomaquinaria, la definición que se da en este trabajo comprende al eje, impulsores, cuerpos, discos planos y otros elementos en movimiento. Los elementos no móviles que le brindan estructura y soporte son referidos con el nombre de **estator**.

Para un rotor, se distinguen dos tipos básicos de apoyos, dependiendo del origen de las fuerzas que cargan con el mismo [1.3]. Así, se habla de apoyos rodantes, y de apoyos de elementos deslizantes. Dentro de los primeros se cuentan baleros y otros elementos sólidos; dentro del segundo se habla de apoyos que implican el uso de alguna película de fluido. En el caso de estas chumaceras, el eje está soportado por una delgada película de lubricante por lo que no hay contacto entre el eje y la pared de la chumacera.

Para una **chumacera** de este tipo, la película de aceite responde generando presión, caracterizándose con una rigidez y amortiguamiento variables que influyen directamente en el rotor. Es posible vincular factores inherentes al lubricante y la operación con sus efectos en el comportamiento del rotor.

Este capítulo es un primer acercamiento a los temas tratados en un panorama general. Se incluye información histórica relativa así como los elementos básicos requeridos para la comprensión de los temas descritos y trabajados. Algunos que se mencionan aquí por su especial importancia se detallan en capítulos posteriores.

## 1.1 Antecedentes históricos

El desarrollo de las máquinas rotatorias, especialmente las que se definen como turbomaquinarias, se vincula fundamentalmente con el aprovechamiento de las diversas fuentes de energía disponibles. La primera máquina de vapor ideada por Herón de Alejandría (100 a.C.) contiene ya algunos elementos que la podrían definir como turbomaquinaria [1.4]. Sin embargo, pasó mucho más tiempo antes de que las máquinas rotatorias disponibles fueran objeto de uso masivo y por lo tanto de un estudio teórico detenido.

Durante mucho tiempo se trabajó con máquinas rotatorias como molinos y ruedas de agua. Pero no fue sino hasta el siglo XIX, con la aplicación a gran escala de la tecnología del vapor que se pudieron alcanzar velocidades de operación más altas, y surgieron elementos como las bombas y las primeras turbinas. Problemas relacionados con la mayor velocidad de operación y las vibraciones subsecuentes obligaron al desarrollo de modelos matemáticos adecuados para estos nuevos rotores, siendo el pionero Föppl (1895) [1.4].

Rankine (1865) había trabajado previamente con ejes en rotación. Laval (1889) experimentó con rotores a velocidades supercríticas. Uno de los modelos primeros de rotores, conocido como el rotor de Jeffcott, Laval o Laval-Jeffcott (1919), planteó algunos problemas respecto a velocidades críticas, volanteos y fenómenos afines [1.1].

Con posterioridad, el desarrollo de técnicas computarizadas de análisis, tales como el elemento finito, y la definición de rotodinámica como rama específica de la mecánica, han hecho del análisis de rotores una especial área de interés.

En cuanto a las chumaceras, el estudio de la mecánica de fluidos para esta aplicación particular se nutrió de los avances de Euler y Bernoulli respecto al comportamiento de líquidos según las Leyes de Newton. Así, se encontraron expresiones que describían en la teoría el comportamiento de un líquido.

En la práctica, se encontró que los apoyos de los rotores presentaban menos desgaste si se lubricaban con aceite. Posteriormente se consideraron diseños en

los cuales el muñón del eje flota sobre dicha película de lubricante. Pero a su vez, se presentaban fenómenos de excitación que se explicaron posteriormente gracias a las aportaciones de Pauli (1849) quien fue pionero en los estudios de sistemas eje-chumaceras en condiciones hidrodinámicas. Petroff (1883) describe que la fricción en estos elementos es un fenómeno fundamentalmente hidrodinámico. Tower (1883) pudo demostrar la existencia de un campo de presión dentro de la chumacera [1.4].

Reynolds (1886), en su estudio de la dinámica de fluidos, encontró la expresión matemática que modela el comportamiento dinámico de la película de aceite de una chumacera. A. Sommerfeld (1904) resuelve dicha expresión para una chumacera infinitamente larga. Ocvirk (1952) hace otro tanto con la idealización de una chumacera infinitamente corta [1.4].

Actualmente, debido a sus aplicaciones inmediatas y a que problemas prácticos aparecen día con día, la rotodinámica es un campo de estudio amplio. Es por ello que existen referencias abundantes, tanto al comportamiento del rotor como de las chumaceras y fenómenos vinculados, y a pesar de ello queda lugar para nuevas aportaciones.

## 1.2 Sistemas rotatorios y ecuaciones relativas

Dado que la operación de un rotor tiene algunos efectos específicos que no se dan en otro tipo de sistemas, y su movimiento característico, es necesario describir éste de forma adecuada.

Con esto en cuenta, se inicia la descripción de un sistema genérico en el cual sea indicado el movimiento del sistema mediante dos vectores, que indiquen posición y rotación,  $\vec{r}$  y  $\vec{\omega}$  respectivamente. La Figura 1.1 ilustra dicha situación y sirve de referente para el posterior desarrollo matemático.

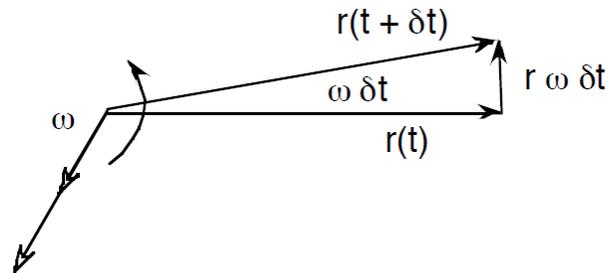


Figura 1.1 Sistema rotatorio representado por dos vectores

De la Figura 1.1 se observará que el cambio de la posición por el incremento del tiempo se define como

$$\frac{\vec{r}(t + \delta t) - \vec{r}(t)}{\delta t} \quad (1.1)$$

La magnitud del mismo se escribe como

$$\frac{r\omega\delta t}{\delta t} = r\omega$$

Y su dirección será perpendicular a ambos vectores  $\vec{r}$  y  $\vec{\omega}$ .

El vector de velocidad lineal se define con un producto cruz  $\vec{\omega} \times \vec{r}$ .

El vector de velocidad para un marco de referencia relativo es

$$\vec{v} = \dot{\vec{r}} + (\vec{\omega} \times \vec{r}) \quad (1.2)$$

Retomando la expresión anterior, se puede reescribir

$$\vec{v} = \dot{\vec{r}} + (\vec{\omega} \times \vec{r}) = \left( \frac{d}{dt} + \vec{\omega} \times \right) \vec{r}$$

Donde el elemento  $\left( \frac{d}{dt} + \vec{\omega} \times \right)$  es un operador de diferenciación en marco rotatorio, se le aplica nuevamente a la expresión de velocidad para poder obtener la aceleración del sistema.

$$\vec{a} = \left( \frac{d}{dt} + \vec{\omega} \times \right) \vec{v}$$

$$\vec{a} = \left( \frac{d}{dt} + \vec{\omega} \times \right) \left( \dot{\vec{r}} + (\vec{\omega} \times \vec{r}) \right) \tag{1.3}$$

Resolviendo se llega a la siguiente expresión

$$\vec{a} = \ddot{\vec{r}} + \vec{\omega} \times \dot{\vec{r}} + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \dot{\vec{r}} + \vec{\omega} \times \vec{\omega} \times \vec{r} \tag{1.4}$$

Donde es importante ordenar y desglosar los componentes de la aceleración. La Tabla 1.1 muestra un resumen. Este apartado es importante para referencias posteriores

Tabla 1.1 Componentes de la aceleración para un sistema rotatorio

Componente	Elemento equivalente
<i>Aceleración lineal</i>	$\ddot{\vec{r}}$
<i>Aceleración angular</i>	$\dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}$
<i>Efecto Coriolis</i>	$2(\vec{\omega} \times \dot{\vec{r}})$
<i>Aceleración centrípeta</i>	$\vec{\omega} \times \vec{\omega} \times \vec{r}$

Existen pues, dos formas para establecer las ecuaciones de movimiento de un rotor. Una es tomar una referencia fija que esté al margen del movimiento del rotor, en un sistema inercial de referencia. La otra opción es utilizar un punto del propio rotor como referencia. Si se trabaja con coordenadas cartesianas en 3D, el primer caso hará referencia a las coordenadas  $(X, Y, Z)$ , y el segundo usará las coordenadas  $(x, y, z)$

La comparación de ambos sistemas de referencia se da en la Figura 1.2 con un cuerpo genérico.

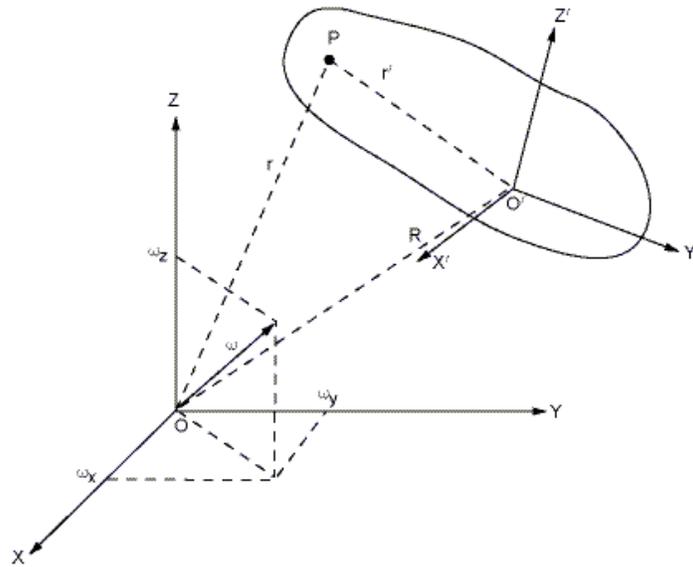


Figura 1.2 Marcos de referencia fijo y relativo.

Para elegir una referencia sobre la otra, se depende de las características del rotor. En general, un modelo de rotor axisimétrico es mejor para trabajarlo con un marco de referencia estacionario; en el caso contrario es preferible describirlo con un marco de referencia relativo.

Una nota importante es que en sistemas inerciales, no hay consideración por la fuerza centrífuga.

De lo anterior, se desprende que un cuerpo rígido genérico bajo el efecto de una fuerza  $\vec{F}$  y un momento  $\vec{M}$ , con referencia al citado marco en movimiento xyz, además del marco de rotación XYZ, debe cumplir con el siguiente sistema de ecuaciones

$$m\ddot{x} = F_x \quad (1.3a)$$

$$m\ddot{y} = F_y \quad (1.3b)$$

$$m\ddot{z} = F_z \quad (1.3c)$$

$$M_x = \dot{\omega}_x I_x + \omega_y \omega_z (I_z \nabla I_y) \quad (1.4a)$$

$$M_y = \dot{\omega}_y I_y + \omega_x \omega_z (I_x \nabla I_z) \quad (1.4b)$$

$$M_z = \dot{\omega}_z I_z + \omega_x \omega_y (I_y \nabla I_x) \quad (1.4c)$$

Donde  $\nabla$  hace referencia al gradiente.

De los seis grados de libertad que tendría este cuerpo y las ecuaciones vinculadas, tres corresponden a su traslación y tres a rotación. Estas últimas corresponden con las Ecuaciones de Euler, claramente no lineales por la velocidad angular  $\vec{\omega}$ .

La asunción de linealidad que se realiza a lo largo de este trabajo es una concesión importante, ya que se observa que las ecuaciones del cuerpo más sencillo son por fuerza no lineales. Pero en situaciones específicas, esta simplificación lleva a resultados bastante aceptables por su cercanía al sistema real.

### **1.3 Generalidades para describir el movimiento de un rotor**

Con las ideas anteriores, es posible ya considerar el comportamiento de un rotor, que es la base de toda máquina rotatoria.

En general, las turbomáquinas se componen de diversos elementos requeridos para una operación segura y eficiente. Trabajar matemáticamente con cada uno de los componentes de una máquina es complicado. Pero si se desea modelar el comportamiento del mismo es más sencillo esquematizar el rotor y sus apoyos en elementos genéricos y fundamentales.

La representación de la Figura 1.3 muestra un esquema clásico de un rotor y los soportes a través de un disco soportado por un eje apoyado a su vez en un par de chumaceras hidrodinámicas. Este modelo por su practicidad será retomado en capítulos posteriores.

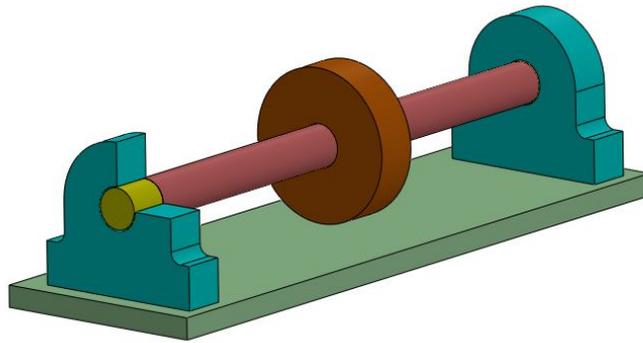


Figura 1.3 Esquema clásico de un rotor en turbomáquina.

El disco central es una simplificación de elementos como puede ser un impulsor, álabes, volantes u otros conjugados con propiedades físicas equivalentes. En el ejemplo ilustrado se muestra un disco, lo cual es útil para modelar muchos elementos reales (Figura 1.4), aunque algunas máquinas requieran dos discos o más para un mejor modelado; por ejemplo, una turbina de varias etapas en las que cada conjunto de álabes presenta una distinta inercia y es fundamentalmente independiente.



Figura 1.4 Impulsor de la turbina de vapor Coppus TF-12.

El eje se puede simplificar como una viga flexible sometida a una deformación por el peso del disco, si bien las formulaciones más sencillas para rotores lo pueden considerar un elemento completamente rígido e indeformable. En la Figura 1.3 se

observa que aunque es un solo elemento, los extremos –muñones- por su interacción con las chumaceras se detallan aparte.

El modelo de chumacera representado es plano y no presenta puntos de inyección de fluido, como el que se considera en este trabajo. Entre el muñón y la chumacera existe una capa de lubricante que es el elemento que sostiene al rotor como tal.

Conociendo la geometría general del sistema estudiado, se puede proceder a describir su movimiento. La dinámica de un rotor es muy semejante a la que tendría un modelo de masa-resorte; salvo por el detalle que el marco de referencia de este último es estacionario, y el del rotor suele ser rotacional [1.1]. Las diferencias específicas y la expresión matemática del sistema genérico anterior se discuten en el Capítulo 2, vinculadas a las nociones de vibraciones.

#### **1.4 Generalidades de chumaceras**

Una **chumacera** consiste en un cuerpo cilíndrico alrededor del cual gira un eje y que se usa en casi todos los tipos de maquinaria para soportar cargas radiales o como una guía para la suave transmisión de un par con un mínimo de pérdida de carga y mínimo desgaste [1.2]. Se pueden considerar varios tipos de chumaceras, clasificadas en función de su mecanismo de acción.

En cuanto al desarrollo de los soportes de las maquinarias, con la mayor difusión de las chumaceras hidrodinámicas, se resolvieron problemas de desgaste a costa de elementos no previstos en el desempeño, con origen en fenómenos hidrodinámicos. Hay que añadir que este tipo de apoyos requiere también una reserva constante de lubricante para su correcta operación, por lo que no siempre es factible su aplicación, aunque su uso es bastante generalizado.

Conforme se describieron mejor los efectos de una chumacera hidrodinámica, se consideró la presurización de la misma como una solución a ciertos fenómenos de

amplitud descontrolada. Por otro lado, existen pocos trabajos relacionados con soluciones analíticas debido a su alta complejidad; pero trabajos experimentales se han generado en el campo [Bently].

A grandes rasgos, una chumacera se representa siempre en un diagrama característico, visto en la Figura 1.5

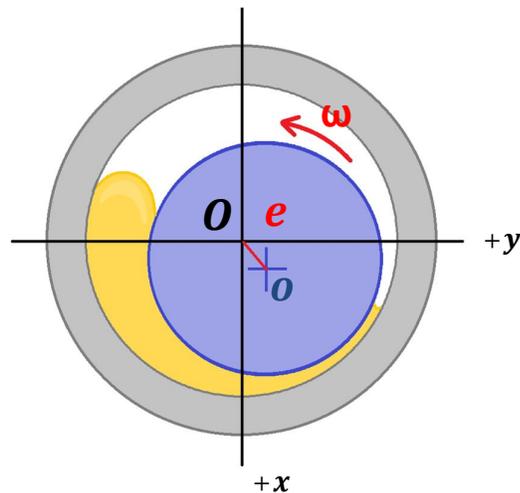


Figura 1.5 Esquema básico de una chumacera.

Se observan en la Figura la chumacera vista de perfil, con el muñón –en azul- y parte del espacio entre ambos ocupado por una capa de lubricante.

Se nota en la figura que el centro geométrico del extremo del muñón ( $o$ ) no coincide con el centro geométrico de la chumacera ( $O$ ). La distancia entre ambos recibe el nombre de **excentricidad** ( $e$ ). La Figura 1.5 muestra esta distancia indicada en rojo. Se demostrará que la magnitud de esta distancia está vinculada al comportamiento de la propia película de aceite de la chumacera y eventualmente del propio rotor.

Por convención, para el estudio de chumaceras, el eje X positivo es definido como el eje vertical hacia abajo, mientras que Y es el eje horizontal hacia la derecha. El cuadrante que forman ambos es el área de interés para medir los efectos de estudio (Figura 1.6)

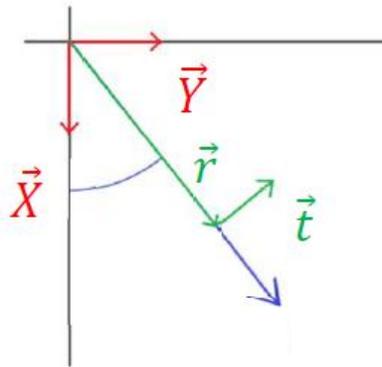


Figura 1.6 Convenciones asumidas y correspondencias de los sistemas de referencia empleados

También se observa en la figura la utilización de un sistema de referencia radial tangencial; particularmente útil por la geometría característica de las chumaceras y rotores en general.

La idea fundamental de utilizar un soporte flexible –como son las chumaceras hidrodinámicas- para una turbomaquinaria es la de minimizar la carga dinámica transmitida del rotor a su estructura de apoyo; además que permite una mejor operación del amortiguamiento y teóricamente una menor amplitud de vibración. Este último objetivo no siempre se cumple, como se estudia aquí posteriormente.

### 1.5 El número de Sommerfeld

Las características de desempeño de una chumacera hidrodinámica dependen de variables como las dimensiones de la misma, la viscosidad del fluido, la carga aplicada y la velocidad de operación, entre otros.

Todos estos efectos son considerados en un indicador adimensional, el **número de Sommerfeld** ( $S$ )[1.3].

$$S = \frac{\mu NLD}{W} \left( \frac{R}{C_r} \right)^2 \quad (1.3)$$

---

Donde  $\mu$  es el coeficiente de  $N$ ,  $L$  es la longitud de la chumacera y  $D$  su diámetro.  $W$  es la carga que tiene que soportar la chumacera, derivada obviamente del peso de los elementos del rotor.

En suma, este parámetro indica la capacidad de carga de una chumacera. Matemáticamente, la expresión relaciona la fuerza de carga generada en la película de lubricante con el peso del rotor que tiene que contrarrestar. Asimismo, este parámetro se vincula con la propia excentricidad de la chumacera.

Para el caso de la chumacera corta, se maneja ocasionalmente el número de Sommerfeld modificado ( $\sigma$ )[1.6], pues se ha demostrado en la práctica que el valor ajusta mejor a rotores reales.

$$\sigma = \frac{\mu NLR}{4W} \left( \frac{R}{C_r} \right)^2 \quad (1.4)$$

La diferencia entre ambos valores depende de las consideraciones para la adimensionalización de la fuerza ejercida por el campo de presión.

El valor del número de Sommerfeld describe el comportamiento de la chumacera. En general, valores muy altos se asocian a grandes cargas, velocidades de operación importantes y lubricantes muy viscosos. Condiciones todas para las cuales la excentricidad disminuye.

Un número de Sommerfeld bajo se relaciona con bajas cargas y velocidades de operación así como lubricantes más fluidos, donde la excentricidad es más importante. El tipo y las características de los apoyos son cruciales para determinar el comportamiento de un rotor.

La descripción y obtención de las fuerzas en una película de lubricante se observan en los Anexos A y B, así como en el Capítulo 3.

## 1.6 Efectos giroscópicos

Para explicar concretamente el significado de este fenómeno y su importancia en el presente trabajo, se pone a consideración un ejemplo práctico para después establecer la teoría.

Un **giroscopio** es un dispositivo mecánico formado por un cuerpo con simetría de rotación que gira alrededor de su eje de simetría y cuyo eje de giro no es fijo, sino que puede cambiar de orientación en el espacio [1.8].

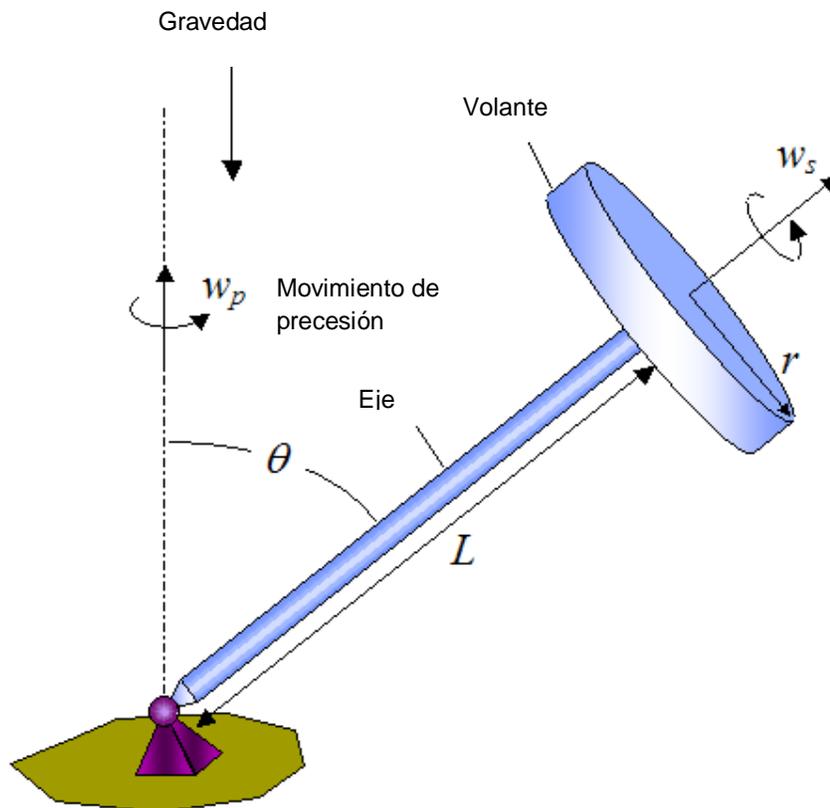


Figura 1.7 Esquema básico de un giroscopio. Tomado de real-world-physics-problems.com

Cuando se somete el giroscopio a un momento de fuerza que tiende a cambiar la orientación del eje de rotación, éste cambia de orientación girando respecto a un tercer eje, perpendicular tanto del cual se lo ha empujado a girar, como a su eje

de rotación inicial. De forma inversa, un giro aplicado respecto a dicho eje perpendicular genera un momento de fuerza.

Al girar a altas velocidades durante su operación, los rotores también están sujetos a los mismos efectos físicos de fuerzas de inercia y momentos [1.4].

Si el rotor tiene un gran momento de inercia se requiere de la aplicación de un momento de fuera importante para cambiar la orientación del eje si este va girando a una gran velocidad. Esto cambia las velocidades críticas, que se vuelven función de la velocidad de operación del propio rotor.

### **1.7 Inestabilidad y estabilidad**

Debido a las aplicaciones prácticas de los rotores, es importante que estos operen de forma controlada, por decir estable. Esta idea de estabilidad –y por lo tanto la de inestabilidad- implica un significado matemático bastante preciso, pero a la vez un sentido intuitivo de algo que acontece en la realidad. Es importante contar entonces con un criterio de estabilidad definido de forma estricta.

Si se considera un caso de un sistema rotor-chumaceras en reposo, las fuerzas de los apoyos y el peso están en perfecto equilibrio. Si se afecta este rotor con una fuerza externa, en el caso una posición de equilibrio inestable, no tendería a volver al equilibrio inicial, sino que se movería y se alejaría más de esta posición. Un sistema estable terminaría asumiendo la posición inicial de equilibrio.

El análisis de las ecuaciones de movimiento del sistema, considerando los coeficientes de rigidez y amortiguamiento de las chumaceras, permite determinar si se produce este alejamiento o retorno a la posición de equilibrio inicial, en otras palabras, la estabilidad del sistema. Este es un objetivo fundamental para la caracterización de un rotor.

Existen varios métodos para determinar la estabilidad del sistema dinámico. La primera opción corresponde a resolver las ecuaciones de movimiento con

condiciones iniciales. De las raíces de las ecuaciones características es posible determinar si el sistema es estable o no. Sin embargo, no siempre es posible resolver un sistema, dependiendo de su complejidad y las particularidades matemáticas del mismo que afectan a la convergencia o divergencia.

El método más socorrido es el uso de un criterio de estabilidad. Este se enfoca en el análisis del propio sistema para determinar si es estable o no. Existen varios criterios, considerando primeramente el criterio de Liapunov. Este se considera el más completo y asimismo uno de los más robustos.

En una definición más formal del criterio citado [1.9], considerando un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias

$$\frac{dy_i}{dt} = f_i(t, y_1, y_2 \dots y_n) \quad (1.5)$$

Donde  $i = 1, 2, \dots, n$  y además las derivadas parciales

$$\frac{\partial f_i}{\partial y_k} = (i, k = 1, 2 \dots n) \quad (1.6)$$

Existen y son continuas, siendo que hay una función  $\varphi_i(t)$  ( $i = 1, 2 \dots n$ ) que específicamente es la solución que permite que para  $t = t_0$

$$\varphi_i(t_0) = \varphi_i^0 (i = 1, 2 \dots n) \quad (1.7)$$

La función solución  $\varphi_i(t)$  ( $i = 1, 2 \dots n$ ) se define como estable por criterio de Liapunov para  $t \rightarrow +\infty$  si para cualquier diferencia  $\varepsilon > 0$  es posible elegir una  $\delta(\varepsilon) > 0$  que permita que cualquier solución  $y_i(t) = (i = 1, 2 \dots n)$  del sistema satisfaga las desigualdades de la forma

$$|y_i(t_0) - \varphi_i^0| < \delta(\varepsilon) \quad (i = 1, 2 \dots n) \quad (1.8)$$

Y si para cualquier tiempo  $t \gg t_0$

$$|y_i(t) - \varphi_i(t)| < \varepsilon \quad (i = 1, 2 \dots n) \quad (1.9)$$

Si alguna de estos grupos de desigualdades no llegara a cumplirse, entonces el sistema descrito será calificado como inestable.

Si en cambio, la solución  $\varphi_i(t)$  ( $i = 1, 2 \dots n$ ) satisface las desigualdades anteriores y además se demuestra que cumple la condición

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} |y_i(t) - \varphi_i(t)| = 0 \quad (i = 1, 2 \dots n) \quad (1.10)$$

Cuando  $|y_i(t_0) - \varphi_i^0| < \delta_1$ , entonces la solución  $\varphi_i(t)$  es estable asintóticamente.

Determinar la estabilidad del sistema (1.5) puede limitarse al llamado problema de estabilidad de solución trivial  $x_i(t) \equiv 0$ , de un sistema nuevo de ecuaciones que se obtiene al sustituir linealmente las ecuaciones buscadas

$$x_i(t) = y_i(t) - \varphi_i(t) \quad (i = 1, 2 \dots n) \quad (1.11)$$

Donde  $x_i(t)$  son las nuevas incógnitas iguales a las desviaciones de las funciones incógnitas anteriores  $y_i(t)$  de las funciones  $\varphi_i(t)$  que determinan la solución a examinar. Por consecuencia de lo anterior, la estabilidad se considera en el punto de reposo que se encuentra en el origen de las coordenadas del sistema de ecuaciones

$$\frac{dx_i}{dt} = y_i(t) - \varphi_i(t) \quad (i = 1, 2 \dots n) \quad (1.12)$$

En su aplicación en el punto de reposo  $x_i(t) \equiv 0$  ( $i = 1, 2 \dots n$ ) la condición de estabilidad de Liapunov establece que para cada  $\varepsilon > 0$  se puede elegir un  $\delta(\varepsilon) > 0$  tal que de la desigualdad

$$|x_i(t_0)| < \delta(\varepsilon) \quad (i = 1, 2 \dots n) \quad (1.13)$$

Se puede afirmar que

$$|x_i(t)| < \varepsilon \quad (i = 1, 2 \dots n) \quad (1.14)$$

Para toda  $t \gg t_0$

De forma física, la estabilidad de un sistema rotor-chumaceras puede observarse directamente. Es así como se han estudiado fenómenos presentes durante la operación de estos sistemas. Por cuestiones de economía y seguridad, es importante prever la estabilidad de un sistema rotatorio antes de su operación, evitando los subsiguientes fenómenos.

El **volanteo (whirl)** es el fenómeno que se presenta durante la operación de un rotor en la cual el centro de masa o el centro geométrico orbitan alrededor del centro de la chumacera (u otro punto de referencia). En chumaceras hidrodinámicas. Éste se define como **latiguelo (oil whip)**

El volanteo implica el balance de las fuerzas inerciales, las fuerzas de restitución de los apoyos y las fuerzas elásticas del eje.

El volanteo de un eje es causado por un desbalance de la masa del eje. La fuerza centrífuga (inercial) flexiona el eje y desvía su centro del centro de los apoyos a los extremos. La intensidad de la fuerza centrífuga se calcula como

$$F_c = me\omega^2 \quad (1.15)$$

Donde  $m$  es la masa del eje,  $\omega$  es la velocidad de operación, y  $e$  la excentricidad.

El eje se comporta como un resorte por su propia rigidez y genera una fuerza de restitución. Suponiendo linealidad, se tiene que la misma es proporcional a la deformación

$$F_K = kx \quad (1.16)$$

Otro punto de interés respecto a la estabilidad, es que la flexibilidad de un eje afecta negativamente la estabilidad del rotor. Y puesto que la flexibilidad –o

rigidez, en sentido estricto- de un eje es una de las propiedades del mismo, su efecto tiene que ser considerado para predecir el comportamiento de un rotor.

### **1.8 Consideraciones importantes de la rotodinámica**

Como se observa en el apartado anterior, hay consideraciones prácticas muy importantes que llevaron al desarrollo de la rotodinámica y sus análisis. Se comprenderá entonces que los objetivos principales de la rotodinámica en sí son los siguientes [1.1].

- Determinar las velocidades críticas de operación que estuvieran asociadas con la máxima vibración del sistema del rotor.
- Determinar las frecuencias naturales de vibración torsional del rotor.
- Predecir la magnitud y las características de vibración de un rotor, que son función de su amortiguamiento y desbalance.

En el diseño de turbomaquinaria, por ejemplo un compresor o una bomba, hay consideraciones acordes a la función específica de la misma. Éstas no necesariamente coinciden con las necesidades de la propia rotodinámica del elemento, y a menudo hay que potenciar una en detrimento de otra. Pero no deben perderse de vista los elementos básicos de toda máquina que funciona en rotación.

- Evitar las velocidades críticas, o en su defecto minimizar la resonancia tanto del rotor como su transmisión a los soportes al pasar por éstas.
- En el caso de álabes o sellos, evitar una interferencia entre elementos que lleve a excitaciones.
- Evitar la inestabilidad rotodinámica.

Si se comparan estos lineamientos con los objetivos y justificaciones del trabajo, se encuentra una correspondencia importante.

---

## Capítulo 2 – Vibraciones y modelos vibratorios

---

El siguiente capítulo es una descripción respecto a la teoría de vibraciones, preámbulo indispensable para el fundamento de esta tesis. Si bien es parte del marco teórico, la extensión del tema obliga a dedicar un capítulo completo.

En éste se asumen y definen conceptos básicos de importancia, tomando un modelo de un solo grado de libertad. Se consideran los efectos y ausencias de amortiguamiento y excitación, así como su significancia física. Muchos de estos efectos tienen también un trasfondo matemático que se detalla al ser vital para analizar los resultados a obtener.

Se sigue este trabajo para modelos de varios grados de libertad en una forma general y se añaden consideraciones importantes.

Finalmente, se aplican todos los elementos anteriores al tema de interés que es la modelación de rotores, considerando los elementos de los mismos y otros puntos importantes. De los modelos generados, se procederá a su solución, que conformarán resultados de la tesis.

### 2.1 Modelo vibratorio en un solo grado de libertad.

En particular, se define como una **vibración** a cualquier movimiento oscilatorio de un cuerpo o sistema alrededor de un punto de equilibrio [1.1]. Este concepto se verá mejor ilustrado mediante un ejemplo.

Sea una masa suspendida de un marco rígido por medio de un resorte con rigidez conocida, con un amortiguador añadido y que es perturbado por una fuerza que se describe en función del tiempo, tal y como se muestra en la Figura 2.1.

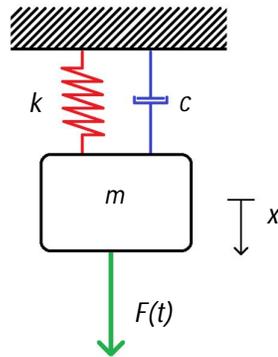


Figura 2.1 Modelo masa-resorte-amortiguador con excitación externa.

Donde  $m$  es la masa del bloque,  $k$  la rigidez asociada al resorte,  $c$  el coeficiente de amortiguamiento y  $F(t)$  una fuerza de excitación que pudiera ser descrita como armónica y en general es función del tiempo.

Se considera para simplificación que el movimiento del bloque se da como si fuera una partícula, y únicamente en la dirección vertical. El desplazamiento se indica mediante la variable  $x$ . Puesto que basta la variable  $x$  para definir la posición del sistema en cualquier momento, este sistema se define como de un solo grado de libertad.

Este modelo se conoce como masa-resorte-amortiguador. Prácticamente cualquier sistema dinámico puede representarse en forma simplificada de esta forma o en combinaciones del mismo. La ecuación referente al mismo es:

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F(t) \quad (2.1)$$

La cual deriva de la aplicación de las Leyes de Newton, siendo el modelo más básico y general manejable en la teoría de rotores y en dinámica en general, donde se consideran efectos de la fuerza asociada con la aceleración, el amortiguador y el resorte.

Es importante aclarar que esta ecuación se considerará para todos los efectos posteriores como lineal y de coeficientes constantes. De otra forma, no es posible describirla analíticamente como se procede a continuación. La solución para

coeficientes no constantes involucra métodos numéricos y se explica a mayor detalle en el Capítulo 4.

### 2.1.1 Vibraciones libres y forzadas sin amortiguamiento.

Retomando el modelo anterior, considerando que no tuviera amortiguamiento y la excitación externa fuera inexistente, en forma física se tendrían los elementos de la Figura 2.2.

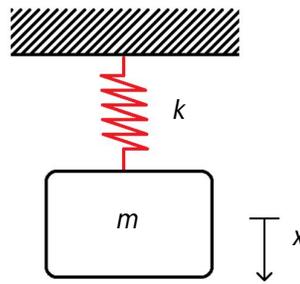


Figura 2.2 Modelo masa-resorte en vibración libre

Se le conoce como modelo masa-resorte. Matemáticamente, la ecuación (2.1) que gobierna su movimiento puede simplificarse como:

$$m\ddot{x} + kx = 0 \quad (2.2)$$

Nótese que el peso no se incluye en la ecuación anterior, puesto que  $x$  se mide a partir del equilibrio entre el peso del bloque y la fuerza ejercida por el resorte que lo colocaría en una posición estática. Esta consideración se conoce como precarga. En el caso de los ejes de los rotores, existe también una deformación por precarga a considerar de forma análoga.

La solución de su ecuación característica, tomando en cuenta valores constantes para los coeficientes será entonces

$$m\lambda^2 + k = 0 \quad (2.3a)$$

$$\lambda = \pm \sqrt{k/m} \, i \quad (2.3b)$$

La solución en general tendrá la forma:

$$x = C_1 \cos(\sqrt{k/m} t) + C_2 \text{Sen}(\sqrt{k/m} t) \quad (2.4)$$

Donde el valor  $\sqrt{k/m}$  que aparece como argumento en la solución es de gran significancia física. Es la **frecuencia natural**, una propiedad inherente al sistema al depender de su masa y rigidez. Si se perturba ligeramente el sistema, tenderá a oscilar a esta frecuencia independientemente de la excitación.

Aunque el sistema propuesto no se encuentra en la realidad pues siempre habrá amortiguamiento tanto interno como externo, el resultado obtenido se considera un parámetro de diseño básico para el diseño de cualquier sistema dinámico, particularmente para un rotor.

Añadiendo una excitación periódica al modelo ahora es posible calcular las amplitudes de vibración, que dependen de dicha fuerza perturbadora. El modelo físico luciría como en la Figura 2.2.

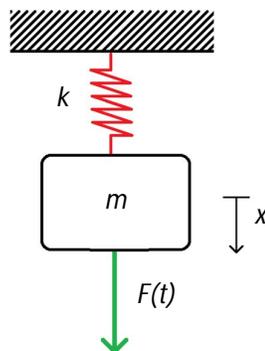


Figura 2.3 Modelo masa-resorte en vibración forzada

La ecuación de movimiento es entonces no homogénea.

$$m\ddot{x} + kx = F(t) \quad (2.5)$$

Matemáticamente implica una solución compuesta por dos partes, una solución homogénea y general, así como otra particular.

$$x = x_h + x_p \quad (2.6)$$

La respuesta homogénea o general ya está disponible, pues corresponde al caso en que no hay fuerza de excitación. Para la solución particular, si se define una fuerza excitatriz tal que sea armónica:

$$F(t) = F_0 \text{Sen}(\omega t) \quad (2.7)$$

En este caso, al ser el problema acotado como linear, la fuerza definida como armónica permite una respuesta que no necesariamente se observa en la realidad, pero sirve para ejemplificar los conceptos básicos respecto al trabajo con vibraciones.

Para obtener la respuesta particular a partir de la fuerza excitatriz armónica, existen varios métodos para ecuaciones diferenciales ordinarias. Uno de ellos es asumir la respuesta por medio del método de coeficientes indeterminados. Así, una propuesta de solución –y sus derivadas respecto al tiempo- serían:

$$x_p = a \text{Cos}(\omega t) + b \text{Sen}(\omega t) \quad (2.8a)$$

$$\dot{x}_p = -a\omega \text{Sen}(\omega t) + b\omega \text{Cos}(\omega t) \quad (2.8b)$$

$$\ddot{x}_p = -a\omega^2 \text{Cos}(\omega t) - b\omega^2 \text{Sen}(\omega t) \quad (2.8c)$$

Donde  $a$  como  $b$  son coeficientes desconocidos pero constantes y  $\omega$  es la frecuencia de la propia excitación. En términos prácticos para el caso de esta tesis, hace referencia a la velocidad de operación de un motor, que sería la fuente de excitación para un rotor. Esto se verá más claramente en modelos más específicos.

Si la propuesta es efectivamente solución, se pueden sustituir (2.7) y (2.8) en la ecuación (2.2) y queda:

$$-m\omega^2 \text{Cos}(\omega t) - m\omega^2 \text{Sen}(\omega t) + k\text{Cos}(\omega t) + k\text{Sen}(\omega t) = F_0 \text{Sen}(\omega t) \quad (2.9)$$

Reescribiendo la expresión anterior se tiene una ecuación trascendente

$$a[k - m\omega^2] \text{Cos}(\omega t) + b[k - m\omega^2] \text{Sen}(\omega t) = F_0 \text{Sen}(\omega t)$$

Del análisis detenido de los coeficientes de la ecuación se observa que para que se cumpla la condición de solución, debe cumplirse que:

$$a[k - m\omega^2] = 0 \quad (2.10)$$

$$b[k - m\omega^2] = F_0 \quad (2.11)$$

Para la ecuación (2.10), se tiene que  $a = 0$  o bien  $\omega = \sqrt{k/m}$ ; dada la última condición implica una operación a velocidad única, se desecha y se considera que el coeficiente  $a$  tiene valor de cero.

El análisis de la condición (2.11) es más interesante, ya que se obtiene despejando el valor del coeficiente  $b$  y se tiene que la respuesta particular para el caso es:

$$x_p = \frac{F_0}{k - m\omega^2} \text{Sen}(\omega t) \quad (2.12)$$

Se observa que esta solución es armónica también, lo que coincidiría con el modelo físico, que en ausencia de amortiguamiento debería oscilar indefinidamente. Y la amplitud máxima con que lo haría depende de la fuerza y frecuencia excitación así como su masa y rigidez.

$$A = \frac{F_0}{k - m\omega^2} \quad (2.13)$$

Si se multiplica y divide la expresión anterior entre la rigidez del resorte del sistema, se reescribe la ecuación anterior como:

$$A = \frac{F_0/k}{(k - m\omega^2)/k} = \frac{F_0/k}{1 - m\omega^2/k}$$

Se recordará del caso de la oscilación libre y no amortiguada el parámetro  $\sqrt{k/m}$ , que se denominó frecuencia natural y que se denotará a partir de ahora como  $\omega_n$ . La amplitud de vibración máxima será en función de la frecuencia natural y la de operación:

$$A = \frac{F_0/k}{1 - (\omega/\omega_n)^2} \quad (2.14)$$

De la función de amplitud así obtenida, considerando que  $\omega$  es una velocidad de operación y que cambia con el tiempo de forma paulatina, se obtendría una gráfica en la cual la amplitud máxima para el movimiento del sistema cambia conforme lo hace la operación

Asignando valores arbitrarios de  $F_0 = 10 \text{ N}$ ,  $m = 5 \text{ kg}$  y  $k = 50 \frac{\text{N}}{\text{m}}$  para efectos ilustrativos se observa dicha gráfica en la Figura 2.3.

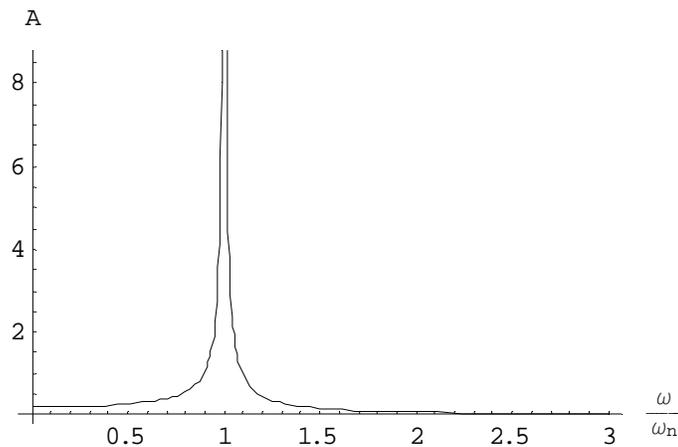


Figura 2.4 Amplitud de vibración para modelo sin amortiguamiento

La amplitud está dada en metros, y se da de forma absoluta. La parte más notoria de esta ilustración es una discontinuidad, precisamente en el punto donde el valor del coeficiente  $\omega/\omega_n$  se iguala a 1, lo que implica una operación a la misma frecuencia que la natural del sistema. Este fenómeno se denomina resonancia.

Teóricamente, entre más se acerque uno a este valor, las oscilaciones del sistema crecerían indefinidamente y el sistema terminaría por colapsar.

Si bien lo que ocurre realmente se verá en el caso amortiguado, la perspectiva de llegar a una frecuencia natural durante la operación es un asunto de cuidado; ello justifica su definición anterior y uso como parámetro de diseño.

### 2.1.2 Vibraciones libres y forzadas con amortiguamiento

Volviendo al modelo original de la Figura (2.1) y su respectiva Ecuación (2.1), con un amortiguamiento de origen interno y una excitación externa dependiente del tiempo, la ecuación de movimiento es no homogénea nuevamente. Donde la primera parte de la respuesta depende del propio sistema y la segunda es relativa a la fuerza de excitación. Procediendo a resolver primero la solución homogénea que corresponde a la primera parte de la solución completa, se simplifica la ecuación a la expresión

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0 \quad (2.15)$$

Lo que físicamente es igual a tener el modelo ilustrado en la figura

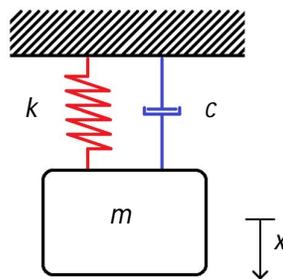


Figura 2.5 Modelo masa-resorte-amortiguador sin excitación externa

La ecuación característica de la ecuación diferencial es entonces:

$$m\lambda^2 + c\lambda + k = 0 \quad (2.16)$$

Es posible aplicar la fórmula general para ecuaciones algebraicas de segundo grado. El parámetro  $\lambda$  puede tomar dos valores en este caso.

$$\lambda = -\frac{c}{2m} \pm \sqrt{\frac{c^2}{4m^2} - \frac{k}{m}} \quad (2.17)$$

Resolviendo la ecuación característica se podrán observar entonces tres posibilidades para la solución, dependiendo del valor de los coeficientes

**A)** Si  $\frac{c^2}{4m^2} > \frac{k}{m}$ , entonces los valores del parámetro  $\lambda$  serán valores reales y distintos entre sí la solución tomará la forma general siguiente

$$x_h = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t} \quad (2.18)$$

En forma física, se habla de un sistema sobreamortiguado, cuyo movimiento es mostrado en un ejemplo de forma gráfica en la Figura.

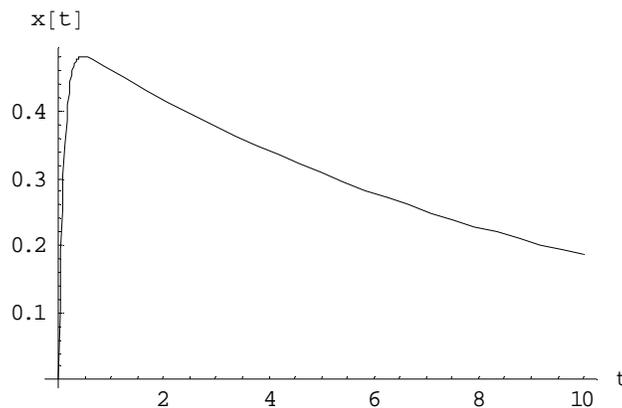


Figura 2.6 Comportamiento de un sistema masa-resorte-amortiguador sin excitación sobreamortiguado

Ésta gráfica y las subsiguientes ilustran en un ejemplo donde se resuelve la ecuación homogénea, la masa es unitaria y los coeficientes  $c$  y  $k$  de amortiguamiento y rigidez cambian. Se considera que el cuerpo parte del punto

de equilibrio a una velocidad de 5 m/s como condiciones iniciales, aunque estas no sean de interés para el análisis. Para la gráfica anterior,  $k = 1$ ,  $c = 10$ .

**B)** Si  $\frac{c^2}{4m^2} < \frac{k}{m}$  el amortiguamiento es débil en relación a la rigidez del resorte y la masa tenderá a oscilar alrededor del punto de equilibrio, como se muestra en la figura.

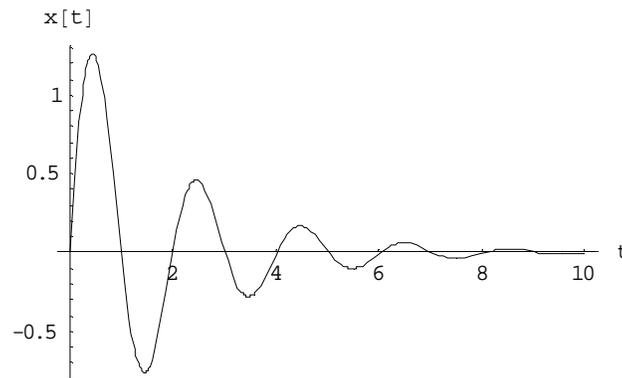


Figura 2.7 Comportamiento de un sistema masa-resorte-amortiguador sin excitación subamortiguado

Esta gráfica viene de la solución del sistema homogéneo con valores  $k = 10$ ,  $c = 1$ . El parámetro  $\lambda$  toma valores complejos y la solución se expresará, en relación con el puente de Euler en la forma general

$$x_h = e^{\alpha t} [C_1 \cos(\beta t) + C_2 \sin(\beta t)] \quad (2.19)$$

Donde  $\alpha$  y  $\beta$  quedan definidos por las partes que conforman al parámetro  $\lambda$

$$\lambda = \alpha \pm \beta i$$

**C)** Finalmente, si se tuviera el caso especial en que  $\frac{c^2}{4m^2} = \frac{k}{m}$ , entonces el parámetro  $\lambda$  tomaría valores reales iguales para conducir a la respuesta general

$$x_h = C_1 e^{\lambda t} + C_2 t e^{\lambda t} \quad (2.20)$$

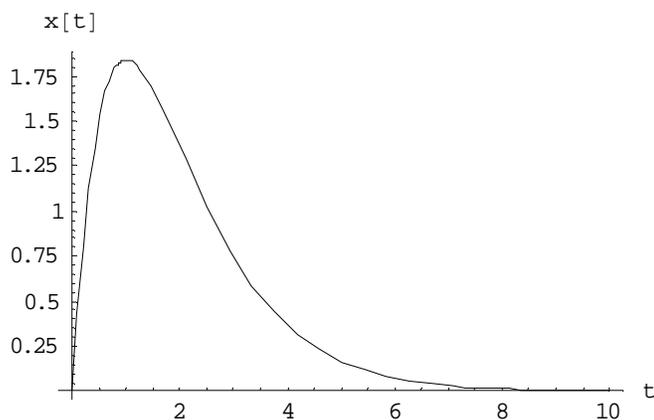


Figura 2.8 Comportamiento de un sistema masa-resorte-amortiguador sin excitación críticamente amortiguado

Para la obtención de la gráfica se asignaron los valores  $k = 1$ ,  $c = 2$ .

Éste caso en particular tiene gran significancia práctica, pues implica que el sistema tenderá siempre a volver al equilibrio rápidamente, algo deseable en varias aplicaciones incluyendo la rotodinámica. Se comprenderá también la relación con el concepto intuitivo de estabilidad expuesto en el Capítulo 1.

Se observará de las tres gráficas obtenidas que independientemente del valor de los coeficientes de la ecuación, la respuesta homogénea tiende a cero después de un periodo de tiempo relativamente corto. La solución particular entonces es la solución importante desde el punto de vista físico pues representa la respuesta estacionaria y el comportamiento del sistema en operación.

Tomando la propuesta de solución al caso no amortiguado y sus derivadas.

$$\begin{aligned}x_p &= a\cos(\omega t) + b\sin(\omega t) \\ \dot{x}_p &= -a\omega\sin(\omega t) + b\omega\cos(\omega t) \\ \ddot{x}_p &= -a\omega^2\cos(\omega t) - b\omega^2\sin(\omega t)\end{aligned}$$

Sustituyendo nuevamente en la ecuación (2.)

$$\begin{aligned}-ma\omega^2\cos(\omega t) - mb\omega^2\sin(\omega t) - ca\omega\sin(\omega t) + cb\omega\cos(\omega t) \\ + ka\cos(\omega t) + kb\sin(\omega t) = F_0\sin(\omega t)\end{aligned}\tag{2.21}$$

Agrupando los términos trascendentes la expresión queda como

$$[ka + cb\omega - ma\omega^2]\text{Cos}(\omega t) + [kb - ca\omega - mb\omega^2]\text{Sen}(\omega t) = F_0\text{Sen}(\omega t)$$

Para que la condición de solución se resuelva, entonces se plantea un sistema de ecuaciones lineales de 2x2 a partir de los coeficientes de la expresión original

$$[k - m\omega^2]a + c\omega b = 0 \quad (2.22)$$

$$-c\omega a + [k - m\omega^2]b = F_0 \quad (2.23)$$

El sistema se puede resolver fácilmente con ayuda de la regla de Cramer. Se tiene entonces que

$$a = \frac{\begin{vmatrix} 0 & c\omega \\ F_0 & k - m\omega^2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} k - m\omega^2 & c\omega \\ -c\omega & k - m\omega^2 \end{vmatrix}} \quad (2.24)$$

$$b = \frac{\begin{vmatrix} k - m\omega^2 & 0 \\ -c\omega & F_0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} k - m\omega^2 & c\omega \\ -c\omega & k - m\omega^2 \end{vmatrix}} \quad (2.25)$$

La solución de cada uno de los determinantes dará el valor de los coeficientes indeterminados

$$a = \frac{-F_0 c\omega}{(k - m\omega^2)^2 + (c\omega)^2} \quad b = \frac{-F_0(k - m\omega^2)}{(k - m\omega^2)^2 + (c\omega)^2}$$

Con lo cual la solución particular puede expresarse como

$$x_p = \frac{-F_0 c\omega}{(k - m\omega^2)^2 + (c\omega)^2} \text{Cos}(\omega t) + \frac{-F_0(k - m\omega^2)}{(k - m\omega^2)^2 + (c\omega)^2} \text{Sen}(\omega t) \quad (2.26)$$

Sin embargo, de esta forma es difícil establecer el valor de las amplitudes máximas. Por ello se apela al uso de la siguiente identidad trigonométrica

$$a\text{Cos}\theta + b\text{Sen}\theta = M\text{Sen}(\theta + \phi) \quad (2.27)$$

Donde

$$M^2 = a^2 + b^2$$

$$\text{Tan } \phi = \frac{b}{a}$$

Se resuelve en consecuencia para este caso.

$$M^2 = \frac{[(k - m\omega^2)^2 + (c\omega)^2]}{[(k - m\omega^2)^2 + (c\omega)^2]^2} F_0^2 \quad (2.28)$$

$$\text{Tan } \phi = \frac{\frac{-F_0(k - m\omega^2)}{(k - m\omega^2)^2 + (c\omega)^2}}{\frac{-F_0 c\omega}{(k - m\omega^2)^2 + (c\omega)^2}} \quad (2.29)$$

Con lo que la respuesta se puede expresar también como

$$x_p = \frac{F_0}{\sqrt{(k - m\omega^2)^2 + (c\omega)^2}} \text{Sen} \left( \omega t + \text{ArcTan} \left( \frac{(k - m\omega^2)}{c\omega} \right) \right) \quad (2.30)$$

Con lo que se concluye que la amplitud máxima de vibración está determinada mediante

$$A = \frac{F_0}{\sqrt{(k - m\omega^2)^2 + (c\omega)^2}} \quad (2.31)$$

Si se realiza el mismo tratamiento de dividir entre la rigidez, y poniéndolo en función de la frecuencia natural, se reescribe

$$A = \frac{F_0/k}{\sqrt{(1 - (\omega/\omega_n)^2)^2 + (c\omega/k)^2}} \quad (2.32)$$

Del análisis de esta expresión, considerando que  $\omega$  de operación del motor es una variable, se puede graficar la expresión como función. Se toma el caso del ejemplo anterior con un amortiguamiento añadido  $c = 2$

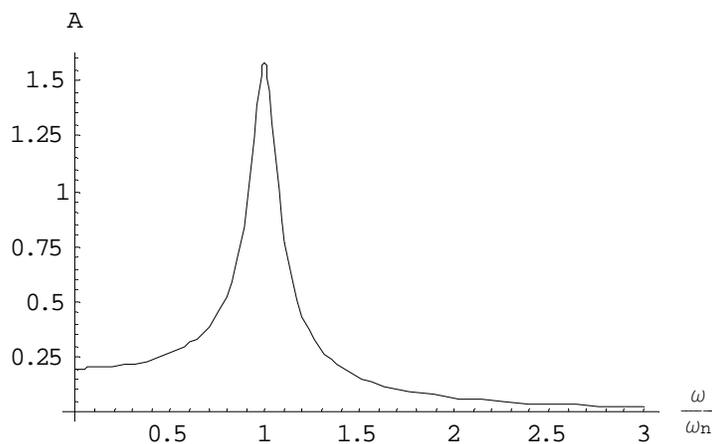


Figura 2.9 Amplitud de vibración para modelo amortiguado

Se explicó anteriormente que cuando  $\omega/\omega_n \rightarrow 1$ , se llega a la frecuencia natural del sistema al operar la frecuencia de excitación se daba la resonancia que coincidía con una discontinuidad. Pero esta vez existe un término que la impide y le da un límite máximo a la amplitud máxima posible durante este fenómeno. La amplitud de vibración no puede ir más allá del valor:

$$A = \frac{F_0}{c\omega_n}$$

Lo que no impide que siga siendo un fenómeno a evitar. En el caso de una turbomáquina, esta distancia puede ser mayor o igual a un claro y sería fuente de problemas de rozamiento o de otro tipo. Las implicaciones más aplicadas al tema de interés se verán con respecto a modelos más específicos y aplicaciones reales.

## 2.2 Modelo vibratorio para múltiples grados de libertad

En algunos casos es posible aplicar el modelo analizado en las entradas anteriores. Sin embargo, para rotores y en general sistemas más complejos, se requieren de más grados de libertad a analizar. Es decir, se usan varias variables que determinen las posiciones del sistema en un momento cualquiera.

Considerando los resultados anteriores, la inclusión de los múltiples grados de libertad en la ecuación general del sistema se da como:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{x}} + \mathbf{K}\mathbf{x} = \mathbf{F}(t) \quad (2.34)$$

Donde  $\mathbf{M}$ ,  $\mathbf{C}$  y  $\mathbf{K}$  representan matrices de inercia, amortiguamiento y rigidez respectivamente. En los más casos, estas matrices son simétricas.

Hasta ahora se han analizado simples bloques que se trasladan; como se ha recalado, la rotación genera fenómenos adicionales, particularmente los efectos giroscópicos. Además, la rotación genera cambios en cuanto a la rigidez y amortiguamiento de un cuerpo.

En principio, ambos efectos son no lineales, pero es posible aproximarlos si a la expresión 2.34 se le consideran mediante una aproximación de elementos matriciales que representan los efectos de la inercia –efectos giroscópicos- y el amortiguamiento por la rotación del rotor, representadas como  $\mathbf{G}$  y  $\mathbf{B}$

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}} + (\mathbf{G} + \mathbf{C})\dot{\mathbf{x}} + (\mathbf{B} + \mathbf{K})\mathbf{x} = \mathbf{F}(t) \quad (2.35)$$

Se asume que el rotor es axisimétrico y va rotando a una velocidad de operación fija. Las matrices de efectos giroscópicos y el amortiguamiento por rotación cambian conforme cambia la velocidad de trabajo del rotor.

En este planteamiento, las frecuencias naturales dependen directamente de los grados de libertad del modelo al equivaler a los eigenvalores del mismo cuando se plantea en forma matricial.

El eigenproblema así planteado se resuelve encontrando los eigenvalores que hacen posible que la solución del sistema sea homogénea sin ser trivial. Estos valores son, de forma física, las frecuencias naturales de vibración del sistema a las que tenderá a vibrar independientemente de la intensidad de una perturbación externa.

El caso más probable de solución para un rotor real es que se encuentre subamortiguado. Por lo tanto, los eigenvalores o soluciones tendrán una parte real y una imaginaria.

Al igual que en los casos anteriores, se debe de asignar una solución posible, armónica. El trabajo relativo se indica en el siguiente apartado.

### 2.3 El Rotor de Jeffcott

Después de la descripción de los modelos de masa-resorte-amortiguador, se puede hablar de los modelos específicos para rotores.

En un amplio sentido, un rotor puede trabajarse como uno de los sistemas ya propuestos, siempre y cuando esté en reposo. Pero como un rotor necesariamente opera, es entonces cuando se deben considerar los efectos a ese movimiento, particularmente giroscópicos, los cuales no son estudiados por los modelos anteriores.

El modelo más sencillo para estudiar un sistema vibratorio para rotodinámica es conocido como el rotor de Jeffcott, Laval o Laval-Jeffcott (1919). Consiste en su versión original en un disco plano con un desbalance de masa sujeto por un eje flexible uniforme de masa despreciable que está soportado en sus extremos por apoyos rígidos y sin fricción.

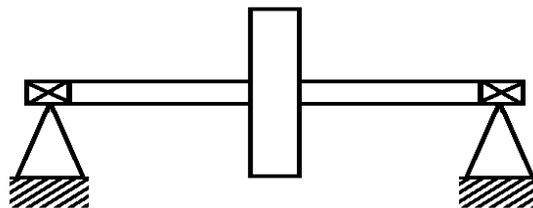


Figura 2.10 Rotor de Jeffcott en vista de perfil

Un punto importante del modelo ya descrito es que se ideó para trabajar con los problemas de volanteo sincrónico –aunque los problemas más graves durante la operación de un rotor están más relacionados con el volanteo no sincrónico-.

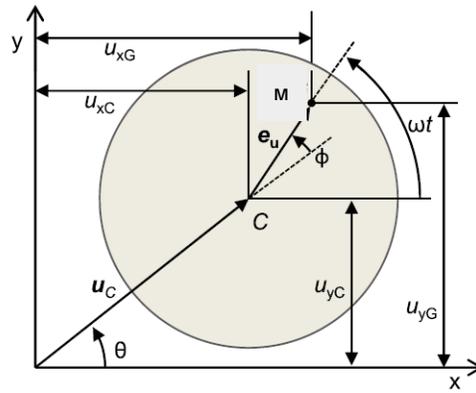


Figura 2.11 Disco del Rotor de Jeffcott

Para describir el movimiento del rotor de Jeffcott se debe considerar que entre el centro geométrico del disco C y el centro de masa M existe una distancia, o excentricidad. Se asume que se tiene un sistema de referencia externo. Los efectos gravitatorios se asumen como irrelevantes en comparación a los efectos inerciales.

El eje se asume como una viga uniforme de sección circular simplemente apoyada en los extremos. La rigidez del mismo en una forma muy simplificada se puede obtener como

$$k = \frac{48EI}{L^3} \tag{2.36}$$

Donde  $E$  es el módulo elástico de la viga,  $L$  representa la longitud del eje y se tiene que  $I$  es el momento de inercia de área. Dado que se asume que el eje tiene una sección circular uniforme de diámetro  $D$ .

$$I = \frac{\pi D^4}{64} \tag{2.37}$$

La flexibilidad del eje genera la deformación del rotor por efecto de su propio peso, que en este modelo generará la única perturbación del mismo por el

desbalance. Esta deformación en la vertical, asumiendo el peso concentrado justo a la mitad del eje, sigue la función

$$y = -\frac{PL^3}{16EI} \left(1 - \frac{4x^2}{3L^2}\right) \quad (2.38)$$

Donde  $P$  o la carga representaría el peso conjunto de rotor y eje.

En este modelo, al ser sencillo se aplican nuevamente las Leyes de Newton para obtener las ecuaciones de movimiento. Es posible usar tanto coordenadas cilíndricas como cartesianas.

Para las coordenadas cartesianas, las ecuaciones relativas son

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = \omega^2 u \cos(\omega t - \phi) \quad (2.39a)$$

$$m\ddot{y} + c\dot{y} + ky = \omega^2 u \sin(\omega t - \phi) \quad (2.39b)$$

Que se observan bastante parecidas a las que se obtuvieron en la primera parte del capítulo. Siguiendo un proceso semejante al mostrado en apartados anteriores, la solución para desplazamiento en volanteo sincrónico es

$$x = \frac{\omega^2 u}{\sqrt{\left(\frac{k}{m} - \omega^2\right)^2 + \left(\frac{c\omega}{m}\right)^2}} \cos(\omega t - \beta_s) \quad (2.40a)$$

$$y = \frac{\omega^2 u}{\sqrt{\left(\frac{k}{m} - \omega^2\right)^2 + \left(\frac{c\omega}{m}\right)^2}} \sin(\omega t - \beta_s) \quad (2.40b)$$

Donde

$$\beta_s = \text{ArcTan} \left[ \frac{c\omega}{m \left(\frac{k}{m} - \omega^2\right)} \right]$$

Para ecuaciones cilíndricas, las ecuaciones anteriores se reescriben como:

$$\ddot{r} + \frac{c}{m} \dot{r} + \left(\frac{k}{m} - \dot{\phi}^2\right) r = \omega^2 u \cos(\omega t - \phi) \quad (2.41.a)$$

$$r\ddot{\phi} + \left(2\dot{r} + \frac{c}{m} r\right) \dot{\phi} = \omega^2 u \sin(\omega t - \phi) \quad (2.41.b)$$

Que en las suposiciones anteriores de los modelos masa-resorte-amortiguador se pueden resolver como

$$r_s = \frac{\omega^2 u}{\sqrt{\left(\frac{k}{m} - \omega^2\right)^2 + \left(\frac{c\omega}{m}\right)^2}} \quad (2.42a)$$

$$\omega_s t - \phi_s = \beta_s = \text{ArcTan} \left[ \frac{c\omega}{m \left(\frac{k}{m} - \omega^2\right)} \right] \quad (2.42b)$$

Entre estas ecuaciones y las otras, es claro que la deformación del eje las relaciona de la forma

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

A pesar de su sencillez, este modelo es fundamental en el estudio de la rotodinámica. Su importancia se retoma en capítulos posteriores, en conjunción a elementos referentes a la teoría de chumaceras y métodos numéricos.

---

## Capítulo 3 – Lubricación y chumaceras

---

Como se ilustró en el marco teórico, la teoría de lubricación y por ende la de chumaceras hidrodinámicas deriva directamente de la mecánica de fluidos. Este capítulo trata el tema con la profundidad requerida considerando el efecto de los apoyos en la respuesta vibratoria que en última instancia reflejan el comportamiento de la película de fluido.

El estudio sistemático del comportamiento de los fluidos inició con la aplicación de las leyes de la mecánica de Newton a los mismos por parte del matemático y físico Leonhard Euler (1755), obteniendo las ecuaciones diferenciales básicas del movimiento para un fluido sin fricción y sin viscosidad, las cuales se conocen por su nombre [3.1]. El fluido se asume entonces incompresible e ideal.

Un esfuerzo por incluir los efectos de la viscosidad en las ecuaciones de movimiento fue hecho por el ingeniero francés Claude Louis Marie Navier (1827) e independientemente por el matemático inglés Sir George Gabriel Stokes (1845) quien perfeccionó las ecuaciones básicas para fluidos viscosos e incompresibles, conocidas como las ecuaciones de Navier-Stokes [3.1].

Por su origen, estas ecuaciones sólo pueden aplicarse a flujos considerados como newtonianos; sin embargo son una aproximación práctica para la modelación de la mayor parte de las aplicaciones diarias y de los fenómenos presentes en las chumaceras hidrodinámicas.

Es necesario advertir que aunque representan el movimiento de los fluidos adecuadamente, estas ecuaciones son tan complicadas que soluciones exactas se pueden obtener solo en algunos cuantos casos. Las aproximaciones numéricas son más socorridas.

### 3.1 Las ecuaciones de Navier-Stokes y de Reynolds

La ecuación de Reynolds se puede obtener a partir de las ecuaciones de Navier-Stokes, las cuales son fundamentales en la mecánica de fluidos, y por lo tanto en el estudio de chumaceras hidrodinámicas [3.2]. Usando coordenadas cartesianas y omitiendo las fuerzas de cuerpo, las ecuaciones de Navier-Stokes se pueden establecer como:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + v \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + w \cdot \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \gamma \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \quad (3.1)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \cdot \frac{\partial v}{\partial x} + v \cdot \frac{\partial v}{\partial y} + w \cdot \frac{\partial v}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \gamma \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) \quad (3.2)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + u \cdot \frac{\partial w}{\partial x} + v \cdot \frac{\partial w}{\partial y} + w \cdot \frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \gamma \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) \quad (3.3)$$

Donde  $\rho$  y  $\mu$  son respectivamente densidad y viscosidad absoluta del fluido,  $p$  es la presión,  $u$ ,  $v$ , y  $w$  son las componentes de la velocidad del fluido en las direcciones  $x, y$  y  $z$ . El modelo campo-fluido se completa con la ecuación de continuidad para fluido incompresible [3.1]:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (3.4)$$

A partir de estas ecuaciones, se genera la ecuación de Reynolds en coordenadas cilíndricas:

$$\frac{1}{R^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left\{ \frac{h^3}{12\mu} \frac{\partial P}{\partial \theta} \right\} + \frac{\partial}{\partial z} \left\{ \frac{h^3}{12\mu} \frac{\partial P}{\partial z} \right\} = \dot{e} \cos \theta + e \left\{ \dot{\phi} - \frac{\Omega}{2} \right\} \text{Sen} \theta \quad (3.5)$$

El procedimiento de deducción de la misma se muestra en el Anexo A.

En conjunto para este análisis se asume que el fluido es newtoniano, donde los esfuerzos cortantes y las velocidades de deformación son directamente proporcionales. El flujo es laminar. En la presencia de turbulencias se deben de considerar los términos inerciales [3.3].

Asimismo, los términos de inercia y las fuerzas de cuerpo se consideran despreciables cuando se comparan con los términos viscosos y la variación de la presión a través del espesor de la película se asume que es despreciable [3.3].

Los efectos de la curvatura tampoco se aprecian. Esto implica que el espesor de la película del lubricante es mucho más pequeño que la longitud o el ancho de la chumacera, tal que el dominio físico del flujo se puede desenvolver [3.3].

Para calcular las velocidades críticas y las amplitudes de vibración del rotor y para examinar su estabilidad contra vibraciones auto-excitadas, es esencial el conocimiento de la respuesta que la película del lubricante de la chumacera añade a los desplazamientos y velocidades del muñón. Las fuerzas generadas sobre el muñón por la película del lubricante de la chumacera son funciones no-lineales de la posición y la velocidad del centro del eje [3.2].

Si los desplazamientos y velocidades dinámicas del muñón son pequeños entonces las fuerzas de la película del lubricante se pueden linealizar alrededor de su posición de equilibrio estático, pero aun así la película del lubricante no se puede simular por un simple sistema elástico-disipativo. Existen términos acoplados de rigidez y amortiguamiento que se necesitan para describir la relación entre el incremento de las fuerzas de la película del lubricante y los desplazamientos y velocidades que los causan [3.4].

### 3.2 Ecuación de Reynolds para chumaceras cortas

Las chumaceras, para efectos prácticos se pueden clasificar en largas, intermedias y cortas, dependiendo de la relación entre su dimensión axial y su diámetro  $L/D$  [3.3], como se observa en la Figura 3.1.

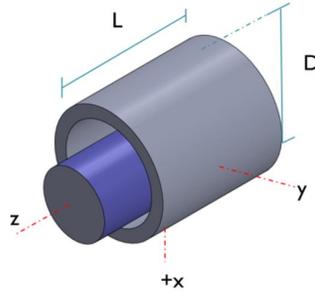


Figura 3.1 Esquema de relación de las dimensiones de una chumacera

Partiendo de la ecuación de Reynolds en equilibrio estático para un sistema de coordenadas cilíndricas, en función de la excentricidad, el ángulo de equilibrio y la velocidad de operación; siendo también expresable en la velocidad de la película.

$$\frac{1}{R^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left\{ \frac{h^3}{12\mu} \frac{\partial P}{\partial \theta} \right\} + \frac{\partial}{\partial z} \left\{ \frac{h^3}{12\mu} \frac{\partial P}{\partial z} \right\} = \dot{e} \cos \theta + e \left\{ \dot{\phi} - \frac{\Omega}{2} \right\} \text{Sen} \theta \quad (3.6)$$

Considerando el valor de la relación  $L/D$  de las dimensiones de la chumacera es posible hacer simplificaciones que faciliten el procesamiento numérico de la misma.

Si la relación  $L/D$  se hace pequeña y se indica el límite  $L/D \rightarrow 0$ , el flujo en la dirección circunferencial y su cambio  $\frac{\partial P}{\partial \theta}$  el que disminuye tanto como cero [3.5], se reescribe la expresión y la ecuación de Reynolds llega a la forma

$$\frac{\partial}{\partial z} \left\{ \frac{h^3}{12\mu} \frac{\partial P}{\partial z} \right\} = \dot{e} \cos \theta + e \left\{ \dot{\phi} - \frac{\Omega}{2} \right\} \text{Sen} \theta \quad (3.7)$$

Ahora bien, existen varios criterios, según diversos autores, por los cuales una chumacera se puede considerar corta y por lo tanto la expresión anterior puede utilizarse para obtener el campo de presión. Las distintas consideraciones se comparan en la Tabla 3.1

Tabla 3.1 Diversos criterios para la clasificación de una chumacera corta por autor [3]

A. Szeri	$\frac{L}{D} < 0.25$
D. Childs	$\frac{L}{D} < 0.5 ; \varepsilon < 0.7$
B Hamrock	$\frac{L}{D} < 1$

De forma experimental se ha comprobado que esta aproximación tiene resultados muy cercanos a la chumacera real, sobre todo cuando la relación  $L/D$  es del orden de 0.5 [3.3] coincidente con el criterio de D. Childs [3.1] que se usará como referencia.

### 3.3 Fuerzas en la película de lubricante para la chumacera corta.

Considerando que ya se tiene una expresión que considera el comportamiento del fluido, es posible tomar en cuenta los efectos de la misma.

En particular, el campo de presión y la fuerza ejercida por el mismo sobre el muñón se expresa de la solución numérica de la simplificación de la ecuación de Reynolds (3.7) de la forma siguiente:

$$P(\theta, z, t) - P_a = \frac{6\mu \left[ \dot{e} \cos\theta + e \left( \phi - \frac{\Omega}{2} \right) \text{Sen}\theta \right]}{C_r^3 (1 + \varepsilon \cos\theta)^3} \left[ z^2 - \left( \frac{L}{2} \right)^2 \right] \quad (3.8)$$

La solución del campo de presión vinculado a una chumacera corta tal y como la propone Ockvirk genera la gráfica ilustrada en la Figura 3.2

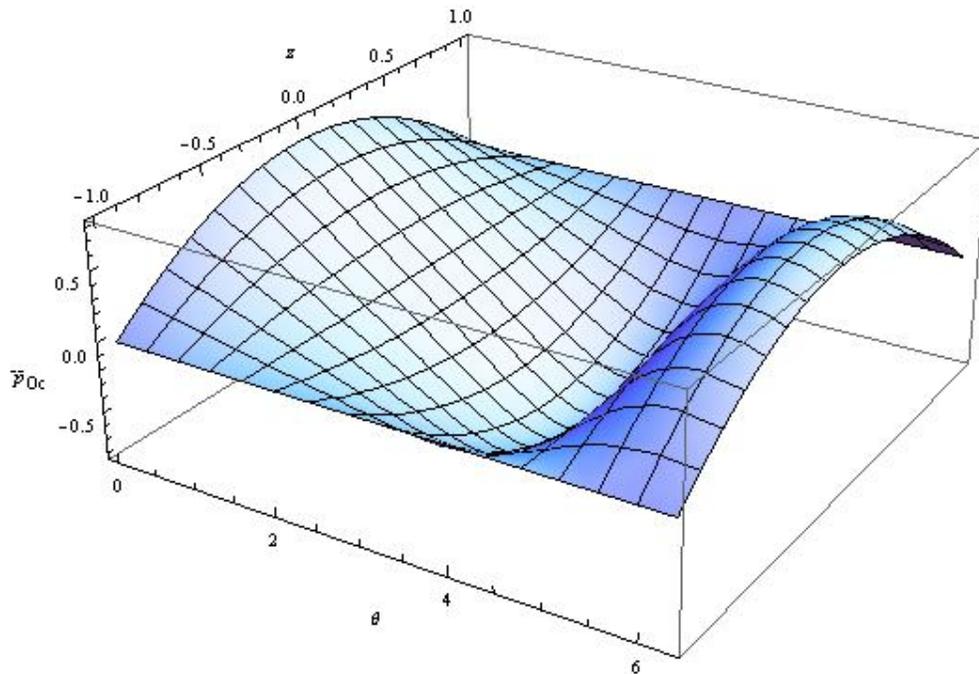


Figura 3.2 Campo de presión para una chumacera corta con L/D=0.5 y  $\epsilon=0.15$

La integración del campo de presión sobre la superficie de la chumacera define la fuerza que genera el fluido sobre la misma. Esta se puede definir en sus componentes tangencial y radial [3.5]

$$\begin{bmatrix} F_r \\ F_t \end{bmatrix} = 2 \int_0^{L/2} \int_{\theta_1}^{\theta_2} P(\theta, z, t) \begin{bmatrix} \text{Cos}\theta \\ \text{Sen}\theta \end{bmatrix} R d\theta dz \quad (3.9)$$

Sean  $\theta_1 = \frac{\pi}{2} - \alpha$ ;  $\theta_2 = \frac{3\pi}{2} - \alpha$ . Considerando el campo de presión para el caso específico la expresión anterior se modifica como:

$$\begin{bmatrix} F_r \\ F_t \end{bmatrix} = -\frac{\mu V_s R L^3}{C_r^3} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{\text{Cos}(\theta + \alpha)}{H^3} \begin{bmatrix} \text{Cos}\theta \\ \text{Sen}\theta \end{bmatrix} d\theta \quad (3.10)$$

Donde  $H = (1 + \varepsilon \cos \theta)$ ;  $V_s \cos \alpha = \dot{e}$ ;  $-V_s \sin \alpha = e \left\{ \dot{\phi} - \frac{\Omega}{2} \right\}$ .

Y se resuelve mediante las integrales de Booker [3.3],[3.5] que tienen la forma genérica:

$$J_i^{jk} = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{\sin^k(\theta) \cos^j(\theta)}{H^i} d\theta \quad (3.11)$$

Añadiendo la definición anterior a (3.9) y resolviendo, las fuerzas de reacción del fluido se aproximan de la forma siguiente:

$$\begin{bmatrix} F_r \\ F_t \end{bmatrix} = -\frac{\mu V_s R L^3}{C_r^3} \begin{bmatrix} J_3^{02} & J_3^{11} \\ J_3^{11} & J_3^{20} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \alpha \\ -\sin \alpha \end{bmatrix} \quad (3.12)$$

Donde las integrales de Booker [3.3] son valores ya tabulados y disponibles para casos particulares.

La primera parte del Anexo B justifica el uso de estas expresiones para el caso de una película de aceite en una chumacera. El Anexo C contiene las tablas que justifican la solución de este tipo de integrales.

### 3.4 Condiciones de equilibrio para una chumacera corta y coeficientes vinculados

La función principal de una chumacera es soportar una carga  $W$ , vinculada con el peso del propio rotor, a lo largo de su eje  $X$  [5]. Si está en equilibrio, con una excentricidad  $e$  y un ángulo de equilibrio  $\phi$ , por las leyes de Newton se establece que  $W + \sum F_x = 0$  y  $\sum F_y = 0$

Considerando un cambio a las coordenadas de trabajo y despejando, se llega a la conclusión

$$\begin{aligned} -W &= F_r \cos \phi - F_t \sin \phi \\ 0 &= F_r \sin \phi - F_t \cos \phi \end{aligned} \quad (3.13)$$

Debido a estas condiciones de equilibrio, la expresión de las fuerzas de reacción del fluido son para el caso, tras sustituciones:

$$\begin{bmatrix} F_r \\ F_t \end{bmatrix} = \frac{\mu RL^3}{C_r^3} \begin{bmatrix} J_3^{11} \\ J_3^{20} \end{bmatrix} \frac{e\Omega}{2} \quad (3.14)$$

Tras la manipulación algebraica de la expresión anterior, con apoyo en las tablas de integrales para chumaceras de Booker, las componentes de las fuerzas de reacción, en función de la razón de excentricidad [3.5] son:

$$\begin{aligned} F_r &= -\frac{\mu RL^3 \Omega}{C_r^3} \frac{\varepsilon^2}{(1 - \varepsilon^2)^2} \\ F_t &= -\frac{\mu RL^3 \Omega}{C_r^3} \frac{\pi \varepsilon}{4(1 - \varepsilon^2)^{3/2}} \end{aligned} \quad (3.15)$$

Dado que estas fuerzas de reacción contrarrestan a la carga  $W$ , se establece la siguiente relación:

$$W = \sqrt{F_r^2 + F_t^2} = \mu \Omega RL \left( \frac{L}{C_r} \right)^2 \frac{\varepsilon \sqrt{16\varepsilon^2 + \pi^2(1 - \varepsilon^2)}}{4(1 - \varepsilon^2)^2} \quad (3.16)$$

El ángulo de equilibrio está relacionado también como:

$$\tan \phi = -\frac{F_t}{F_r} = \frac{\pi \sqrt{(1 - \varepsilon^2)}}{4\varepsilon} \quad (3.17)$$

En lo que concierne al diseño de chumaceras, es más conveniente contar con un parámetro de diseño adimensional, el llamado número de Sommerfeld, visto en el Capítulo 1.

$$S = \frac{\mu NLD}{F_0} \left( \frac{R}{C_r} \right)^2$$

Donde  $N = \Omega/2\pi$  y además el cociente  $F/LD$  es una expresión de presión específica. Obsérvese la concordancia de unidades con la expresión anterior de la fuerza de reacción de la chumacera.

Se recuerda que para chumaceras cortas, el parámetro del número de Sommerfeld es modificable [3.5].

$$\sigma = \pi S \left( \frac{L}{D} \right)^2 = \frac{\mu NLR}{4F_0} \left( \frac{L}{C_r} \right)^2$$

El número de Sommerfeld modificado también se puede dar en función de la razón de excentricidad de la chumacera si se sustituye la expresión anterior

$$\sigma = \frac{(1 - \varepsilon^2)^2}{\varepsilon^2 \sqrt{16\varepsilon^2 + \pi^2(1 - \varepsilon^2)}} \quad (3.18)$$

En operación normal, este parámetro se obtiene fácilmente, y la expresión anterior puede usarse iterativamente para conocer la razón de excentricidad para el equilibrio estático.

Usando una suposición de desplazamientos pequeños –mucho menores al claro radial-, entonces es posible usar las expresiones anteriores –para estado estático- para el caso del movimiento del rotor.

$$e_x = e_{x_0} + \Delta e_x(t) ; \quad e_y = e_{y_0} + \Delta e_y(t) \quad (3.19a),(3.19b)$$

Cuyo equivalente en el sistema de referencia cartesiano sería

$$X = X_0 + \Delta X(t) ; \quad Y = Y_0 + \Delta Y(t)$$

Y expresado en función de la magnitud y dirección de la excentricidad

$$e(t) = e_0 + \Delta e(t) ; \quad \phi(t) = \phi_0 + \Delta \phi(t) \quad (3.20a),(3.20b)$$

La velocidad y la aceleración serían consecuentemente:

$$\frac{dX}{dt} = \dot{e}_X = \Delta \dot{e}_X \quad ; \quad \frac{dY}{dt} = \dot{e}_Y = \Delta \dot{e}_Y \quad (3.21a),(3.21b)$$

$$\frac{d^2X}{dt^2} = \ddot{e}_X = \Delta \ddot{e}_X \quad ; \quad \frac{d^2Y}{dt^2} = \ddot{e}_Y = \Delta \ddot{e}_Y \quad (3.22a),(3.22b)$$

El paso del sistema radial tangencial a cartesiano puede efectuarse por medio de la ecuación (3.21), presente en forma matricial:

$$\begin{bmatrix} \Delta e_X \\ \Delta e_Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{Cos}(\phi_o) & -\text{Sen}(\phi_o) \\ \text{Sen}(\phi_o) & \text{Cos}(\phi_o) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta e(t) \\ e_0 \Delta \phi(t) \end{bmatrix} \quad (3.23)$$

Las fuerzas en la película de aceite serán dependientes de la velocidad y posición, sea:

$$F_X = F_X[e_X(t), e_Y(t), \dot{e}_X(t), \dot{e}_Y(t)] \quad (3.24a)$$

$$F_Y = F_Y[e_X(t), e_Y(t), \dot{e}_X(t), \dot{e}_Y(t)] \quad (3.24b)$$

Es posible expresar las fuerzas de reacción entonces con una expansión de series de Taylor a partir de la posición de equilibrio  $e_{X_0}$ ,  $e_{Y_0}$ :

$$F_X = F_{X_0} + \frac{\partial F_X}{\partial X} \Delta X + \frac{\partial F_X}{\partial Y} \Delta Y + \frac{\partial F_X}{\partial \dot{X}} \Delta \dot{X} + \frac{\partial F_X}{\partial \dot{Y}} \Delta \dot{Y} + \frac{\partial F_X}{\partial \ddot{X}} \Delta \ddot{X} + \frac{\partial F_X}{\partial \ddot{Y}} \Delta \ddot{Y} \quad (3.25a)$$

$$F_Y = F_{Y_0} + \frac{\partial F_Y}{\partial X} \Delta X + \frac{\partial F_Y}{\partial Y} \Delta Y + \frac{\partial F_Y}{\partial \dot{X}} \Delta \dot{X} + \frac{\partial F_Y}{\partial \dot{Y}} \Delta \dot{Y} + \frac{\partial F_Y}{\partial \ddot{X}} \Delta \ddot{X} + \frac{\partial F_Y}{\partial \ddot{Y}} \Delta \ddot{Y} \quad (3.25b)$$

Los coeficientes de inercia, amortiguamiento y rigidez para la fuerza, de la expresión anterior serán:

$$M_{ij} = -\frac{\partial F_i}{\partial \ddot{X}_j}; \quad C_{ij} = -\frac{\partial F_i}{\partial \dot{X}_j}; \quad K_{ij} = -\frac{\partial F_i}{\partial X_j}; \quad i, j = X, Y$$

Se pueden distinguir en los anteriores los coeficientes del tipo  $XX$ ,  $YY$  que son directos, y los pares cruzados del tipo  $XY$ ,  $YX$ . Estos últimos son de vital

importancia para cuerpos en rotación. Su actuación puede ejemplificarse en la Figura 3.3.

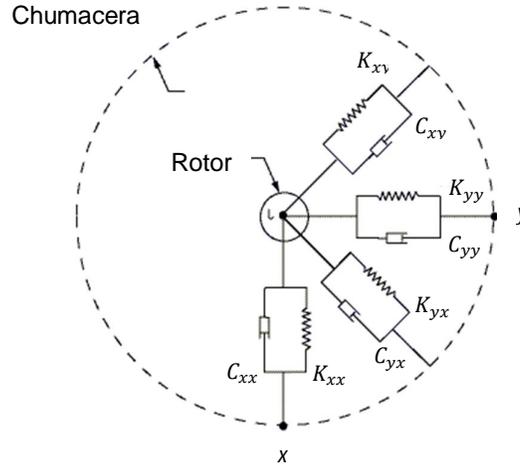


Figura 3.3 Coeficientes directos y cruzados de rigidez y amortiguamiento para una chumacera.

Los coeficientes de inercia son referidos respecto al centro de la chumacera. Su efecto es más acusado en el caso de lubricantes de alta densidad, y suponen una especie de masa adicional. Por lo pronto, los efectos inerciales son desestimados, y se trabaja únicamente con rigidez y amortiguamiento.

Los coeficientes anteriores permiten describir al lubricante en términos de los parámetros básicos de la mecánica. Esto es un hecho importante porque permite una modelación manejable.

Para los coeficientes equivalentes en sistema radial tangencial se tienen las expresiones [5]:

$$\begin{aligned}
 F_r &= F_{r_0} + \frac{\partial F_r}{\partial e} \Delta e + \frac{\partial F_r}{e_0 \partial \phi} e_0 \Delta \phi + \frac{\partial F_r}{\partial \dot{e}} \Delta \dot{e} + \frac{\partial F_r}{e_0 \partial \dot{\phi}} e_0 \Delta \dot{\phi} \\
 &= F_{r_0} - K_{rr} \Delta e - K_{rt} e_0 \Delta \phi - C_{rr} \Delta \dot{e} - C_{rt} e_0 \Delta \dot{\phi}
 \end{aligned}
 \tag{3.26a}$$

$$\begin{aligned}
 F_t &= F_{t_0} + \frac{\partial F_t}{\partial e} \Delta e + \frac{\partial F_t}{e_0 \partial \phi} e_0 \Delta \phi + \frac{\partial F_t}{\partial \dot{e}} \Delta \dot{e} + \frac{\partial F_t}{e_0 \partial \dot{\phi}} e_0 \Delta \dot{\phi} \\
 &= F_{t_0} - K_{tt} \Delta e - K_{tr} e_0 \Delta \phi - C_{tt} \Delta \dot{e} - C_{tr} e_0 \Delta \dot{\phi}
 \end{aligned}
 \tag{3.26b}$$

El paso de un sistema a otro se expresa de la siguiente manera, utilizando una serie de matrices de transformación.

$$\begin{bmatrix} K_{XX} & K_{XY} \\ K_{YX} & K_{YY} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{Cos}(\phi_o) & -\text{Sen}(\phi_o) \\ \text{Sen}(\phi_o) & \text{Cos}(\phi_o) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K_{rr} & K_{rt} \\ K_{tr} & K_{tt} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \text{Cos}(\phi_o) & \text{Sen}(\phi_o) \\ -\text{Sen}(\phi_o) & \text{Cos}(\phi_o) \end{bmatrix} \quad (3.27a)$$

$$\begin{bmatrix} C_{XX} & C_{XY} \\ C_{YX} & C_{YY} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{Cos}(\phi_o) & -\text{Sen}(\phi_o) \\ \text{Sen}(\phi_o) & \text{Cos}(\phi_o) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_{rr} & C_{rt} \\ C_{tr} & C_{tt} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \text{Cos}(\phi_o) & \text{Sen}(\phi_o) \\ -\text{Sen}(\phi_o) & \text{Cos}(\phi_o) \end{bmatrix} \quad (3.27b)$$

En conjunto se puede resumir la siguiente expresión para las reacciones de la chumacera en coordenadas cartesianas.

$$\begin{bmatrix} F_X(t) \\ F_Y(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{X_0} \\ F_{Y_0} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} K_{XX} & K_{XY} \\ K_{YX} & K_{YY} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta X \\ \Delta Y \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} C_{XX} & C_{XY} \\ C_{YX} & C_{YY} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \dot{X} \\ \Delta \dot{Y} \end{bmatrix} \quad (3.28)$$

A partir del desarrollo matemático, mostrado a detalle en el Anexo B, si se considera un comportamiento lineal –Ley de Hooke- en la película de lubricante se tienen las siguientes soluciones analíticas aproximadas y adimensionalizadas para obtener coeficientes de rigidez y amortiguamiento en una chumacera corta en coordenadas radiales tangenciales [3].

Tabla 3.2 Coeficientes adimensionalizados de rigidez y amortiguamiento en coordenadas radiales y tangenciales para una chumacera corta. Aproximación lineal

$\bar{k}_{RR} = -\frac{8\pi\varepsilon(1+\varepsilon^2)}{(1-\varepsilon^2)^3} \left(\frac{L}{D}\right)^2$	$\bar{c}_{RR} = -\frac{2\pi^2(1+2\varepsilon^2)}{(1-\varepsilon^2)^{5/2}} \left(\frac{L}{D}\right)^2$
$\bar{k}_{TT} = -\frac{4\pi\varepsilon}{(1-\varepsilon^2)^2} \left(\frac{L}{D}\right)^2$	$\bar{c}_{TT} = -\frac{2\pi^2}{(1-\varepsilon^2)^{5/2}} \left(\frac{L}{D}\right)^2$
$\bar{k}_{RT} = -\frac{\pi^2}{(1-\varepsilon^2)^{3/2}} \left(\frac{L}{D}\right)^2$	$\bar{c}_{RT} = \frac{8\pi\varepsilon}{(1-\varepsilon^2)^2} \left(\frac{L}{D}\right)^2$
$\bar{k}_{TR} = \frac{\pi^2(1+2\varepsilon^2)}{(1-\varepsilon^2)^{5/2}} \left(\frac{L}{D}\right)^2$	$\bar{c}_{TR} = \frac{8\pi\varepsilon}{(1-\varepsilon^2)^2} \left(\frac{L}{D}\right)^2$

Las expresiones mostradas en la tabla son funciones de la excentricidad. Por lo que la rigidez y el amortiguamiento de una película de aceite no son constantes, sino que dependen de la posición del centro del muñón. Estas expresiones mostradas tienen su equivalente en ecuaciones cartesianas. (Tabla 3.3).

Tabla 3.3 Coeficientes adimensionalizados de rigidez y amortiguamiento en coordenadas cartesianas para una chumacera corta. Aproximación lineal

$\bar{k}_{xx} = \frac{4(\pi^2 + ((32 + \pi^2)\varepsilon^2) + (2(16 - \pi^2)\varepsilon^4))}{(1 - \varepsilon^2)((\pi^2 + (16 - \pi^2)\varepsilon^2)^{\frac{3}{2}})}$
$\bar{k}_{yy} = \frac{4(2\pi^2 + (16 - \pi^2)\varepsilon^2)}{((\pi^2 + (16 - \pi^2)\varepsilon^2)^{\frac{3}{2}})}$
$\bar{k}_{xy} = \frac{\pi(\pi^2 + ((32 + \pi^2)\varepsilon^2)(2(16 - \pi^2)\varepsilon^4))}{\varepsilon(\sqrt{1 - \varepsilon^2})((\pi^2 + (16 - \pi^2)\varepsilon^2)^{\frac{3}{2}})}$
$\bar{k}_{yx} = \frac{\pi(-\pi^2 + (2\pi^2\varepsilon^2)((16 - \pi^2)\varepsilon^4))}{\varepsilon(\sqrt{1 - \varepsilon^2})((\pi^2 + (16 - \pi^2)\varepsilon^2)^{\frac{3}{2}})}$
$\bar{c}_{xx} = \frac{2\pi(\pi^2 + 2(24 - \pi^2)\varepsilon^2 + (\pi^2)\varepsilon^4)}{\varepsilon(\sqrt{1 - \varepsilon^2})((\pi^2 + (16 - \pi^2)\varepsilon^2)^{\frac{3}{2}})}$
$\bar{c}_{yy} = \frac{2\pi(\sqrt{1 - \varepsilon^2})(\pi^2 + 2(\pi^2 - 8)\varepsilon^2)}{\varepsilon((\pi^2 + (16 - \pi^2)\varepsilon^2)^{\frac{3}{2}})}$
$\bar{c}_{xy} = \frac{8(\pi^2 + 2(\pi^2 - 8)\varepsilon^2)}{((\pi^2 + (16 - \pi^2)\varepsilon^2)^{\frac{3}{2}})}$
$\bar{c}_{yx} = \frac{8(\pi^2 + 2(\pi^2 - 8)\varepsilon^2)}{((\pi^2 + (16 - \pi^2)\varepsilon^2)^{\frac{3}{2}})}$

El comportamiento de estos coeficientes adimensionales se muestra en las Figuras siguientes (3.4, 3.5) como función de la excentricidad.

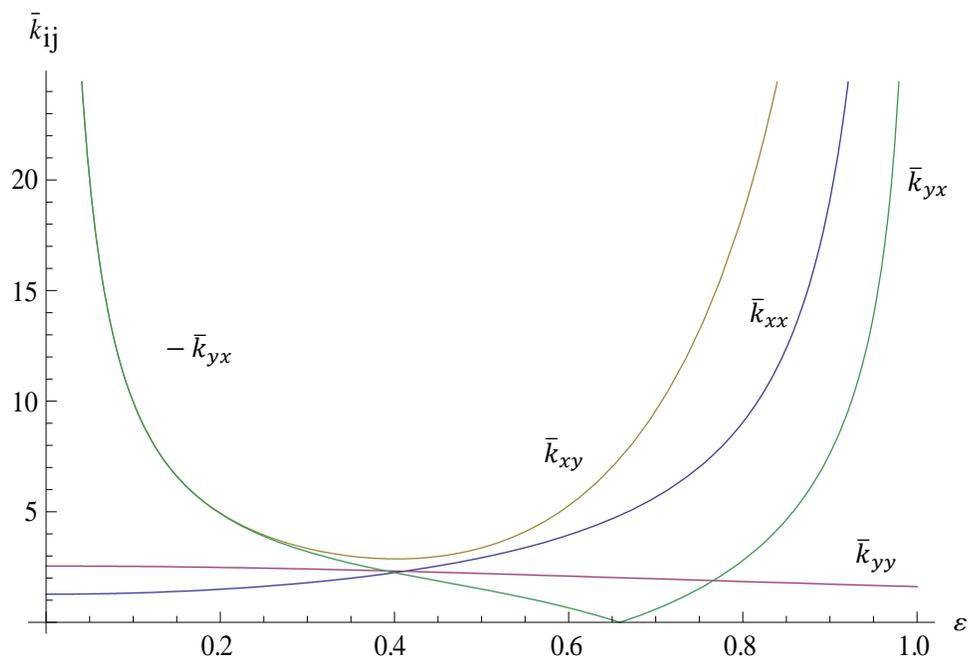


Figura 3.4 Coeficientes de rigidez para una chumacera corta en función de la razón de excentricidad.

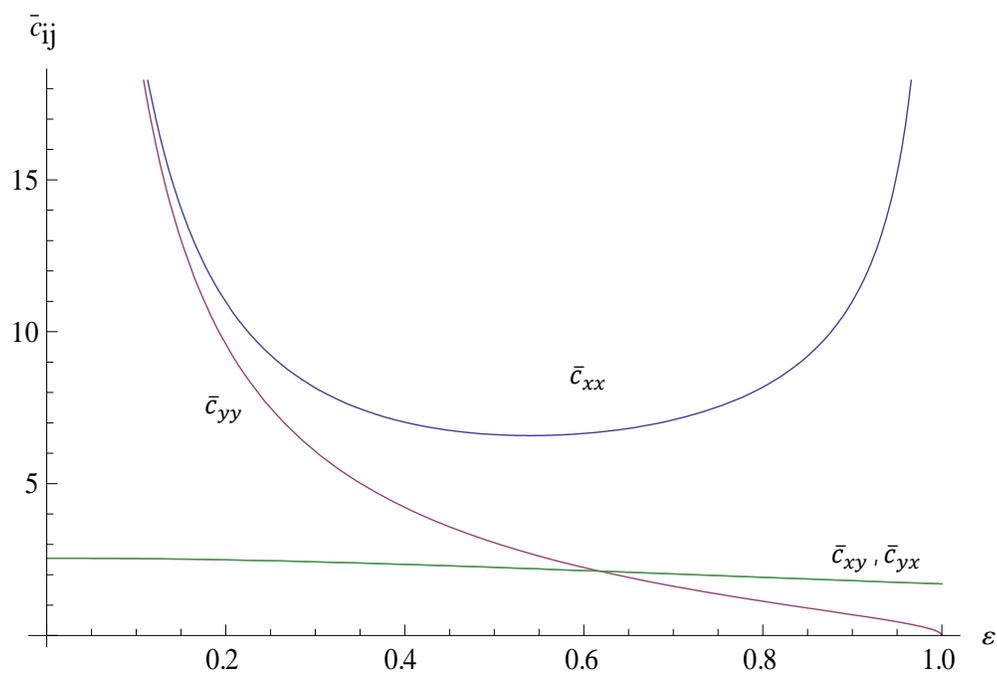


Figura 3.5 Coeficientes de amortiguamiento para una chumacera corta en función de la razón de excentricidad.

Ahora bien, estas gráficas sirven como referencia para futuros análisis, y serán mencionadas sobre todo en el Capítulo 5.

De estos coeficientes adimensionales, al multiplicar cada uno de los resultados por un factor que implica al número de Sommerfeld es posible obtener versiones de los coeficientes con las dimensiones correctas para cada caso.

$$k_{ij} = \frac{S(W)}{c} \bar{k}_{ij} \quad (3.29a)$$

$$c_{ij} = \frac{S(W)}{c(\omega)} (\bar{c}_{ij}) \quad (3.29b)$$

Dado que se busca programar un modelo, y los valores dimensionales serían más fáciles de comprender y de agregar al mismo, sin perder su significado en la práctica.

### 3.5 El rotor de Jeffcott con aplicación de la teoría de chumaceras

Hasta aquí se describe la teoría de la modelación de las chumaceras hidrodinámicas. Se vincula este tema con el de modelos vibratorios para alcanzar los objetivos del proyecto.

En el Capítulo 2 se justificó e ilustró el modelo rotor de Jeffcott clásico. En dicho caso los apoyos del mismo eran completamente rígidos. El modelo del rotor de Jeffcot se puede mejorar considerando su apoyo sobre soportes con una cierta flexibilidad y un amortiguamiento, condiciones que son más próximas a la realidad si se trabaja con chumaceras hidrodinámicas. Dichas modificaciones son evidentes en la Figura 3.6.

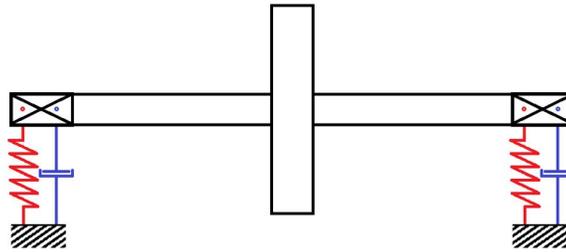


Figura 3.6a Modelo de Rotor de Jeffcott con apoyos flexibles visto de perfil

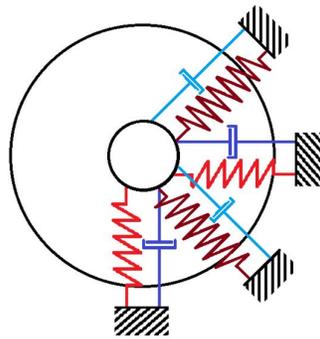


Figura 3.6b Modelo de Rotor de Jeffcott con apoyos flexibles visto de frente

Se ha visto que para una película de aceite existe una rigidez y un amortiguamiento equivalentes, dependientes de la excentricidad del rotor. Como tales, se pueden incluir dentro de la teoría de vibraciones.

Para estos modelos, en general es preferible usar un método más robusto para obtener las ecuaciones de movimiento, sin entrar a detalle con diagramas de cuerpo libre. Por tanto, se echará mano de la dinámica analítica, específicamente los principios de Lagrange.

Se aplicará entonces la ecuación de Lagrange, que en su forma más general indica:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} + \frac{\partial D}{\partial \dot{q}_i} = Q_i \quad (3.30)$$

Donde  $q_i$  es una coordenada generalizada,  $Q_i$  es una función de fuerza,  $D$  es una función de disipación y  $L$  es el Lagrangiano definido por:

$$L = T - V$$

Donde  $T$  y  $V$  representan la energía cinética y potencial de todo el sistema.

La Ecuación 3.30 está justificada en la dinámica al ser la condición que minimiza una integral de energía, como se desprende de la teoría de cálculo variacional.

La fuente de energía cinética es el propio rotor. Dado la no coincidencia del centro de masa con el centro geométrico, el disco presenta velocidad de traslación. Se considera un marco de referencia inercial. En forma muy general se afirma que:

$$T = \frac{1}{2} m_i [(\dot{x}_i - \omega y_i)^2 + (\dot{y}_i - \omega x_i)^2] + \frac{1}{2} I_i \omega_i^2 \quad (3.31)$$

La velocidad de traslación se descompuso vectorialmente para ajustarse al sistema cartesiano. Los subíndices son para considerar por separado la masa del eje y el disco.

La energía potencial del rotor viene entonces de las chumaceras, cuya película de aceite se puede aproximar en comportamiento a resortes lineales. Así, cada chumacera se representaría como

$$V = \frac{1}{2} k_{xx} x_i^2 + \frac{1}{2} k_{yy} y_i^2 + \frac{1}{2} k_{xy} (x_i^2 + y_i^2) + \frac{1}{2} k_{yx} (x_i^2 + y_i^2) \quad (3.32)$$

Nótese que en la expresión anterior hay términos vinculados a los pares cruzados que no aparecían en los modelos dinámicos previos.

De forma análoga se tienen términos disipativos para las chumaceras, en específico energía de amortiguamiento.

$$D_i = \frac{1}{2} c_{xx} \dot{x}_i^2 + \frac{1}{2} c_{yy} \dot{y}_i^2 + \frac{1}{2} c_{xy} (\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2) + \frac{1}{2} c_{yx} (\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2) \quad (3.33)$$

Se procede a la aplicación de la Ecuación de Lagrange para obtener el sistema de ecuaciones vinculado al modelo (Tabla 3.4)

Tabla 3.4. Sistema de ecuaciones para un rotor de Jeffcott apoyado en chumaceras hidrodinámicas

$m_1(\ddot{x}_1 - \omega\dot{y}_1) + \omega m_1(\dot{y}_1 - \omega x_1) = \omega^2 u \cos(\omega t - \phi)$
$m_2(\ddot{x}_2 - \omega\dot{y}_2) + \omega m_2(\dot{y}_2 - \omega x_2) = 0$
$(k_{xx} + k_{xy} + k_{yx})x_3 + (c_{xx} + c_{xy} + c_{yx})\dot{x}_3 = 0$
$(k_{xx} + k_{xy} + k_{yx})x_4 + (c_{xx} + c_{xy} + c_{yx})\dot{x}_4 = 0$
$m_1(\ddot{y}_1 - \omega\dot{x}_1) + \omega m_1(\dot{x}_1 - \omega y_1) = \omega^2 u \sin(\omega t - \phi)$
$m_2(\ddot{y}_2 - \omega\dot{x}_2) + \omega m_2(\dot{x}_2 - \omega y_2) = 0$
$(k_{xx} + k_{xy} + k_{yx})y_3 + (c_{xx} + c_{xy} + c_{yx})\dot{y}_3 = 0$
$(k_{xx} + k_{xy} + k_{yx})y_4 + (c_{xx} + c_{xy} + c_{yx})\dot{y}_4 = 0$

Los subíndices 1 y 2 de coeficientes y variables hacen referencia al disco y al eje, respectivamente. Los subíndices 3 y 4 corresponden al extremo de cada muñón.

Hay que considerar que el modelo tiene bastantes grados de libertad, aún en el supuesto de que el muñón de la chumacera no se mueve en dirección axial ( $z$ ), pues la flexibilidad del eje implica que el movimiento del disco no coincide completamente con el movimiento del eje en los apoyos.

Es susceptible la solución por medio de métodos numéricos. En el Capítulo 4 se discuten alternativas al respecto.

### 3.6 Chumaceras presurizadas

Como se describió en el marco teórico y a lo largo del capítulo, el uso de chumaceras hidrodinámicas permite resolver cuestiones relacionadas con el desgaste pero implica otro tipo de problemáticas. Hasta ahora, se ha hablado de chumaceras planas, sin puntos de presurización donde lubricante adicional pueda ser añadido durante la operación.

El objetivo primordial de la presurización es modificar el comportamiento de la película de aceite, evitando una vibración dañina para el equipo [3]. Elementos como son el punto de inyección del lubricante, el sentido horario o anti horario de operación y otras características del rotor determinan el grado de éxito con el que se estabilizan las chumaceras y con éstas el rotor.

La existencia de puertos de presurización modifica la geometría (Figura 3.7) y el comportamiento del rotor.

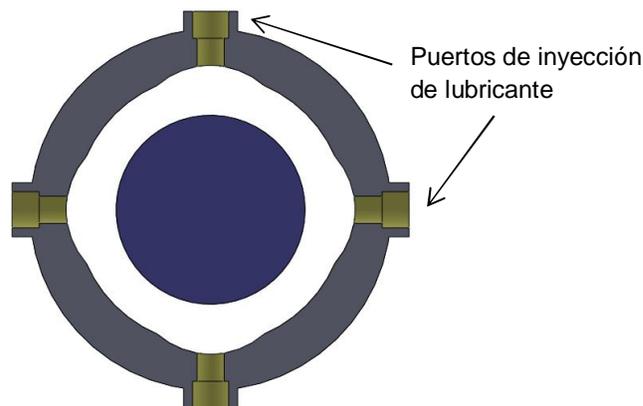


Figura 3.7 Esquema de chumacera presurizada con cuatro puntos de inyección.

En lo que concierne a la modelación, la existencia de una fuente puntual obliga al uso de funciones tales como la Delta de Dirac.

Existen ya trabajos experimentales relacionados con la operación de chumaceras presurizadas [3.3], sin embargo, la información obtenida ha sido fundamentalmente cualitativa.

Por otro lado, un análisis lineal semejante al usado para el caso sin presurizar permite definir coeficientes adimensionales de rigidez y amortiguamiento para este nuevo caso (Tabla 3. 5).

Tabla 3.5 Coeficientes adimensionalizados de rigidez y amortiguamiento en coordenadas radiales y tangenciales para una chumacera corta con puertos de presurización puntual. [3.3]

$\bar{k}_{RR_p} = -\frac{3}{8} \left(\frac{L}{D}\right)^2 \frac{\bar{q}_p(1-a^2)\text{Cos}^2(\beta-\phi)}{[-1+\varepsilon\text{Cos}(\beta-\phi)]^4}$
$\bar{k}_{TT_p} = -\frac{3}{8} \left(\frac{L}{D}\right)^2 \frac{\bar{q}_p(1-a^2)\text{Sen}^2[2(\beta-\phi)]}{[-1+\varepsilon\text{Cos}(\beta-\phi)]^4}$
$\bar{k}_{RT_p} = -\frac{3}{16} \left(\frac{L}{D}\right)^2 \frac{\bar{q}_p(1-a^2)\text{Sen}[2(\beta-\phi)]}{[-1+\varepsilon\text{Cos}(\beta-\phi)]^4}$
$\bar{k}_{TR_p} = -\frac{3}{16} \left(\frac{L}{D}\right)^2 \frac{\bar{q}_p(1-a^2)\text{Sen}[2(\beta-\phi)]}{[-1+\varepsilon\text{Cos}(\beta-\phi)]^4}$
$\bar{c}_{RR_p} = 0$
$\bar{c}_{TT_p} = -\frac{1}{4} \left(\frac{L}{D}\right)^2 \frac{\bar{q}_p(1-a^2)\text{Sen}(\beta-\phi)}{\varepsilon[-1+\varepsilon\text{Cos}(\beta-\phi)]^3}$
$\bar{c}_{RT_p} = -\frac{1}{4} \left(\frac{L}{D}\right)^2 \frac{\bar{q}_p(1-a^2)\text{Cos}(\beta-\phi)}{\varepsilon[-1+\varepsilon\text{Cos}(\beta-\phi)]^3}$
$\bar{c}_{TR_p} = 0$

Se observa la inclusión de nuevos términos  $a$ ,  $\beta$  que hacen referencia a la ubicación axial y radial del puerto de presurización (Figura 3.6) respecto al centro de la chumacera.

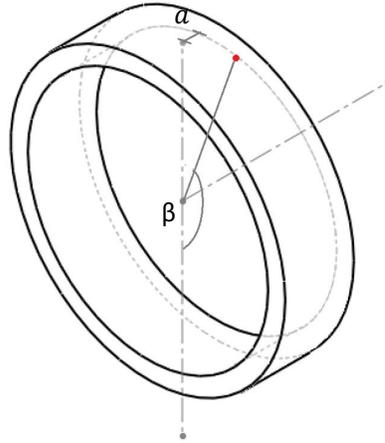


Figura 3.8 Ubicación de un punto arbitrario de presión para una chumacera presurizada en función de los parámetros  $\alpha$  y  $\beta$ .

También se hace referencia a la expresión  $\bar{q}_p$  que es la adimensionalización de la presión añadida externamente en función al número de Sommerfeld.

$$\bar{q}_p = \frac{f}{S} \quad (3.34)$$

Donde  $f$  es un parámetro adimensionalizado que indica la relación de la fuerza de presión. A mayor  $f$ , mayor es la presurización adicional externa y los efectos sobre rigidez y amortiguamiento son más acusados.

Al igual que en el caso sin presurizar o clásico, la transformación de las coordenadas permite tener coeficientes en el sistema cartesiano, tal y como se muestra en la Tabla 3.6.

Tabla 3.6 Coeficientes adimensionalizados de rigidez en coordenadas cartesianas para una chumacera corta con puertos de presurización puntual. [3.3]

$\bar{k}_{xxp} = \frac{-3(-1 + a^2)(-1 + \varepsilon^2)^2 \bar{q}_p (16\varepsilon^2 + \pi^2 - \varepsilon^2 \pi^2 + ((-\pi^2 + \varepsilon^2(16 + \pi))(\text{Cos}[2(\beta - \phi)])) - (8\varepsilon(\sqrt{1 - \varepsilon^2})\pi \text{Sen}[2(\beta - \phi)]))}{16\varepsilon\pi((\pi^2 - \varepsilon^2(-16 + \pi^2))^{\frac{3}{2}})((-1 + \varepsilon(\text{Cos}[\beta - \phi]))^4)}$
$\bar{k}_{yy_p} = \frac{3(-1 + a^2)(-1 + \varepsilon^2)^2 \bar{q}_p ((8\varepsilon(\sqrt{1 - \varepsilon^2})\pi \text{Cos}[2(\beta - \phi)]) + ((-\pi^2 + \varepsilon^2(16 + \pi))(\text{Sen}[2(\beta - \phi)])))}{16\varepsilon\pi((\pi^2 - \varepsilon^2(-16 + \pi^2))^{\frac{3}{2}})((-1 + \varepsilon(\text{Cos}[\beta - \phi]))^4)}$
$\bar{k}_{xyp} = \frac{-3(-1 + a^2)((-1 + \varepsilon^2)^2 \bar{q}_p ((8\varepsilon(\sqrt{1 - \varepsilon^2})\pi \text{Cos}[2(\beta - \phi)]) + ((-\pi^2 + \varepsilon^2(16 + \pi))(\text{Sen}[2(\beta - \phi)])))}{16\varepsilon\pi((\pi^2 - \varepsilon^2(-16 + \pi^2))^{\frac{3}{2}})((-1 + \varepsilon(\text{Cos}[\beta - \phi]))^4)}$
$\bar{k}_{yx_p} = \frac{-3(-1 + a^2)((-1 + \varepsilon^2)^2 \bar{q}_p (-16\varepsilon^2 - \pi^2 + \varepsilon^2 \pi^2 + ((-\pi^2 + \varepsilon^2(16 + \pi))(\text{Cos}[2(\beta - \phi)])) - (8\varepsilon(\sqrt{1 - \varepsilon^2})\pi \text{Sen}[2(\beta - \phi)]))}{16\varepsilon\pi((\pi^2 - \varepsilon^2(-16 + \pi^2))^{\frac{3}{2}})((-1 + \varepsilon(\text{Cos}[\beta - \phi]))^4)}$
$\bar{c}_{xxp} = \frac{(-1 + a^2)((1 - \varepsilon^2)^{\frac{5}{2}} \bar{q}_p (4\varepsilon(\text{Cos}[\beta - \phi]) - (\sqrt{1 - \varepsilon^2})\pi(\text{Sen}[\beta - \phi])))}{4\varepsilon^2((\pi^2 - \varepsilon^2(-16 + \pi^2))^{\frac{3}{2}})((-1 + \varepsilon(\text{Cos}[\beta - \phi]))^3)}$
$\bar{c}_{yy_p} = \frac{(-1 + a^2)((-1 + \varepsilon^2)^2 \bar{q}_p ((\sqrt{1 - \varepsilon^2})\pi(\text{Cos}[(\beta - \phi) + 4\varepsilon(\text{Sen}[\beta - \phi])]))}{\varepsilon\pi((\pi^2 - \varepsilon^2(-16 + \pi^2))^{\frac{3}{2}})((-1 + \varepsilon(\text{Cos}[\beta - \phi]))^3)}$
$\bar{c}_{xyp} = \frac{(-1 + a^2)((-1 + \varepsilon^2)^2 \bar{q}_p (4\varepsilon(\text{Cos}[\beta - \phi]) - (\sqrt{1 - \varepsilon^2})\pi(\text{Sen}[\beta - \phi])))}{\varepsilon\pi((\pi^2 - \varepsilon^2(-16 + \pi^2))^{\frac{3}{2}})((-1 + \varepsilon(\text{Cos}[\beta - \phi]))^3)}$
$\bar{c}_{yx_p} = \frac{(-1 + a^2)((1 - \varepsilon^2)^{\frac{5}{2}} \bar{q}_p (\sqrt{1 - \varepsilon^2})\pi(\text{Cos}[\beta - \phi] + (4\varepsilon(\text{Sen}[\beta - \phi])))}{4\varepsilon^2((\pi^2 - \varepsilon^2(-16 + \pi^2))^{\frac{3}{2}})((-1 + \varepsilon(\text{Cos}[\beta - \phi]))^3)}$

La característica principal de los coeficientes mostrados es el hecho de que están referidos al efecto adicional producido por una presurización externa.

El efecto completo sobre la rigidez y el amortiguamiento en la película de aceite se obtiene al sumar los coeficientes del caso clásico o sin presurizar con los equivalentes al caso presurizado.

---

## Capítulo 4 – Modelo numérico y experimentación

---

En este capítulo se procede con la exposición del diseño de experimentos utilizado. En este caso, el peso de la investigación recae sobre todo en una serie de experimentos virtuales, los cuales deberán ser cotejados con casos anteriores, y con la teoría ya existente.

Debido a la naturaleza de la experimentación, es importante añadir explicaciones relacionadas con el **modelo del elemento finito**, así como las consideraciones del software elegido para su solución.

En cuanto a las consideraciones teóricas expuestas anteriormente, es necesario ingresarlas o ajustarlas a las características específicas del código programado.

La serie de códigos computacionales obtenidos se ponen a disposición en el Anexo D.

### 4.1 Diseño de experimentos

En principio, este trabajo no se puede considerar como experimental, al menos en el sentido de que habrá pocas posibilidades de correr modelos físicos. Los resultados a obtener serán fundamentalmente numéricos. Por ende, la comprobación experimental sería referente a análisis de sensibilidad y otros relacionados con la confianza que se puede tener en los resultados.

Este trabajo se vincula con la importancia del comportamiento numérico de las chumaceras. Debido a la complejidad, por un lado se maneja en un trabajo separado el análisis de los apoyos, y por otro estos resultados se aplican para conocer la respuesta vibratoria de varios modelos de rotor.

De software comercial, y trabajos anteriores, se tiene un código de programación donde se pueden obtener los análisis estacionario y transitorio del comportamiento de un rotor respecto a respuestas vibratorias, modos de vibración y frecuencias naturales, con apenas límites para la geometría que se desee.

Sin embargo, la solución de dichos modelos se realiza asumiendo valores constantes de rigidez y amortiguamiento en los apoyos. El caso actual excede estos límites.

Ahora bien, dado que los apoyos son películas de chumaceras, existen aproximaciones analíticas para chumaceras tanto cortas como largas. La solución numérica de la ecuación de Reynolds deberá dar resultados muy semejantes a las soluciones aproximadas, para varios casos donde las condiciones de velocidad, viscosidad y otras se varíen. Para el caso es importante hacer comparaciones entre las chumaceras con y sin presurización. La metodología propuesta originalmente se muestra en la Figura 4.1

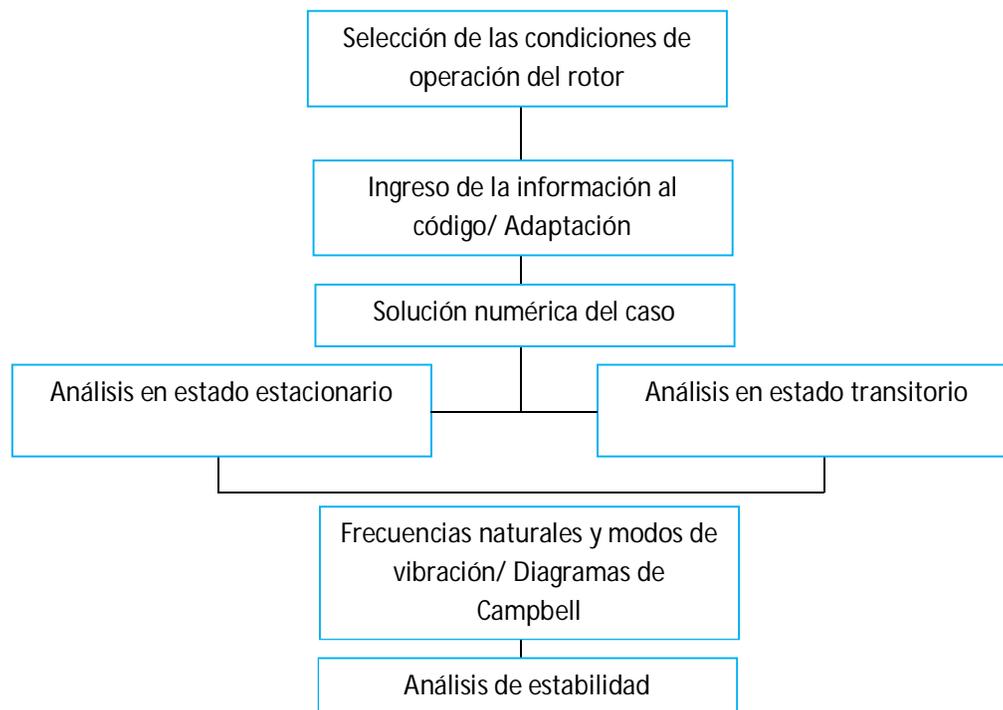


Figura 4.1 Metodología de experimentación

Existe un rotor experimental en los laboratorios de ESIME, en Zacatenco. Se trata del rotor RK 4 Rotor Kit de Bently Nevada. Es un equipo diseñado específicamente para experimentación de rotores, y el efecto de las chumaceras que son los apoyos. Se puede ver al mismo en la Figura 4.2

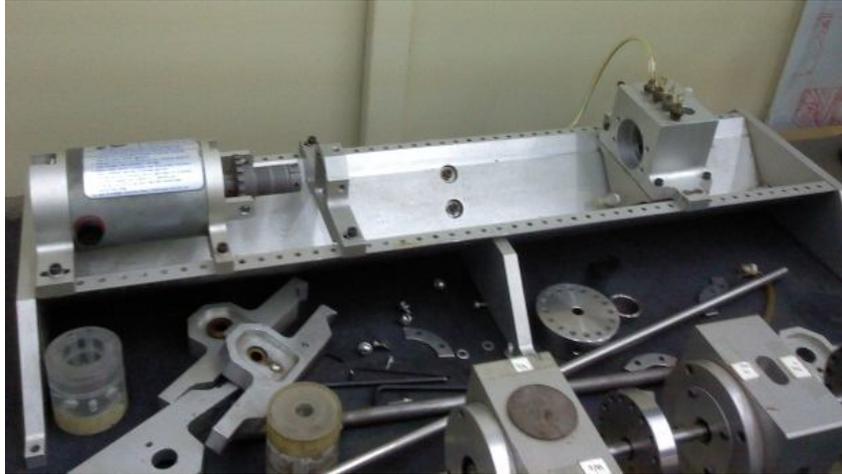


Figura 4.2 GE Bently Nevada RK4, rotor para experimentación.

Sus características principales han sido obtenidas tanto de información disponible en catálogos como en una visita de campo. Por este motivo, la simulación de su comportamiento sería factible.

Sin embargo, el acceso al modelo para la experimentación, o para la información generada por experimentos anteriores es de acceso limitado. Pero no impide una negociación con los responsables para obtener documentación previa o bien para utilizar directamente el equipo para obtener información experimental de contraste con lo obtenido en el análisis numérico.

Otra opción es construir un modelo de forma física a partir de material obtenido. En este caso, haría falta algún financiamiento que es posible obtener, además de una posible programación. El reto más importante aquí sería la caracterización del mismo, pues a diferencia del equipo anterior, que está respaldado, la obtención de datos para una simulación paralela podría ser más difícil. Pero la ventaja principal es que se contaría ya con un equipo que permita un desarrollo posterior en esta línea de investigación.

## 4.2 Introducción al método del elemento finito

En un caso como el presente, en el cual las soluciones analíticas pudieran no ser satisfactorias, se puede apelar siempre a un método numérico específico, en el cual el problema original es fraccionado sea en la geometría o el tiempo para aplicar las leyes conocidas a cada una de estas fracciones para al final integrar una solución general. Por esta característica última, se ha vuelto básicamente un método de solución computacional.

Considerando un medio continuo, se discretiza en elementos. Si se aplica una condición externa a uno de los elementos, es posible medir un desplazamiento en los nodos del mismo, llevando a deformaciones y esfuerzo sobre el mismo.

Al igualar el trabajo aplicado al de los esfuerzos internos para la teoría de un material elástico lineal, se encuentra un sistema de ecuaciones lineales donde la fuerza en los nodos es función del desplazamiento de los mismos [4.1]. El comportamiento de dichos elementos se aproxima mediante un polinomio de interpolación lineal.

En el caso de interés, la alternativa tradicional siempre fue el considerar modelos de masa concentrada, tal y como se ilustran en el Capítulo 2. Sin embargo, el concentrar la masa en un punto lleva a caer en inexactitudes, debido a mediciones erróneas y otros. De ahí que el usar el método de elemento finito ofrezca una ventaja adicional.

Para comprender la aplicación del elemento finito en el caso se aplica el concepto de trabajo virtual, tal y como se formula [4.1].

Sea un cuerpo continuo elástico sujeto a fuerzas dependientes tanto de la superficie –como presión – y al volumen –como el peso del propio cuerpo- de forma muy general. Ambas se representan respectivamente como:

$$\{t\} = \{t_x, t_y, t_z\}^T \quad (4.1)$$

$$\{X\} = \{X_x, X_y, X_z\}^T \quad (4.2)$$

Donde ambos vectores están transpuestos. El vector desplazamiento en las tres direcciones del cuerpo se escribe.

$$\{u\} = \{u, v, w\}^T \quad (4.3)$$

Las deformaciones correspondientes a su vez se escriben

$$\{\varepsilon\} = \{\varepsilon_{xx}, \varepsilon_{yy}, \varepsilon_{zz}, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}\}^T \quad (4.4)$$

Como parte de esas deformaciones se calculan esfuerzos asociados

$$\{\sigma\} = \{\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{zz}, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}\}^T \quad (4.5)$$

Si el cuerpo se trata en elementos, cada uno de ellos se encuentra en equilibrio si

$$\nabla\{\sigma\} + \{X\} = 0$$

Donde el vector  $\{X\}$  incluye referencias de la inercia, tan importante para la aplicación particular, del modo  $\{X\} = \{X\} - \rho\ddot{u}$ , que se incluirá más adelante.

Si la expresión anterior se multiplica por  $\{\delta u\}$ , entendida como una función de ponderación relacionada con el concepto de trabajo virtual. Si  $\{\delta u\}$  es un trabajo virtual, entonces habrá una deformación virtual también  $\{\delta\varepsilon\} = \nabla\{\delta u\}$

Se llega a la expresión

$$\int_v \{\delta u\}^T \nabla\{\sigma\} dv + \int_v \{\delta u\}^T \{X\} dv = 0 \quad (4.6)$$

Aplicando la Fórmula de Green es posible reescribir la expresión anterior como

$$-\int_v \nabla\{\delta u\}^T \{\sigma\} dv + \int_s \{\delta u\}^T \{\sigma\} \bar{n} ds + \int_v \nabla\{\delta u\}^T \{X\} dv = 0 \quad (4.7)$$

Se puede simplificar si se recuerda que se cumple la condición  $\{\sigma\} \cdot \{n\} = \{t\}$

Si se considera un material dado para el cuerpo del trabajo, mediante una matriz de las propiedades elásticas  $[C]$ , los esfuerzos se relacionan como

$$\{\sigma\} = [C](\{\varepsilon\} - \{\varepsilon_0\}) + \sigma_0 \quad (4.8)$$

Donde se relacionan también deformaciones y tensiones iniciales. Para introducirlas en la ecuación, se consideran nulas. La formulación del trabajo virtual se concluye con la expresión

$$\int_v \nabla\{\delta\varepsilon\}^T [C]\{\varepsilon\} dv = \int_v \nabla\{\delta u\}^T (\{X\} - \rho\ddot{u}) dv + \int_s \{\delta u\}^T \{t\} ds \quad (4.9)$$

Se recuerda que en el método del elemento finito, el dominio es discretizado en elementos, que a su vez se conforman y son conectados por nodos. Estos nodos son los que se resuelven para cada elemento. Sin embargo, para modelar el comportamiento dentro de un elemento, es necesario interpolar a partir de los resultados. Como propuesta, se considera una función de interpolación.

Si se vuelve al ejemplo del cuerpo genérico, en el cual el campo de desplazamientos se define como función  $[N]$  de desplazamiento en los nodos, que cambia según el planteamiento que se le dé al problema. La expresión es

$$\{u(x, y, z)\} = [N(x, y, z)]\{U\} \quad (4.10)$$

Donde  $\{U\}$  es el vector de los desplazamientos de los nodos.

Las deformaciones se indican a partir de los desplazamientos con un operador diferencial genérico.

$$\{\varepsilon\} = [D]\{u\} \quad (4.11)$$

Dado que el desplazamiento real no es conocido, la expresión anterior se aproxima con las funciones de interpolación dadas para obtener deformación.

$$\{\varepsilon\} = [D][N]\{U\} = [B]\{U\} \quad (4.12)$$

Retomando la formulación de trabajo virtual, es aproximada para elemento finito como

$$-\int_v [B]^T [C] [B] \{U\} dv + \int_v [N]^T (\{X\} - \rho [N] \{\ddot{U}\}) dv + \int_s [N]^T \{t\} ds = 0 \quad (4.13)$$

Es posible reescribir la ecuación anterior a una forma más semejante a las ecuaciones presentadas para el sistema dinámico real

$$[M]\{\ddot{U}\} + [K]\{U\} = \{P\} \quad (4.14)$$

Donde la matriz de masa tiene que cumplir la condición

$$[M] = \int_v [N]^T \rho [N] dv \quad (4.15)$$

La matriz de rigidez sería equivalente a

$$[K] = \int_v [B]^T [C] [B] dv \quad (4.16)$$

Y las cargas nodales consistentes son

$$\{P\} = \int_v [N]^T \{X\} dv + \int_s [N]^T \{t\} ds \quad (4.17)$$

Retomando los componentes de la aceleración de un cuerpo en rotación, tal y como se les generó en el Capítulo 1, Tabla 1.1.

Tabla 1.1. Componentes de la aceleración para un sistema rotatorio

Aceleración lineal	$\ddot{\vec{r}}$
Aceleración angular	$\dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}$
Efecto Coriolis	$2(\vec{\omega} \times \dot{\vec{r}})$
Aceleración centrípeta	$\vec{\omega} \times \vec{\omega} \times \vec{r}$

Aplicando el principio de D'Alembert, la contribución del trabajo virtual relaciona la matriz de inercia con la aceleración lineal.

Así, cada una de estas matrices debe generarse para cada elemento, para después llevar a cabo el llamado ensamble y la solución del sistema lineal generado.

En cuanto a la conveniencia de usar cierta discretización, cabe aclarar que una mayor discretización da resultados con errores menores a costa del tiempo de solución o la posible convergencia. El gradiente de presión de la película del líquido, como se describe en el Capítulo 3, puede cambiar rápidamente. Pero a más elementos, se requieren más recursos computacionales para resolver el sistema planteado.

Debido a su forma, la discretización más recomendada para un rotor consiste en modelar al mismo como una serie de pequeñas vigas que compartan nodos en los extremos [4.2], como se observa en la Figura 4.2.

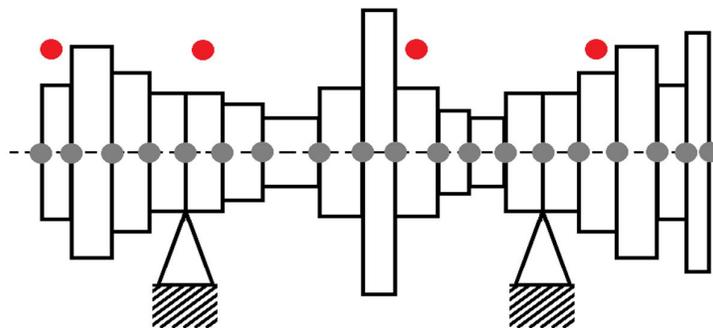


Figura 4.3 Ejemplo de discretización para un rotor sobre dos apoyos rígidos

Es una convención numerar tanto elementos como nodos –representados con puntos grises- de izquierda a derecha. Se procura que los elementos tengan siempre un diámetro constante para facilitar los cálculos dinámicos. Es importante también que los nodos se ubiquen en los puntos de interés para el estudio, particularmente de los apoyos y las cargas aplicadas al rotor.

Cada elemento así modelado tiene seis grados de libertad. El grado del polinomio de interpolación igualmente es relevante en cuanto al error y la posibilidad de solución. En general, el software de solución de estos elementos son controlables, y también es prácticamente indispensable un análisis de sensibilidad para considerar el grado del error.

Tradicionalmente, el modelo de elemento finito se había aplicado de forma principal a sólidos. Reddi [4.1] fue el pionero en la aplicación del método para un volumen de fluido incompresible, abriendo el campo para que se usara el método para películas de fluido.

Se demostró que el modelo de elemento finito para el trabajo con chumaceras mostraba ventajas con respecto a otros métodos –por ejemplo, el modelo de diferencias finitas- debido a que se podían trabajar distintas geometrías sin un cambio radical del programa. Los únicos ajustes se realizan en las condiciones de frontera.

Para concluir, se justifica la ilustración de estos diversos tipos de modelos en orden de complejidad creciente para disponer de alternativas durante la programación si un planteamiento no es solucionable.

### 4.3 Módulo de rotodinámica en ANSYS

Como anteriormente se planteó, se escogió el paquete de ANSYS para manejar el modelo de elemento finito y obtener respuestas numéricas referidas a las respuestas vibratorias de rotores. Por ello se hace una descripción de los elementos que emplea el programa para hallar las soluciones.

La rotodinámica es el estudio de la respuesta vibratoria en estructuras rotatorias simétricas a lo largo de un eje [4.3]. Elementos tales que desarrollan efectos inerciales que deben ser analizados para mejorar su diseño y disminuir la posibilidad de falla. A mayores velocidades de rotación, estos elementos relativos a la inercia son más importantes.

Uno de estos efectos de inercia más importantes es el momento giroscópico generado por el movimiento de precesión del rotor en vibración mientras gira sobre su eje. Conforme esta rotación aumenta en velocidad, el momento giroscópico actuando sobre el motor se vuelve crítico; además de la rigidez de los apoyos y la flexibilidad de la estructura, el entender el amortiguamiento resultante es necesario para encontrar la estabilidad del rotor en vibración.

Al modelo de elemento finito regular del programa se le añade un modelo especial de rotodinámica para considerar los efectos del mismo, y poder obtener resultados de análisis modal, armónico y transitorio para determinar el estado de un equipo rotatorio.

El programa genera una modificación a la ecuación básica de un sistema dinámico de varios grados de libertad que se mostró en el Capítulo 2.

$$\mathbf{M}\ddot{x} + \mathbf{C}\dot{x} + \mathbf{K}x = F(t)$$

Mediante la adición de elementos matriciales que representan los efectos de la inercia –efectos giroscópicos- y el amortiguamiento por la rotación del rotor, representadas como  $G$  y  $B$ , respectivamente

$$\mathbf{M}\ddot{x} + (\mathbf{G} + \mathbf{C})\dot{x} + (\mathbf{B} + \mathbf{K})x = F(t) \quad (4.18)$$

Cabe aclarar que la ecuación está planteada para un sistema de referencia fijo [4.3]. En particular, la matriz  $\mathbf{G}$  depende de la velocidad de rotación, mientras que  $\mathbf{B}$  es dependiente de las rigideces de los elementos del sistema.

A su vez, las citadas matrices se componen por los valores vinculados a las características de masa, rigidez y amortiguamiento de cada uno de los elementos que comprenden el dominio computacional.

Retomando la Ecuación 1.4 que determina la aceleración de un cuerpo en movimiento rotatorio en tres dimensiones respecto a un marco de referencia estático, se puede considerar la aportación de estos efectos en el comportamiento del rotor

$$\vec{a} = \ddot{\vec{r}} + \vec{\omega} \times \dot{\vec{r}} + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \dot{\vec{r}} + \vec{\omega} \times \vec{\omega} \times \vec{r}$$

Recuérdese que  $\vec{r}$  es un vector de posición y  $\vec{\omega}$  hace referencia a la velocidad de rotación del cuerpo.

Como se vio, es posible calcular la contribución del término  $\ddot{\vec{r}}$  mediante la aplicación del trabajo virtual de la fuerza de d'Alembert que introduce una matriz de masa del elemento:

$$[M_e] = \int_V [N]^T [\omega] [N] \rho dV \quad (4.19)$$

Donde  $\rho$  es una ecuación de densidad, y  $[M]$  es la matriz de función de forma.  $V$  es una referencia al volumen de cada uno de los elementos presentes.

El término  $\dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}$  de la aceleración angular se considera como una carga adicional por aceleración. Del mismo modo se introduce como carga el efecto del término  $\vec{\omega} \times \vec{\omega} \times \vec{r}$  de la fuerza centrípeta.

En cuanto a los propios efectos giroscópicos, los elementos de la matriz  $\mathbf{G}$  se estructuran cada uno de la siguiente manera

$$[G_e] = 2 \int_V [N]^T [\omega] [N] \rho dV \tag{4.19}$$

Por su lado, los efectos de amortiguamiento **B** debidos a la rotación se calculan:

$$[B] = [C][\omega]^T \tag{4.19}$$

Lo que genera una matriz no simétrica con efectos en la rigidez de la estructura rotatoria.

En el Capítulo 1 también se trató la importancia del marco de referencia para la formulación del sistema. En particular, este software presenta la opción de manejar ambos, con los consecuentes cambios derivados. La Tabla 4.1 resume dichas diferencias.

Tabla 4.1 Comparativa entre el marco de referencia estacionario y rotatorio en el módulo rotodinámico de ANSYS

Marco de referencia estacionario	Marco de referencia rotatorio
-La estructura debe ser axisimétrica respecto al eje de rotación.	-La estructura puede ser o no axisimétrica respecto al eje de rotación.
-La estructura rotatoria puede ser vinculada a una estructura fija para un análisis. El estator y los soportes –como chumaceras- no deben ser axisimétricos.	-La estructura rotatoria es la única parte del modelo analizado.
-Se puede manejar más de una estructura rotatoria, en un eje diferente de rotación y a diferente velocidad de rotación.	-Sólo puede manejar una estructura rotatoria.
-Maneja los elementos BEAM4, PIPE16, MASS21, SOLID45, SOLID95, SOL-ID185, SOLID186, SOLID187, BEAM188, BEAM189.	- Maneja los elementos MASS21, SHELL181, PLANE182, PLANE183, SOL-ID185, SOLID186, SOLID187, BEAM188, BEAM189, SOLSH190, SHELL281.

Los análisis llevados a cabo se consideran con un marco de referencia estacionario, lo que implica que el desbalance del disco tendrá que incluirse por medios diferentes a su constitución directa por medio de la geometría.

Para las chumaceras, se ha establecido en el Capítulo 3 que la mejor aproximación lineal es mediante un complejo resorte-amortiguador. La estructura del mismo es la misma que se referencia en Capítulo 3, Figura 3.3

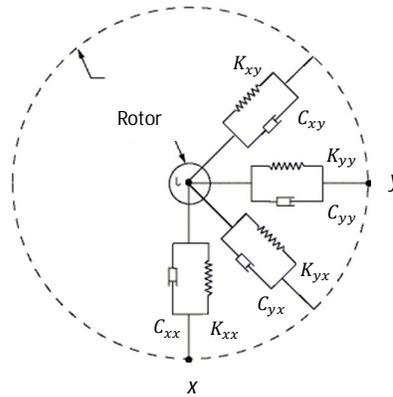


Figura 3.3 Coeficientes directos y cruzados de rigidez y amortiguamiento para una chumacera.

El programa ofrece la posibilidad de utilizar estos ocho valores con un valor fijo, o bien como funciones de la velocidad de rotación, o mediante la introducción de valores tabulados [4.3]. Se exploran estas posibilidades para varios posibles modelos.

El programa ofrece la posibilidad de obtener gráficos de órbita, diagramas de Campbell y otros cuya interpretación permitirá determinar los parámetros críticos en el diseño y el comportamiento específico del rotor; mismos que son presentados como parte de los resultados.

#### 4.4 Programación del modelo de elemento finito

Se cuenta ya con cierto número de tutoriales ofrecidos por el programa, así como estudios previos [4.4] que utilizan ANSYS Parametric Design Language (APDL) para resolver problemas relacionados con la rotodinámica.

Con el objetivo de poder contar con alguna referencia, se toman los modelos clásicos descritos en el Capítulo 2, particularmente el rotor de Jeffcott. Se espera que al correr el programa, los resultados arrojados correspondan con la teoría. De

esta manera se puede aceptar o descartar el modelo, y se pueden considerar con mayor seguridad una modelación de un rotor real.

En primera instancia, se decide construir el modelo del Rotor de Jeffcott, para correr un análisis modal y armónico.

Para un modelo de elemento finito generalmente se consideran parámetros de densidad promedio, el módulo de Young y el módulo de Poisson, masas de eje y discos, las dimensiones de ambos para calcular momentos de inercia. Todos estos elementos se pueden controlar fácilmente en el programa.

Debido a que en un principio se planteó utilizar el citado GE Bently Nevada Rotor Kit, se tomaron algunas de sus características físicas, descritas en la Tabla 4.2

Tabla 4.2 Características asignadas al modelo del rotor

<b>Característica</b>	<b>Dimensión</b>
Longitud total eje	0.5 m
Radio del disco	0.05 m
Diámetro del eje	0.012 m
Espesor del disco	0.01 m
Masa conjunta del rotor	1.0542 kg

Ahora bien, la aportación de este trabajo consiste en el ajuste y mejora del código preexistente [4.4] añadiendo el efecto de los apoyos, que en el trabajo original se asumieron como resortes lineales con una rigidez conocida y constante.

La teoría de chumaceras expuesta permite el cálculo de los valores ingresados al código. Puesto que primero se experimenta con el estado estacionario del rotor, la excentricidad de las chumaceras es una constante, y es posible ingresar algunos valores típicos para estas características.

En el caso de la velocidad, es una variable controlable. Como primer acercamiento, se considera la operación estable a 3600 rpm, si bien la velocidad máxima posible es de 10,000 rpm. A baja velocidad se esperan ver más claramente los efectos en las fuerzas de la chumacera, debido al poco peso del rotor.

Tabla 4.3 Características asignadas al modelo del rotor

Característica	Dimensión
Viscosidad absoluta	$0.019 \text{ N} \cdot \text{s}/\text{m}^2$
Claro radial	$6 \times 10^{-6} \text{ m}$
Relación L/D	0.5
No. Sommerfeld	15.8894
Excentricidad $e/C_r$	0.15542
Ángulo de equilibrio	$1.3730 \text{ rad}$

El rotor se discretiza a lo largo de su eje en elementos. Cada uno es aproximadamente la vigésima parte de la longitud máxima. La distribución se observa en la Figura 4.3

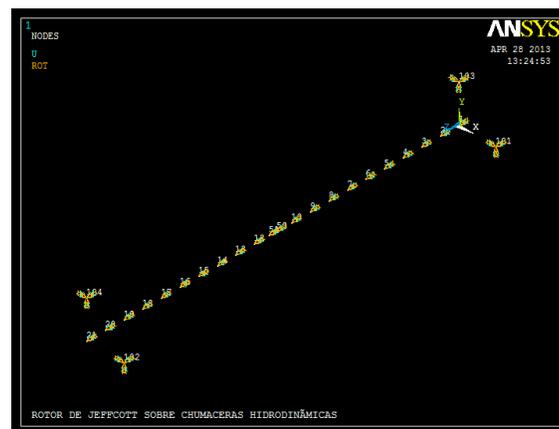


Figura 4.4 Discretización del modelo

Se consideran nodos adicionales en los extremos para para simular los apoyos mediante el uso de dos elementos adicionales (COMBI214) que reflejan el comportamiento de las chumaceras.

Ahora bien, se observará también que la geometría del rotor usa como referencia un sistema cartesiano. Los coeficientes de rigidez y amortiguamiento, dados en un sistema radial tangencial, entonces deberán transformarse para poder ser ingresados al código. Esto se realizó con ayuda de una plantilla en Excel para el ambos casos. Para el caso de la presurización, se consideró un único punto de inyección alineado en la dirección axial con el centro de la chumacera, y ubicado en la parte superior.

Para cada uno de los elementos del eje, se considera la modelación por medio de la viga de Timoshenko (BEAM188), lo que añade el efecto de la flexibilidad del rotor. Los efectos giroscópicos sobre el rotor se activan para el análisis con el comando CORIOLIS, tomando en cuenta un marco de referencia estacionario [3]. Este comando también influye al incluir efectos de cambios en la rigidez debidos al giro de la propia estructura.

Para el caso del disco existen dos opciones válidas. La primera consiste en modelar el disco como una viga (BEAM188) con un diámetro distinto al del eje. De esa manera, se respetan sus características de inercia y material asignado. Este método implica modelar el eje en dos partes, unidas por el propio disco.

Otra posibilidad implica determinar la posición de una masa (MASS21) en el centro del eje. Esto obliga al cálculo y la asignación manual de las características físicas del disco.

Todos los códigos programados para ANSYS se muestran en el Anexo D

---

## Capítulo 5 – Resultados y Conclusiones

---

A lo largo de este capítulo se muestran los resultados obtenidos de la ejecución de los códigos generados para ANSYS APDL.

Se inicia con el caso del rotor de Jeffcott apoyado en chumaceras hidrodinámicas cortas, definido como el caso clásico. Éste sirve como base para establecer las comparaciones al añadir la presurización.

Se generaron las corridas referentes a tres distintos niveles de presurización externa para el caso de una chumacera cortas con un puerto de presurización único ubicado en la parte superior.

Como entregables, se presentan los análisis modal, armónico y transitorio principalmente a través de gráficas.

### 5.1 Modelo de rotor de Jeffcott apoyado en chumaceras hidrodinámicas cortas. Caso clásico

Tal y como se describió en el Capítulo 4, se consideró la construcción de un modelo de rotor del Jeffcott mediante un código programado en ANSYS Parameter Design Language (APDL) [5.1]. Este tipo de programación ha sido empleada para la caracterización de rotores reales con resultados positivos [5.2].

Al mismo se le colocan en los extremos las características de rigidez y amortiguamiento correspondientes a una chumacera corta ( $L/D \rightarrow \frac{1}{4}$ ) sin presurización externa para realizar un análisis modal, armónico y transitorio.

Dichos coeficientes de rigidez y amortiguamiento se obtienen a partir de las expresiones ya descritas [5. 3] que los vinculan con el valor de la excentricidad entre el eje y la chumacera. Además, se cuenta con la ventaja de que existen tablas basadas en experimentación (Khonsari) [5.3]

### 5.1.1 Análisis modal

Como resultado de este primer análisis se muestra el diagrama de Campbell generado por el programa. Hay que recordar que éste, también conocido como diagrama de interferencia, muestra el espectro de respuestas de un sistema en función de su régimen oscilatorio [5.4].

En rotodinámica, los efectos giroscópicos así como las condiciones hidrodinámicas correspondientes a la película de aceite dentro de una chumacera afectan los eigenvalores vinculados a cada modo de vibración del rotor.

ANSYS resuelve el eigenproblema vinculado al sistema propuesto por métodos numéricos [5.1] en función de las velocidades de rotación. Para este análisis en particular se consideraron los valores de cero (el sistema en reposo), 1800, 3600 y 10 000 revoluciones por minuto (rpm). A partir de estos valores, se genera la Figura 5.1.

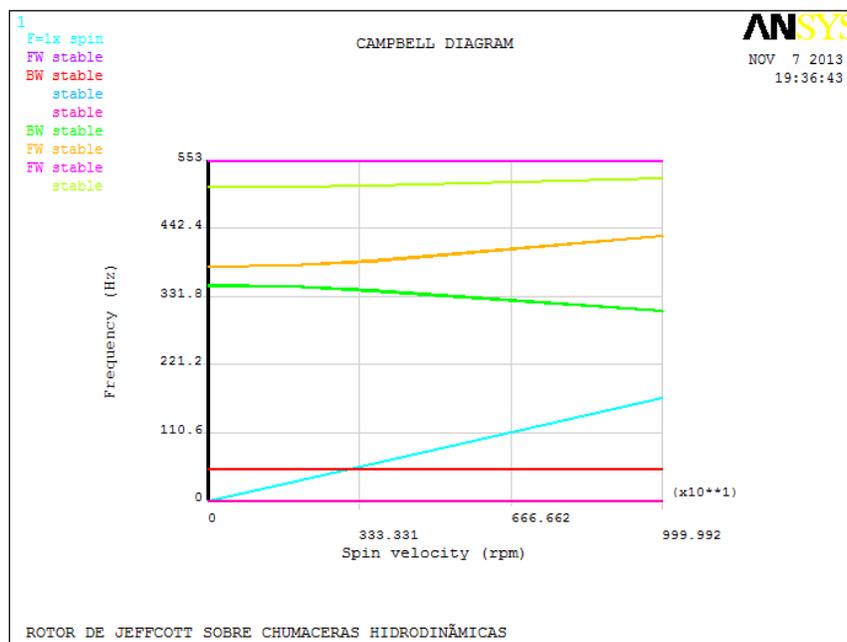


Figura 5.1 Diagrama de Campbell para el rotor propuesto. Caso sin presurizar

Se observa que cada una de las líneas horizontales representa un modo de vibración del rotor. Asimismo se observa una línea inclinada en color cian a 45° (la

escala de los ejes no lo hace aparente) que indica una posible excitación producto del desbalance de la masa del disco, existente por definición en un rotor de Jeffcott.

No se consideran los posibles efectos de desalineamiento. Tampoco hay excitaciones supersíncronas al no haber álabes o elementos parecidos que puedan provocar perturbación.

La interpretación del diagrama indica que la operación normal pasa necesariamente por el primer modo de vibración del rotor. Otros modos de vibración son demasiado altos como para alcanzarse a la máxima operación posible del rotor (10000 rpm) y no serían relevantes durante la operación.

Los valores de las frecuencias naturales obtenidas se muestran de forma numérica en Hz en la siguiente Tabla.

Tabla 5.1 Frecuencias naturales del sistema en relación a la velocidades de prueba estudiadas.

Caso clásico

Giro	0 rad/s	188.496 rad/s	376.991 rad/s	1047.190 rad/s
FW	50.436	50.438	50.440	50.466
BW	50.677	50.675	50.673	50.666
BW	349.343	347.999	341.225	308.042
FW	380.223	381.660	389.94	429.498
	509.327	509.402	509.154	509.767
FW	551.901	551.905	551.910	551.925

Las siglas FW y BW indican el sentido positivo y negativo del giro del eje, respectivamente (Forward, Backward).

En la Tabla anterior, se comparan las velocidades de operación con las frecuencias naturales calculadas bajo esas condiciones. Debido a que se trabaja con un método numérico, se espera cierta variación dentro de los resultados, que a pesar de ello son consistentes.

En el caso de las dos primeras cifras dadas se pueden considerar pertenecientes al mismo modo de vibración, el primero, en un valor promedio de 50.5 Hz. El programa las considera separadas por el cambio del sentido del giro.

### 5.1.2 Análisis armónico

A efectos del siguiente análisis se considera una pequeña fuerza con componentes en las direcciones Y,-X de  $10 \times 10^{-5} N$  respectivamente, aplicada sobre el disco. Se genera una excitación del rotor que es síncrona por completo.

La amplitud de la rotación de los nodos correspondientes a las chumaceras y al centro del disco se observan en la Figura 5.2

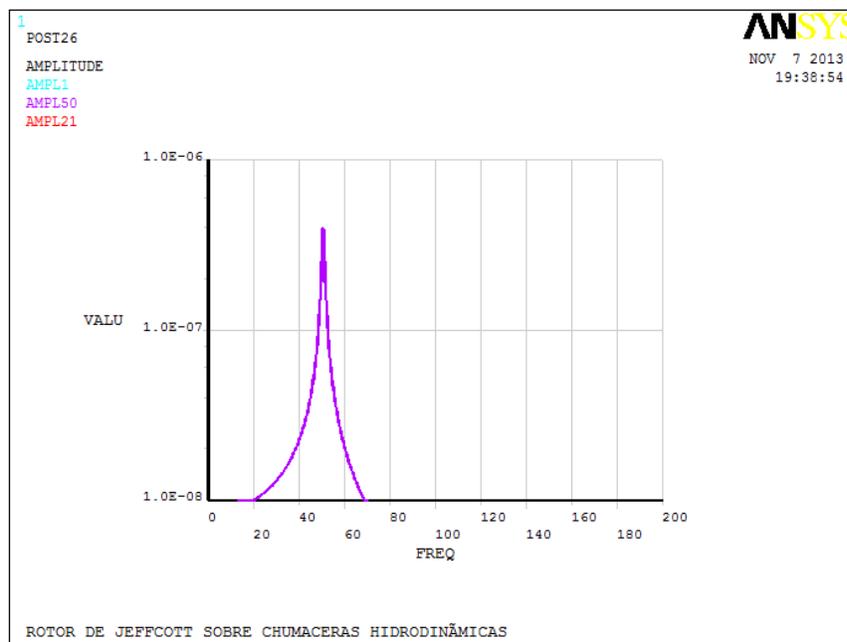


Figura 5.2 Amplitud de desplazamiento del nodo equivalente al disco en función de la frecuencia de operación para estado estacionario

En la gráfica se observa que los muñones del eje, tienen un desplazamiento ínfimo en comparación al disco central, que tiene un aumento súbito de amplitud que corresponde a su paso por la primera frecuencia natural (50.505 Hz).

De la escala ubicada en la figura, se encuentra que la amplitud total máxima.

En comparación al claro radial de la chumacera ( $6 \times 10^{-6} m$ ), la magnitud del desplazamiento total del muñón del eje es de  $1 \times 10^{-8} m$ . Por su parte el disco tiene una amplitud de desplazamiento de  $5 \times 10^{-7} m$ . al ser el rotor pequeño y ligero.

Por su parte, la Figura 5.3 ilustra la configuración de la geometría de las órbitas en tres dimensiones. Se observa que al ser las chumaceras simétricas, las órbitas de las distintas partes del rotor son circulares.

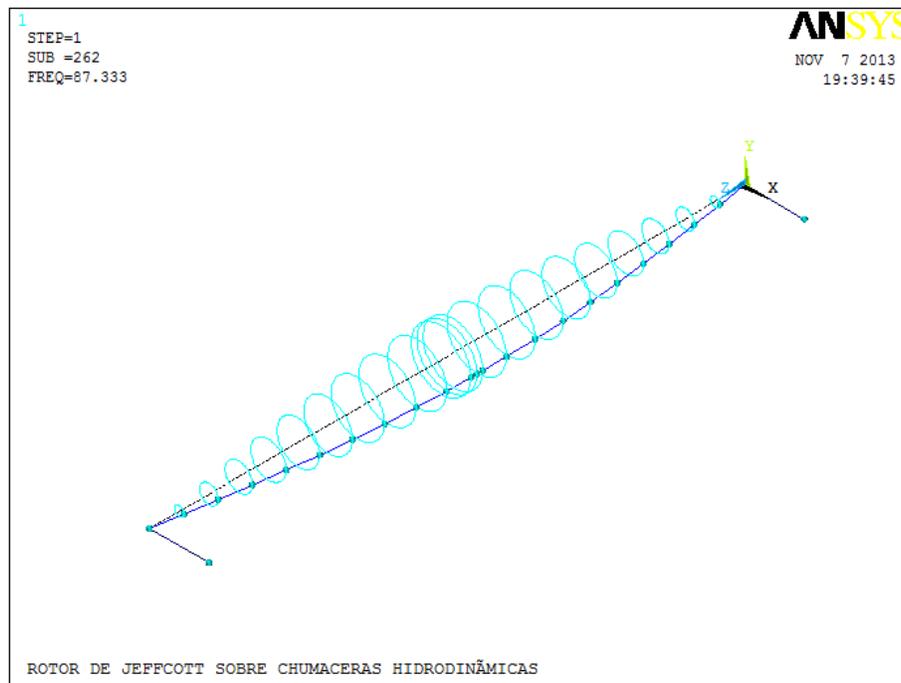


Figura 5.3 Órbitas tridimensionales del rotor para estado estacionario

De forma cualitativa, los resultados obtenidos coinciden con la experiencia práctica.

Uno de los entregables del programa es la generación de un video que muestra la geometría del rotor durante el análisis armónico. Una captura del mismo se muestra en la Figura 5.4

En los primeros videos obtenidos se observaba una aparente inestabilidad. Sin embargo, dicho efecto se evitó mediante la modificación de la escala de la deformación medida.

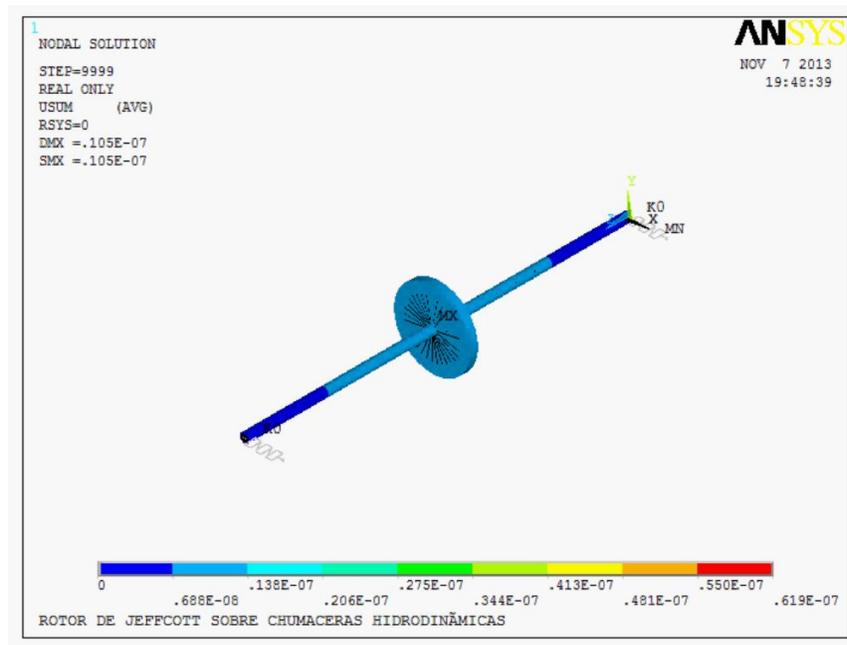


Figura 5.4 Mapeo de la amplitud del modelo del rotor a 3600 RPM

La deformación se muestra prácticamente simétrica en el eje, resultado de la semejanza de los elementos de soporte

### 5.1.3 Análisis transitorio

A diferencia de los análisis anteriores, ahora la excentricidad no es un valor constante para el estado transitorio, por lo que los coeficientes de rigidez y amortiguamiento van cambiando también, dependiendo del valor del número de Sommerfeld y en última instancia de la aceleración del rotor para este análisis.

Ahora bien, ANSYS permite el ajuste de los coeficientes de rigidez y amortiguamiento como función de la velocidad de rotación. Con lo cual es posible

una interpolación lineal de los valores intermedios de rigidez y amortiguamiento en función de la velocidad de rotación. En el caso de las condiciones iniciales al arranque ( $0 \text{ rad/s}$ ) se calcularon los coeficientes de rigidez y amortiguamiento para la baja velocidad de una revolución por minuto, considerándolo un límite.

Durante este tránsito, se espera encontrarse y superar la primera frecuencia natural establecida en 50.5 Hz.

La siguiente Tabla muestra los resultados obtenidos para los coeficientes a distintas velocidades.

Tabla 5.2. Valores de rigidez y amortiguamiento en las chumaceras a distintas velocidades de operación.

RPM	1	500	900	1800	3600
rad/s	0.10471976	52.3598776	94.2477796	188.495559	376.991118
Sommerfeld	0.00220687	1.10343539	1.98618371	3.97236741	7.94473482
KXX	183501.539	3940906.11	5036478.04	6770890.76	10253583.6
KYY	1813.96367	1630891.51	3400044.91	7848041.1	16909882.5
KXY	21270.4257	3676074.13	6695070.89	14998297.6	41481734.9
KYX	-1221.07422	-596863.313	-1930020.02	-8065979.48	-33182332.5
CXX	428293.107	138402.134	139506.421	156697.189	218263.717
CYY	140480.725	48517.824	61589.316	99916.4491	184732.693
CXY	0.03128119	17658.5313	26365.8898	36752.9152	43168.2726
CYX	0.03128119	17658.5313	26365.8898	36752.9152	43168.2726

Las velocidades elegidas para efectuar los cálculos buscan una distribución más o menos uniforme de los valores de excentricidad vinculados.

Se recuerda que las unidades para estos coeficientes son de  $(N/m)$  para las rigideces  $K_{ij}$  y de  $(N s/m)$  para el amortiguamiento  $C_{ij}$

En teoría, entre más valores se asignen en el programa, el modelo será más exacto al imitar mejor el comportamiento de la película de aceite. Sin embargo, a partir de cierto número de valores asignados, se llega a problemas de convergencia y/o capacidad.

Se muestra en las Figuras siguientes, basadas en los valores tabulados, la comparación del comportamiento entre el valor de la excentricidad (en el eje horizontal) y los coeficientes de rigidez y amortiguamiento para su más fácil comparación con las gráficas existentes [3]. Las gráficas están respectivamente en  $(N/m)$  y  $(N s/m)$  para el eje vertical. La excentricidad no tiene dimensiones.

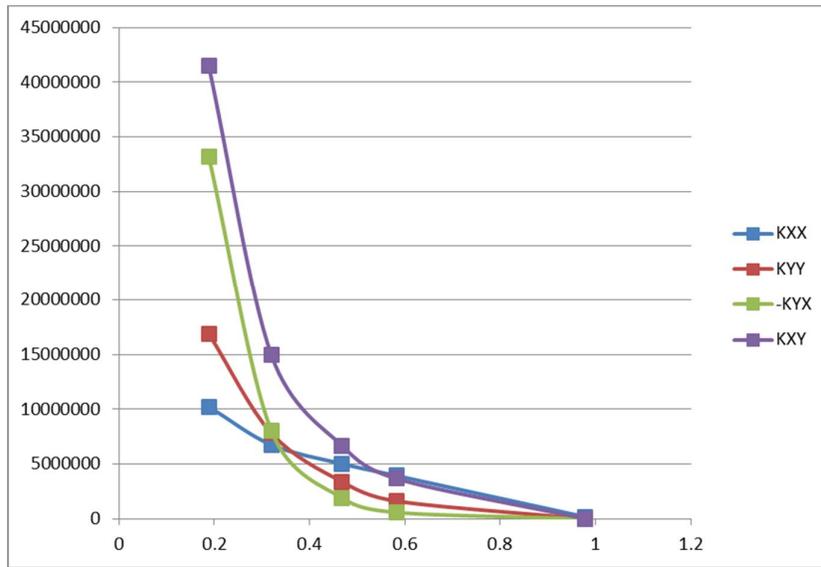


Figura 5.5a Interpolación de los coeficientes de rigidez a partir de los valores de la razón de excentricidad

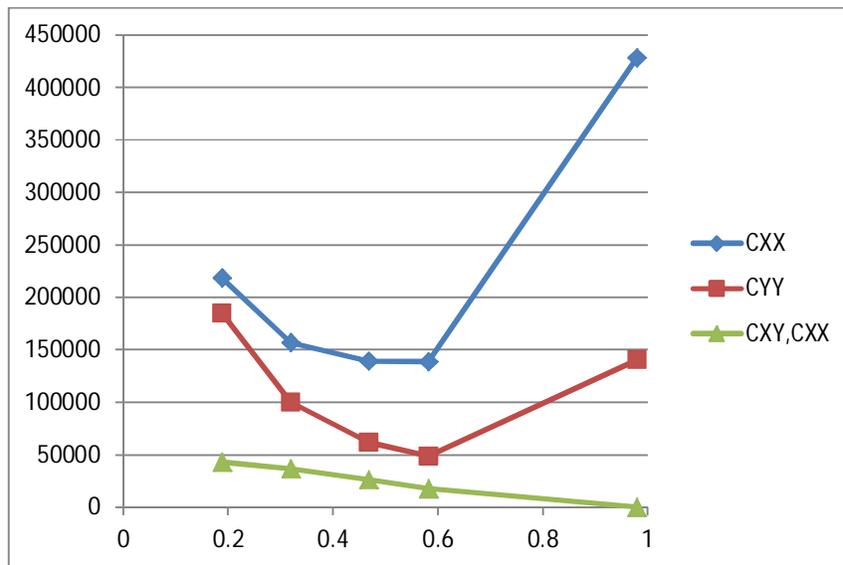


Figura 5.5b Interpolación de los coeficientes de amortiguamiento a partir de los valores de la razón de excentricidad

Para efectos de comparación, se retoman las tablas clásicas ya conocidas y expuestas en el Capítulo 3.

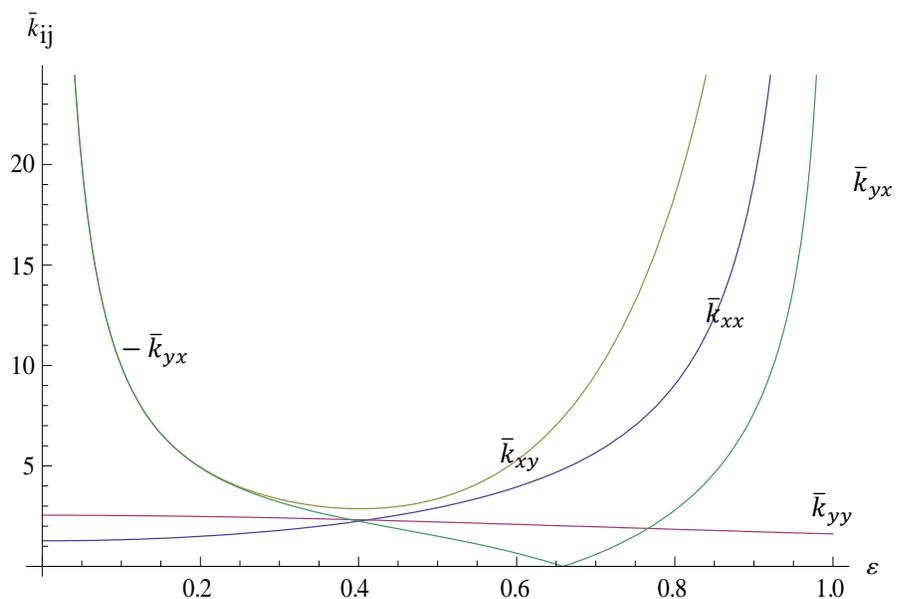


Figura 3.4 Coeficientes de rigidez para una chumacera corta en función de la razón de excentricidad.

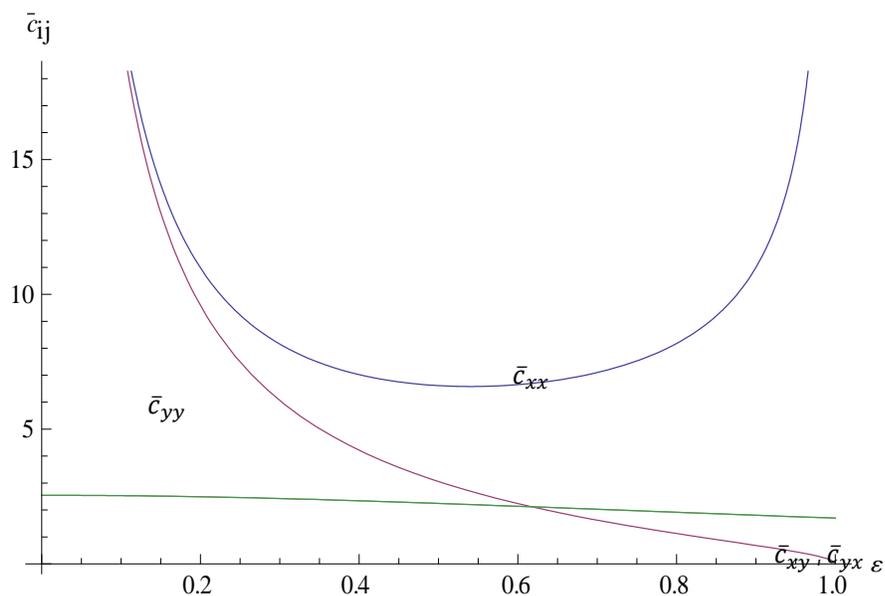


Figura 3.5 Coeficientes de amortiguamiento para una chumacera corta en función de la razón de excentricidad.

Ahora bien, si la comparación directa no es posible al considerar en la extrapolación valores con dimensiones y las tablas se dan en términos adimensionales, el comportamiento cualitativo debe ser parecido.

Se observa una semejanza aceptable que también permite un mejor uso de los recursos computacionales. Conforme más cerca del valor unitario se halle excentricidad, hay más cambios de comportamiento; pero al final se da una convergencia. Con esto en consideración, se realiza la solución numérica del sistema sobre el código ajustado a estas necesidades.

En cuanto a los resultados del análisis transitorio, se monitoreó la amplitud total en el disco, la máxima en todo el rotor, durante diversos intervalos de tiempo (6 y 8 s). La magnitud del desplazamiento del mismo se observa en las Figuras 5.6a y 5.6b.

Téngase en cuenta que la aceleración para cada una es ligeramente diferente, de  $62.83 \text{ rad/s}^2$  y  $47.1 \text{ rad/s}^2$ . La escala puede variar.

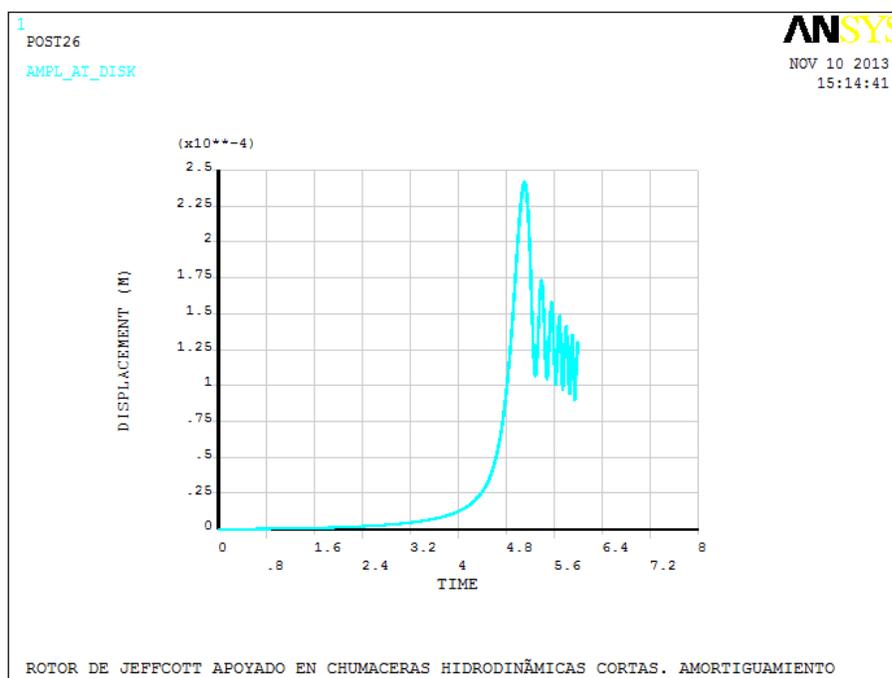


Figura 5.6a Amplitud vibracional absoluta en el disco del disco para estado transitorio de 0 a 6 s

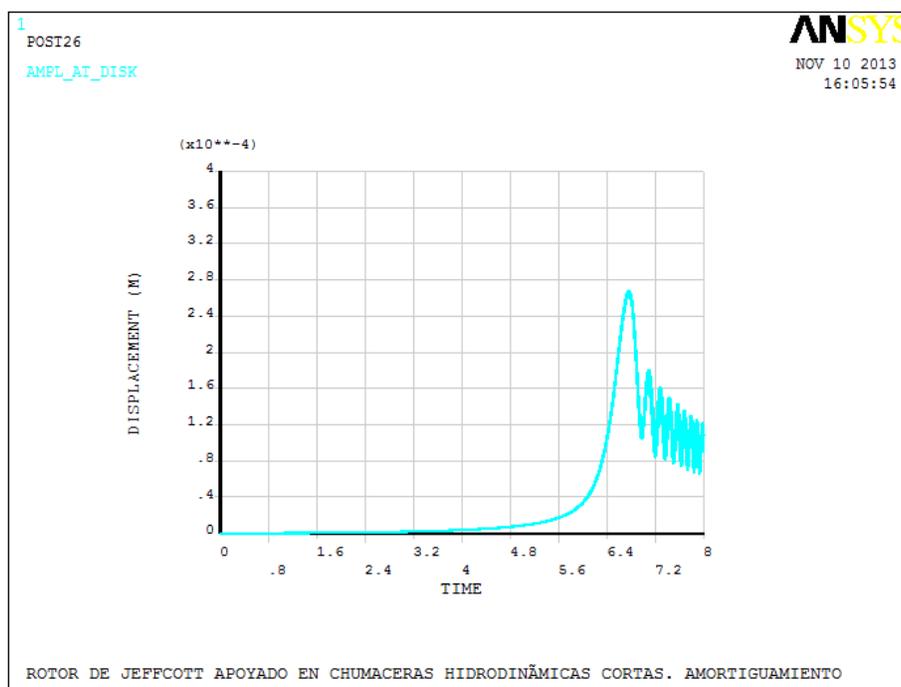


Figura 5.6b. Amplitud vibracional absoluta en el disco del disco para estado transitorio de 0 a 8 s

Las Figuras anteriores muestran la evolución de la firma vibratoria en la dirección Y. Al igual que en la figura anterior, los valores pico se identifican con el paso por la primera frecuencia natural (50.505 Hz). La amplitud máxima alcanzada por el disco en el proceso de aceleración es de  $2.5 \times 10^{-4}$

Uno de los resultados de mayor interés en este análisis es observar el comportamiento de las chumaceras, ya que de su comportamiento depende la estabilidad de todo el rotor. La trayectoria correspondiente a una de las chumaceras se encuentra en las Figura 5.7a y 5.7b. Estas y todas las gráficas semejantes muestran la posición a partir del centro geométrico correspondiente al eje en metros.

Cabe añadir que por el manejo de los datos y en comparación con las convenciones de ejes presentada en Capítulos anteriores, todas las gráficas deben rotarse  $90^\circ$  en sentido anti horario para su interpretación.

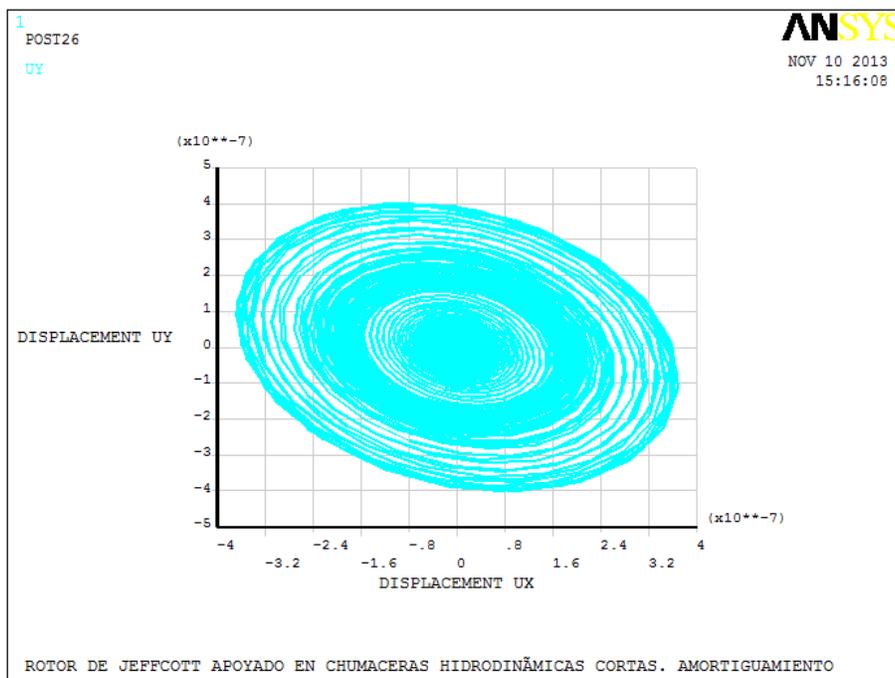


Figura 5.7a Órbita del nodo equivalente a la chumacera durante el estado transitorio de 0 a 6 s.

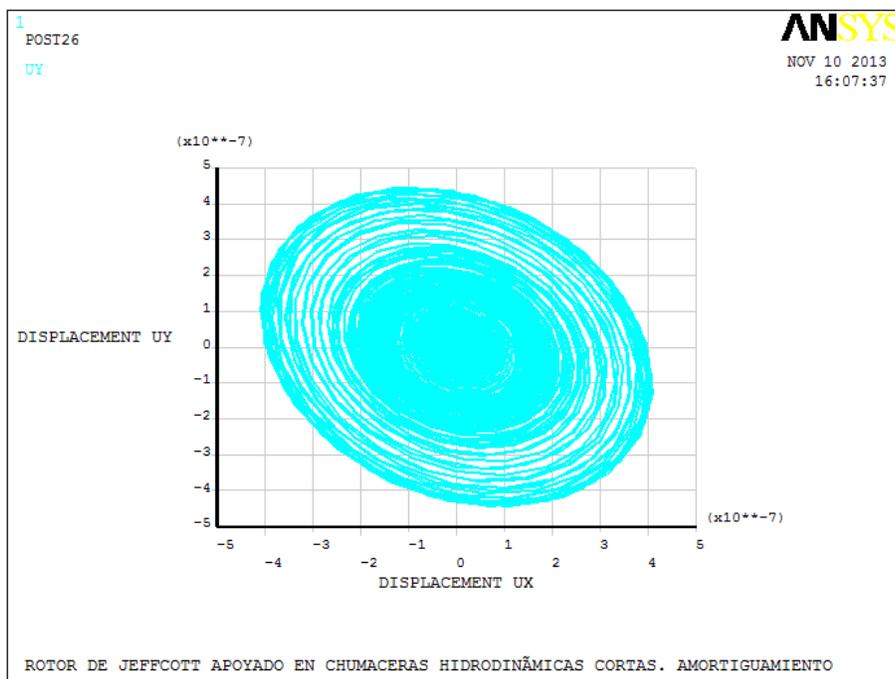


Figura 5.7b Órbita del nodo equivalente a la chumacera durante el estado transitorio de 0 a 8 s.

Se encuentra en ambas figuras una serie de órbitas elípticas con cierta inclinación, un comportamiento típico y esperado en la operación de un rotor. Son semejantes en valores, lo que no es sugerido por la escala.

Ahora bien, la interpretación de estas gráficas no es tan sencilla y resulta más valioso considerar la posición del muñón y su órbita en los momentos clave. Para tal fin, se generan las órbitas acotadas a partir de los resultados numéricos obtenidos.

Esta y todas las Figuras de órbitas parciales subsecuentes giran en sentido anti horario desde una posición inicial. Los intervalos de tiempo mostrados coinciden con el periodo de arranque, el paso por la primera frecuencia natural y el final del estado transitorio.

Para este primer caso, se inicia en una posición de equilibrio al inicio del movimiento (Figura 5.8a) que va girando alrededor de una órbita más grande (Figura 5.8b). La flecha indica la evolución de la órbita y se coloca en el punto correspondiente al último dato.

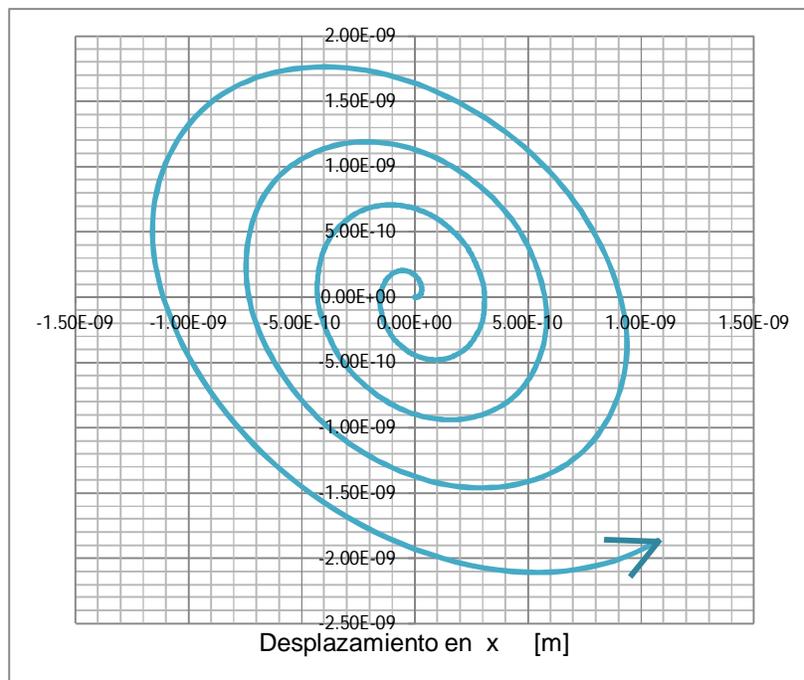


Figura 5.8a Órbita del nodo equivalente a la chumacera durante el estado transitorio de 0 a 1 s

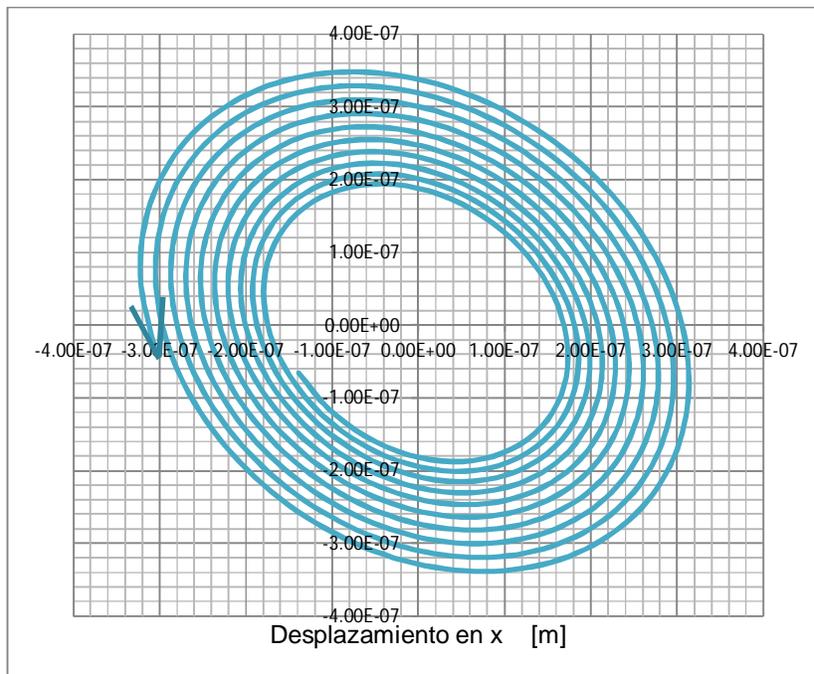


Figura 5.8b Órbita del nodo equivalente a la chumacera durante el estado transitorio de 6.4 a 6.5 s

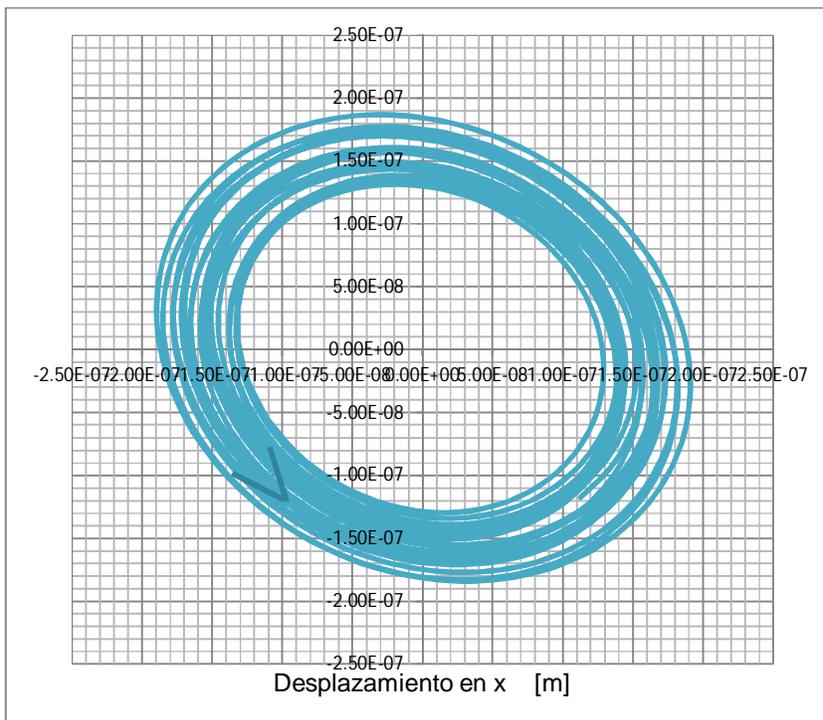


Figura 5.8c Órbita del nodo equivalente a la chumacera durante el estado transitorio de 7.6 a 8 s

Después de cierto tiempo de operación, la geometría de la órbita será la del estado estacionario, conocida por la excentricidad  $\varepsilon$  con el ángulo de equilibrio  $\phi$

Dadas las condiciones de simetría asumidas en la programación, no se muestra el comportamiento de la segunda chumacera en estas gráficas al ser idéntico.

En cuanto al propio disco (Figuras 5.9 a y b) su comportamiento es más simétrico, pero también se ve afectado por los apoyos. Las Figuras 5.10a, 5.10b y 5.10c muestran los resultados para periodos específicos de tiempo, los mismos usados para la chumacera.

Gráficas con similares características servirán para análisis posteriores en condiciones distintas para fines de comparación; siguen por lo tanto las mismas convenciones aplicadas. Los cambios de color en la trayectoria de la órbita carecen de significado y sirven sólo como distinción estética.

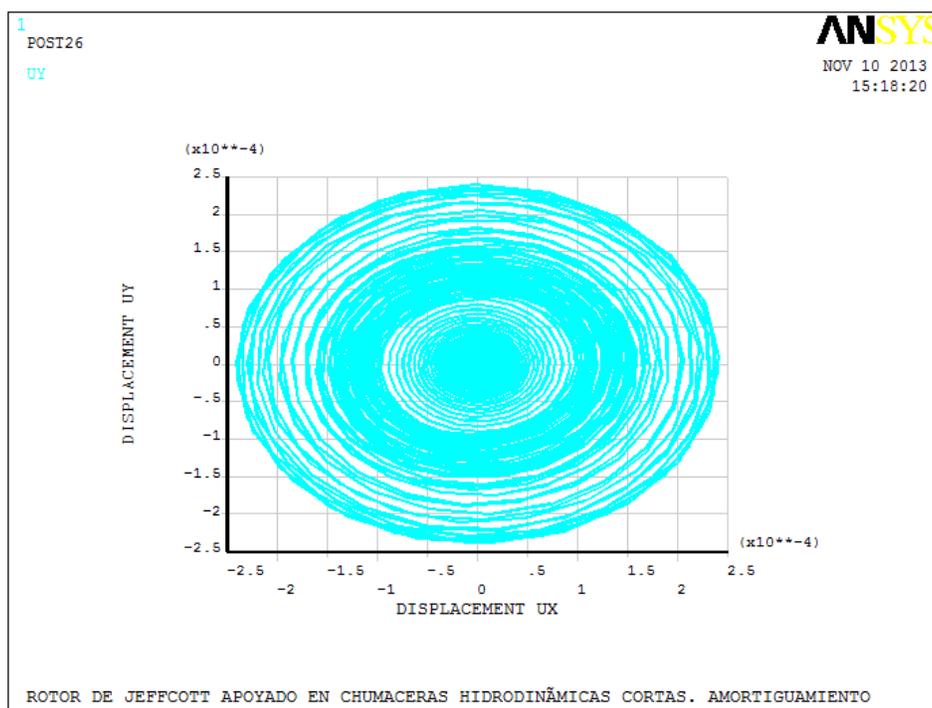


Figura 5.9a Órbita del nodo equivalente al disco durante el estado transitorio de 0 a 6 s.

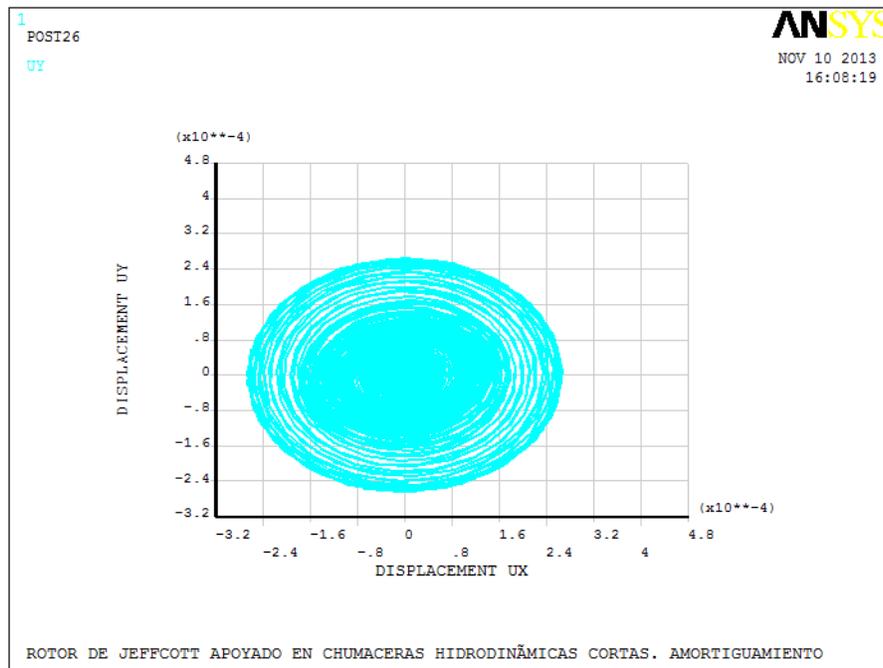


Figura 5.9b Órbita del nodo equivalente al disco durante el estado transitorio de 0 a 8 s.

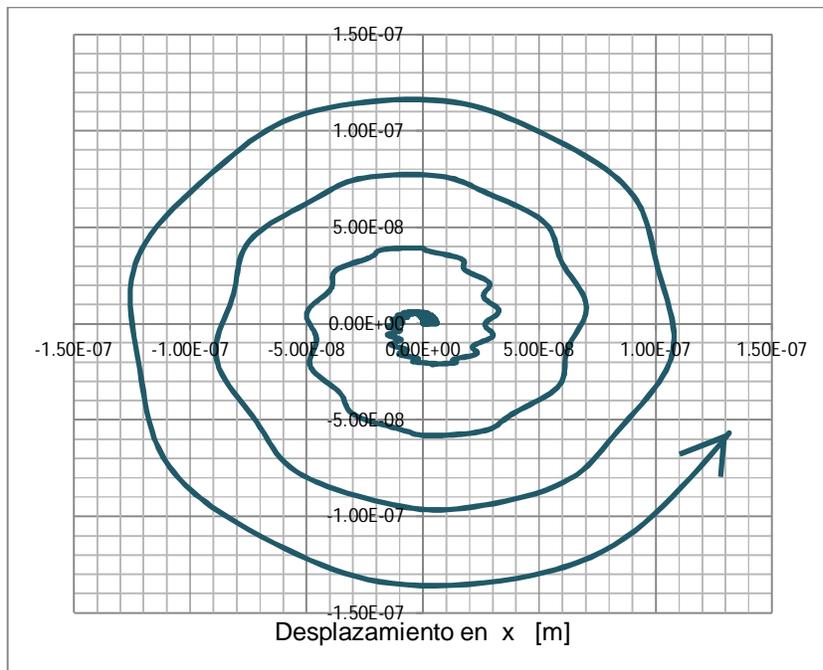


Figura 5.10a. Órbita del nodo equivalente al disco durante el estado transitorio de 0 a 1 s

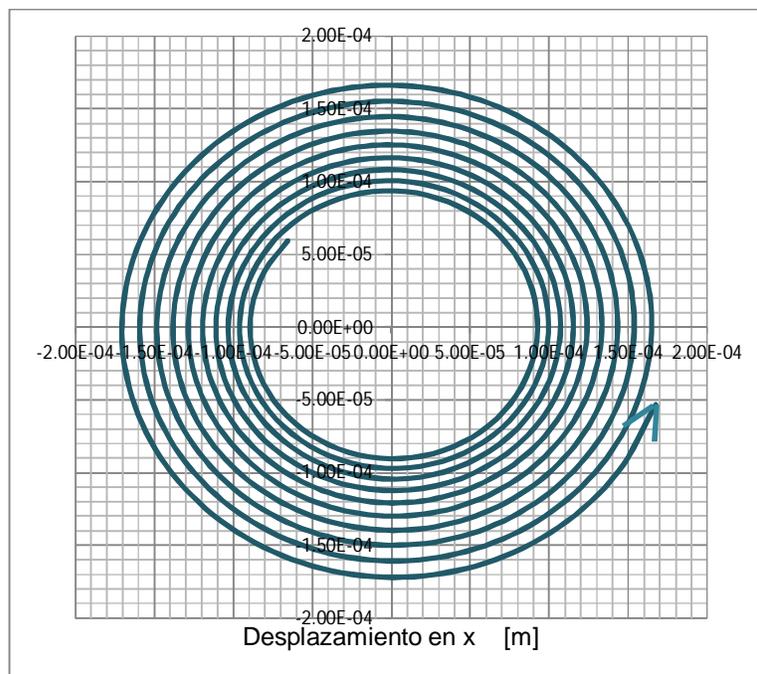


Figura 5.10a. Órbita del nodo equivalente al disco durante el estado transitorio de 6.35 a 6.55 s

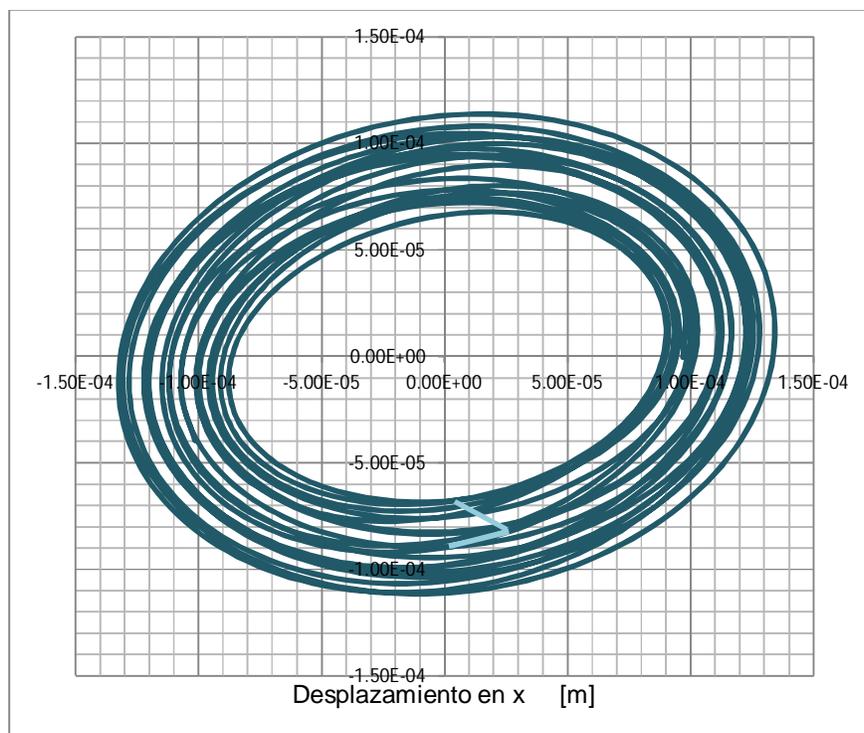


Figura 5.10c. Órbita del nodo equivalente al disco durante el estado transitorio de 7.8 a 8 s

---

Al inicio (Figura 5.10.a) se observa un comportamiento poco regular respecto a la amplitud alcanzada por el disco que poco a poco toma la forma de órbita conforme aumenta su magnitud.

El comportamiento del disco es semejante al de las chumaceras en lo general. En particular la Figura 5.10.b demuestra la disminución progresiva de la amplitud de la órbita del centro del disco hasta su estabilización. Por el desbalance considerado dentro de las condiciones de programación, se llegará a una amplitud definida de vibración.

En general, puesto que existen soluciones analíticas para el modelo del rotor de Jeffcott, es posible comparar la cercanía de los resultados obtenidos con reportes experimentales, evidencia y análisis matemáticos. Y en consecuencia la exactitud del modelo propuesto. Asimismo, resulta un punto de partida para comparar el efecto que tiene la presurización de los apoyos en esta respuesta típica.

## **5.2 Modelo de rotor de Jeffcott apoyado en chumaceras hidrodinámicas cortas. Caso con presurización externa en la parte superior**

Previamente se ha considerado la simulación de un rotor de Jeffcott apoyado en un par de chumaceras cortas sin presurización externa, definidas como el caso clásico. Esto es porque el comportamiento de la película de aceite en las mismas está bien documentado y existen expresiones analíticas vinculadas al mismo.

Dados los alentadores resultados anteriores, se procede ahora a añadir al modelo generado en ANSYS los efectos de la existencia de un puerto de presurización en la chumacera, lo que invariablemente modifica el comportamiento de la película de aceite presente.

Existen pocos trabajos relativos a este caso, y son fundamentalmente experimentales [5.3]. Ahora bien, el objetivo es confirmar el uso de expresiones analíticas [5.3] desarrolladas para el caso presurizado mediante el método de elemento finito. En estas nuevas expresiones aparecen las variables  $\alpha, \beta, \bar{q}_p, f$

Las dos primeras hacen relación a la posición del punto de inyección, respecto al centro geométrico de una chumacera cilíndrica. Su ubicación se muestra en la Figura 3.8 ya mostrada en el Capítulo 3.

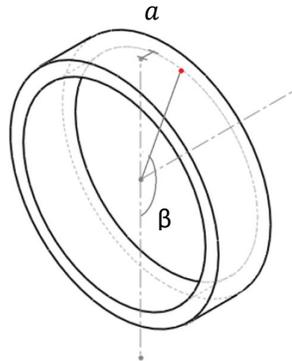


Figura 3.8 Ubicación de un punto arbitrario de presión para una chumacera presurizada en función de los parámetros  $\alpha$  y  $\beta$ .

En este primer caso presurizado, se asume un puerto único de inyección de lubricante presurizado ubicado justo al centro de la dimensión axial, y en posición perfectamente vertical ( $\alpha = 0$ ,  $\beta = \pi$  rad). De experiencias anteriores, se considera la presurización superior mejor y más estable que la del puerto centrado inferior. Otras configuraciones son menos comunes.

En cuanto a la expresión  $\bar{q}_p$  depende a su vez de  $f$ . Este valor indica la fuerza de presurización con respecto al peso.

En primer lugar se usó una  $f = 20$ . El análisis del caso clásico técnicamente corresponde a la ocurrencia del valor  $f = 0$ . El valor de  $f$  se modificará para estudiar los efectos en la respuesta vibratoria del mismo, aumentándolo a

Al igual que en el caso clásico, se consideran tres análisis a entregar. Las características de geometría del rotor y chumaceras se mantienen constantes para fines de control.

### 5.2.1 Análisis modal

Como resultado se muestra el diagrama de Campbell generado por el programa para cada uno de los casos.

Al utilizar el mismo código, se generan en condiciones similares y permiten una comparación directa.

Para este análisis en particular se consideraron los valores de cero (el sistema en reposo), 1800, 3600 y 10 000 rpm. A partir de estos valores, se genera las Figuras 5.11a, 5.11b y 511c; como se dijo, correspondientes a tres diferentes niveles de presurización:  $f = 20$  ,  $f = 50$  y finalmente  $f = 100$

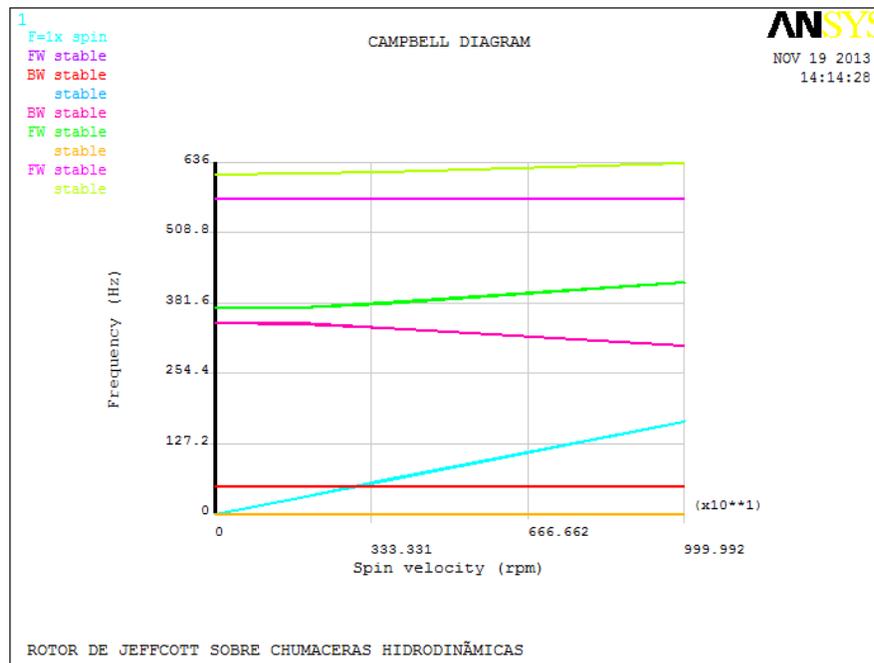


Figura 5.11a Diagrama de Campbell para el rotor propuesto. Caso con puerto de inyección en la parte superior y  $f = 20$ .

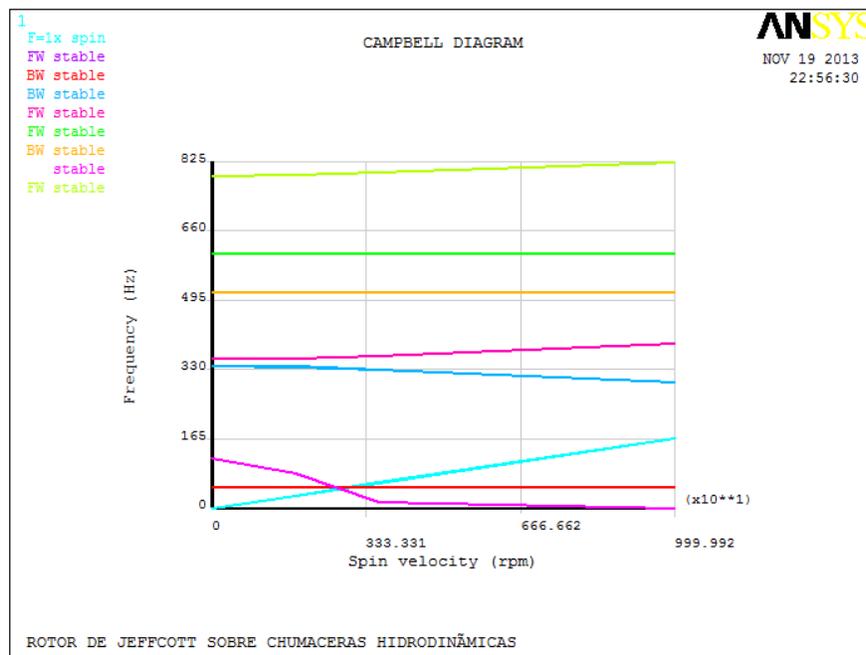


Figura 5.11b Diagrama de Campbell para el rotor propuesto. Caso con puerto de inyección en la parte superior y  $f = 50$ .

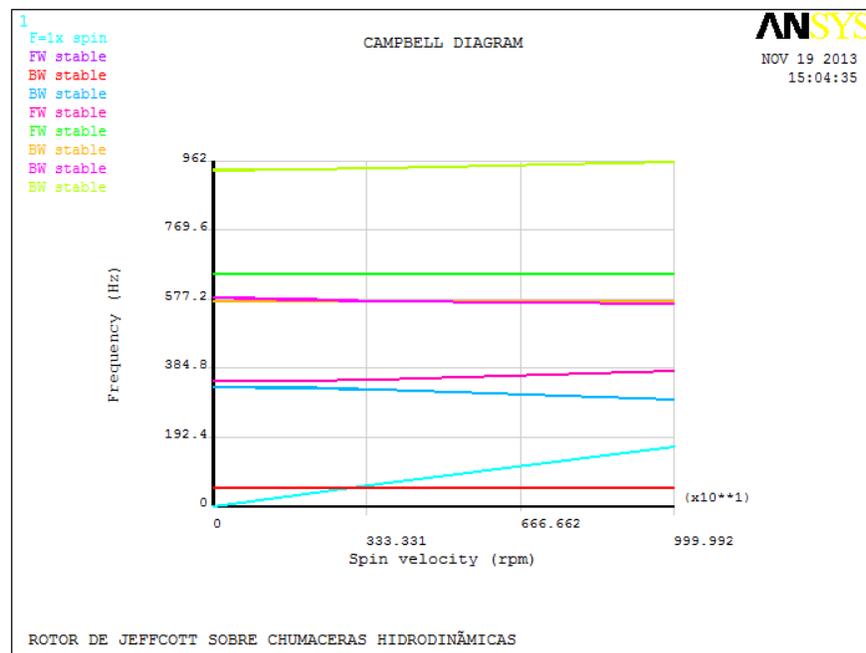


Figura 5.11c Diagrama de Campbell para el rotor propuesto. Caso con puerto de inyección en la parte superior y  $f = 100$ .

Se observa nuevamente que cada una de las líneas horizontales representa un modo de vibración del rotor.

Salvo un modo de vibración de la Figura 5.11b, que se verá más adelante, las otras gráficas muestran resultados semejantes a los ya conocidos. Hay que considerar las variaciones naturales que ocurren en la solución de métodos numéricos.

La interpretación del diagrama indica que la operación normal pasa necesariamente por el primer modo de vibración del rotor. Los valores calculados para cada frecuencia natural se tabulan correspondientemente (Tablas 5.3 a,b,c)

Tabla 5.3a Frecuencias naturales del sistema en relación a la velocidades de prueba estudiadas.

$$f = 20$$

Giro	0 rad/s	188.496 rad/s	376.991 rad/s	1047.190 rad/s
FW	50.427	50.429	50.432	50.440
BW	50.552	50.549	50.547	50.538
BW	345.776	344.402	337.129	304.833
FW	372.202	373.493	381.161	418.560
FW	570.571	570.582	570.593	570.633
	613.621	615.962	618.979	635.193

Tabla 5.3b Frecuencias naturales del sistema en relación a la velocidades de prueba estudiadas.

$$f = 50$$

Giro	0 rad/s	188.496 rad/s	376.991 rad/s	1047.190 rad/s
FW	50.416	50.419	50.422	50.431
BW	50.521	50.518	50.516	50.507
	118.757	81.096	12.586	0.000
BW	337.200	336.541	329.929	299.681
FW	356.687	356.494	362.449	391.579
FW	607.026	607.047	607.069	607.147
FW	790.306	794.350	799.252	823.808

Tabla 5.3a Frecuencias naturales del sistema en relación a la velocidades de prueba estudiadas.

$$f = 100$$

Giro	0 rad/s	188.496 rad/s	376.991 rad/s	1047.190 rad/s
FW	50.426	50.428	50.430	50.438
BW	50.508	50.506	50.504	50.496
BW	330.520	330.063	325.771	297.618
FW	349.176	348.240	351.225	375.657
BW	570.622	570.598	570.575	570.493
BW	580.781	576.268	572.477	565.275
FW	647.335	647.344	647.353	647.386
BW	937.271	939.318	942.370	961.179

Se logra apreciar que la velocidad de operación del rotor influye de forma aún más importante en el valor de la frecuencia natural. En particular, los cambios en la rigidez y amortiguamiento debido a la presurización alteran los modos originales de frecuencia natural ya calculados. Sin embargo, este cambio es mucho menos acusado en el primer modo de vibración, que es el más importante desde un punto de vista técnico.

Se refirió ya que los resultados referentes al caso  $f = 50$  son bastante singulares. Determinarían la existencia de un modo de vibración adicional que cae abruptamente en cuanto a valor de frecuencia natural. Sin embargo, por las características asignadas al rotor es más probable que se trate de un error numérico; lo que es un caso siempre posible.

### 5.2.2 Análisis armónico

Hecho ya el análisis modal para el nuevo caso presurizado, se procede con el análisis armónico.

Se repiten las condiciones establecidas para el mismo en el caso clásico. Se considera una pequeña fuerza con componentes en las direcciones Y,-X de  $10 \times 10^{-5} N$  respectivamente, aplicada sobre el disco. Se genera una excitación del rotor que es síncrona por completo.

La amplitud de la rotación de los nodos correspondientes a las chumaceras y al centro del disco se observan igualmente en la Figuras 5.12a y 5.12b.

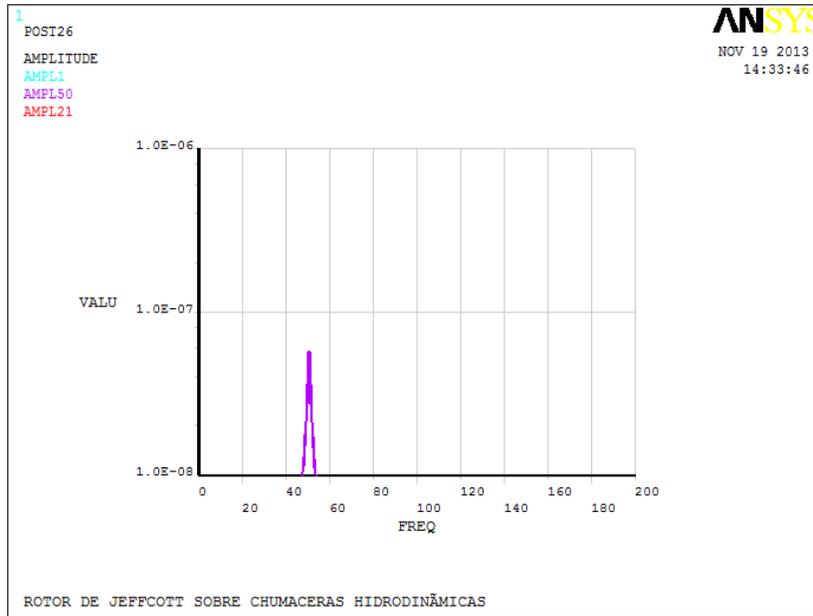


Figura 5.12a. Amplitud de desplazamiento del nodo equivalente al disco en función de la frecuencia de operación para estado estacionario.  $f = 20$

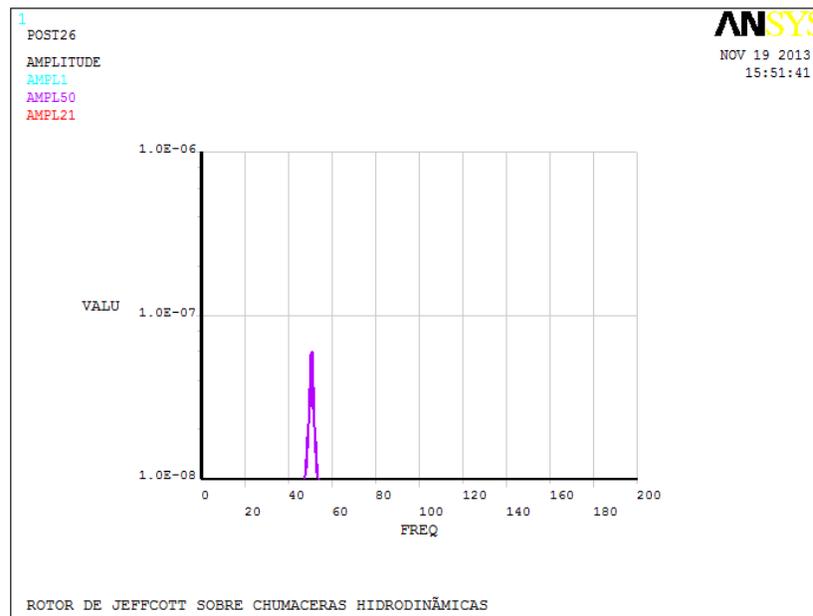


Figura 5.12b. Amplitud de desplazamiento del nodo equivalente al disco en función de la frecuencia de operación para estado estacionario.  $f = 100$

Cabe añadir que en esta y otras gráficas no fue posible obtener las respuestas del caso cuando  $f = 50$ . Este hecho refuerza la conclusión que se generó un error numérico al analizar el mismo caso. Sin embargo, los demás resultados obtenidos son relevantes.

En la gráfica se observa que los muñones del eje, tienen un desplazamiento ínfimo en comparación al disco central, que tiene un aumento súbito de amplitud que corresponde a su paso por la primera frecuencia natural (50.505 Hz). Por otro lado, no parece haber grandes diferencias en la amplitud de desplazamiento del disco respecto a la presurización.

Por su parte, la Figuras 5.13a y 5.13b ilustran la configuración de la geometría de las órbitas en tres dimensiones. Se observa que al ser las chumaceras simétricas, las órbitas de las distintas partes del rotor son circulares.

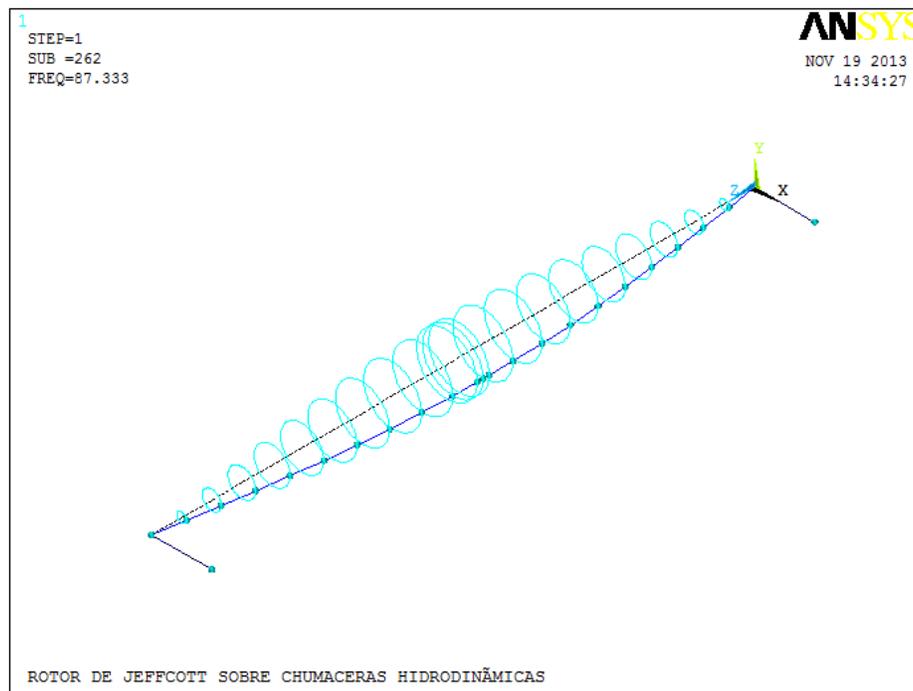


Figura 5.13a. Órbitas tridimensionales del rotor para estado estacionario  $f = 20$

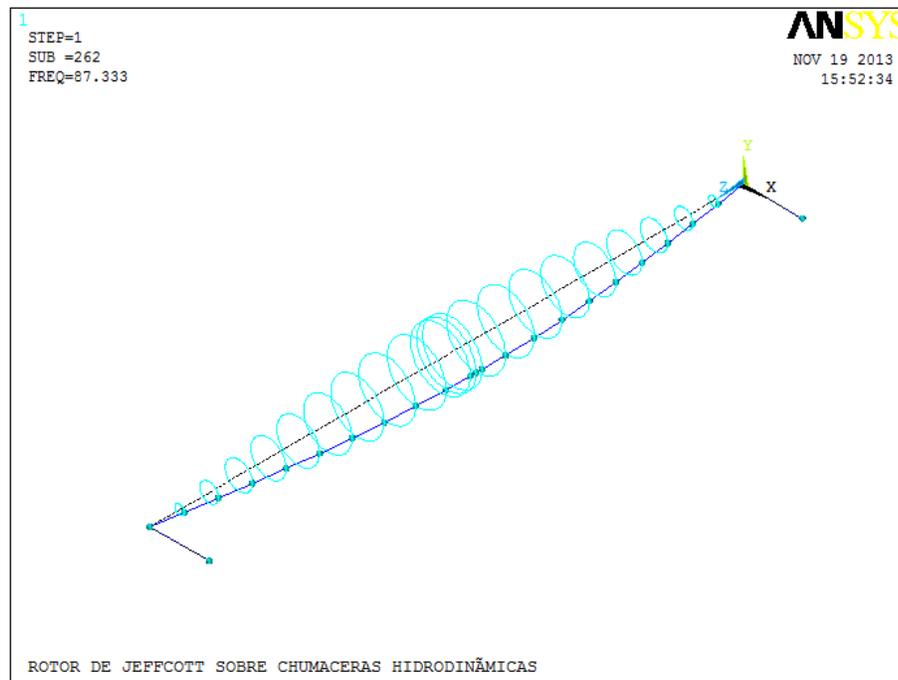


Figura 5.13b. Orbitas tridimensionales del rotor para estado estacionario  $f = 100$

Los resultados por ahora son de difícil interpretación. Por un lado una presurización moderada influye menos en los coeficientes de rigidez y amortiguamiento. Una presurización más importante parece ser inestable. Sin embargo, la máxima presurización se parece cualitativamente más a los primeros resultados. Algunas de estas cuestiones se verán mejor respecto al análisis transitorio de cada uno de los casos.

### 5.2.3 Análisis transitorio

Con auxilio de las ecuaciones obtenidas, se procede al recálculo de los diferentes coeficientes de rigidez y amortiguamiento en función de varias velocidades de operación, entre el arranque y la operación final.

### A) Caso con factor de presurización $f = 20$

En relación al análisis realizado sobre el análisis del caso clásico anterior, se agrega un valor extra, y se cuenta con seis puntos para interpolar el comportamiento de la película de aceite en cada simulación

La siguiente Tabla muestra los cálculos generados para el caso  $f = 20$

Tabla 5.4. Valores de rigidez y amortiguamiento en las chumaceras a distintas velocidades de operación.  $f = 20$

RPM	1	250	500	1000	1800	3600
rad/s	0.10471976	26.1799388	52.3598776	104.719755	188.495559	376.991118
Sommerfeld	0.00220687	0.551167	1.10343539	2.20467	3.97236741	7.94473482
Excentricidad	0.97927747	0.69387587	0.5827839	0.44561	0.319432	0.18801721
KXX	181978	2662340	3671280	5183420	7413520	12784500
KYY	3096	934174	1995610	4293740	8170110	17030100
KXY	222801	4374250	4584130	5650080	1089650	35949900
KYX	46583.5	235516	-781205	-3606610	-10146900	-35805300
CXX	422908	126623	117393	117198	130978	183987
CYY	4538.04	29545.2	41728.9	63178.8	97457.7	180918
CXY	27493.2	35155.4	36705.4	38140.3	38858.9	39054.1
CYX	31215	37774.4	41188	46361.1	51949.7	57656.4

Es de notar que conforme el valor de la excentricidad crece, la contribución adicional de rigidez y amortiguamiento por parte de la presurización es más importante en proporción.

Se muestra en las Figuras 5.14a y 5.14b basadas en los valores tabulados, la comparación del comportamiento entre el valor de la excentricidad (en el eje horizontal) y los coeficientes de rigidez y amortiguamiento].

Las gráficas están respectivamente en  $(N/m)$  para rigidez y  $(Ns/m)$  para amortiguamiento en el eje vertical. La excentricidad del eje horizontal es adimensional.

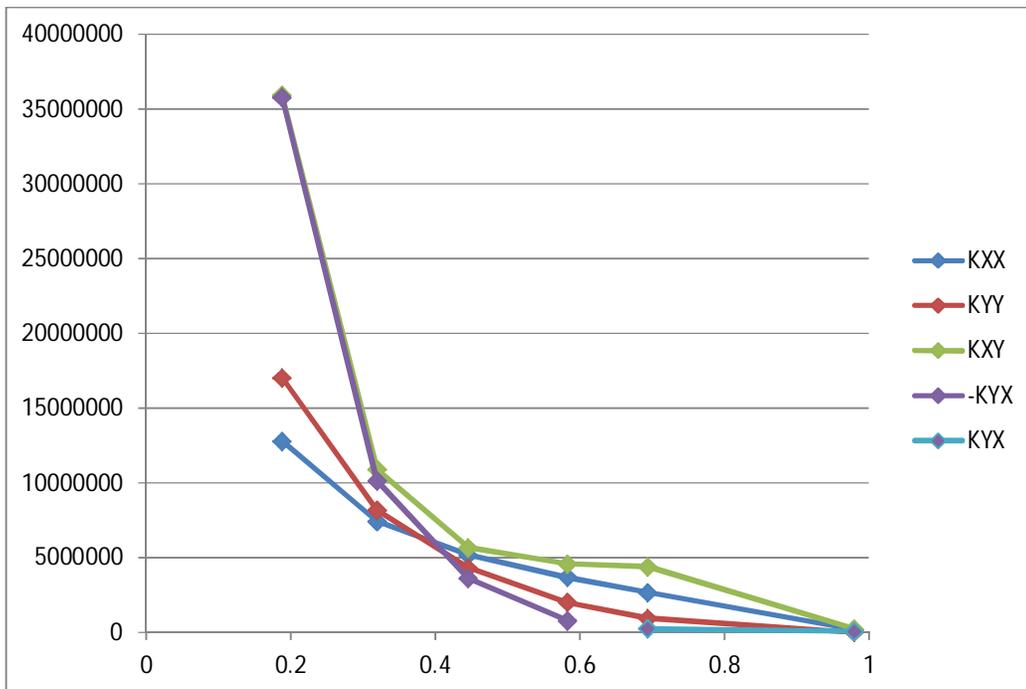


Figura 5.14a Interpolación de los coeficientes de rigidez a partir de los valores de la razón de excentricidad

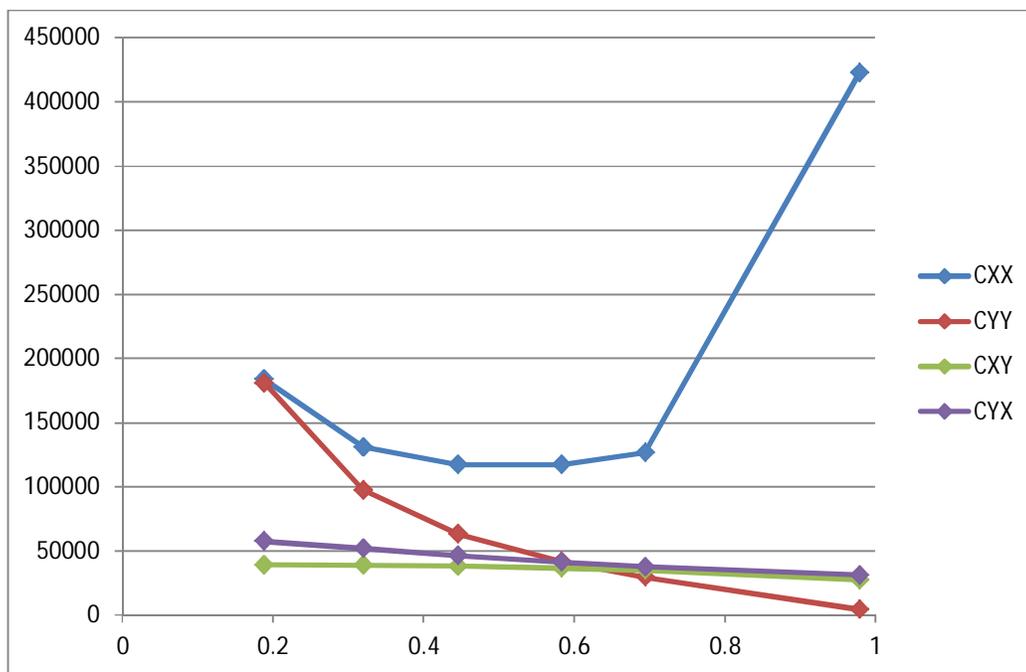


Figura 5.14b Interpolación de los coeficientes de amortiguamiento a partir de los valores de la razón de excentricidad

Nuevamente se toman para comparación gráficas existentes para los coeficientes de rigidez y amortiguamiento para el caso de una chumacera corta. Se indica que las imágenes de referencia con los resultados propios fueron tomadas de *Teoría de chumaceras presurizadas con puertos puntuales. Caso de la chumacera corta* (Ramírez Vargas, 2007) [5.3]

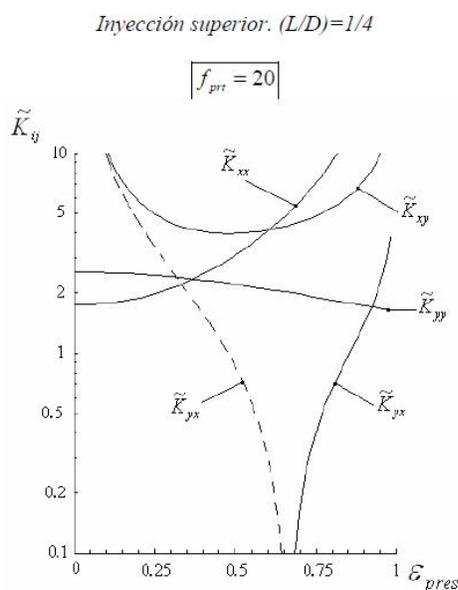


Figura 5.15a Coeficientes de rigidez adimensionalizado para una chumacera corta en función de la razón de excentricidad. Caso presurizado con  $f = 20$

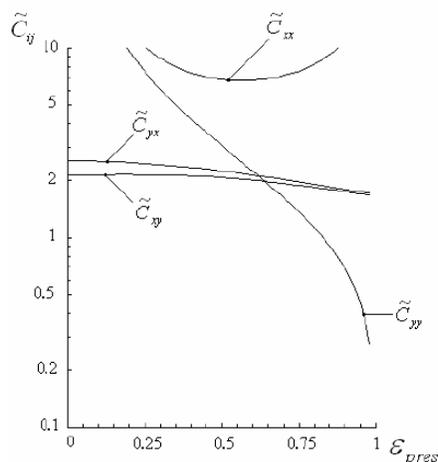


Figura 5.15b Coeficientes de amortiguamiento adimensionalizado para una chumacera corta en función de la razón de excentricidad. Caso presurizado con  $f = 20$

Hay que tomar en cuenta las diferencias en la escala para la comparación ya que las Figuras siguientes muestran valores adimensionalizados.

Se observa una semejanza mejor entre las gráficas disponibles y las generadas, salvando efectos de la escala para la rigidez. Teóricamente debe mejorarse la calidad de los resultados.

Otra diferencia con respecto al análisis anterior fue que se estudió el estado transitorio directamente para un periodo de aceleración a 8 segundos.

Con esto en consideración, se realiza la solución numérica del sistema sobre el código ajustado a estas necesidades.

En cuanto a los resultados del primer análisis transitorio para el caso presurizado, se monitoreó la amplitud total en el disco, la máxima en todo el rotor, durante diversos intervalos de tiempo. La magnitud del desplazamiento del mismo se observa en la Figura 5.16

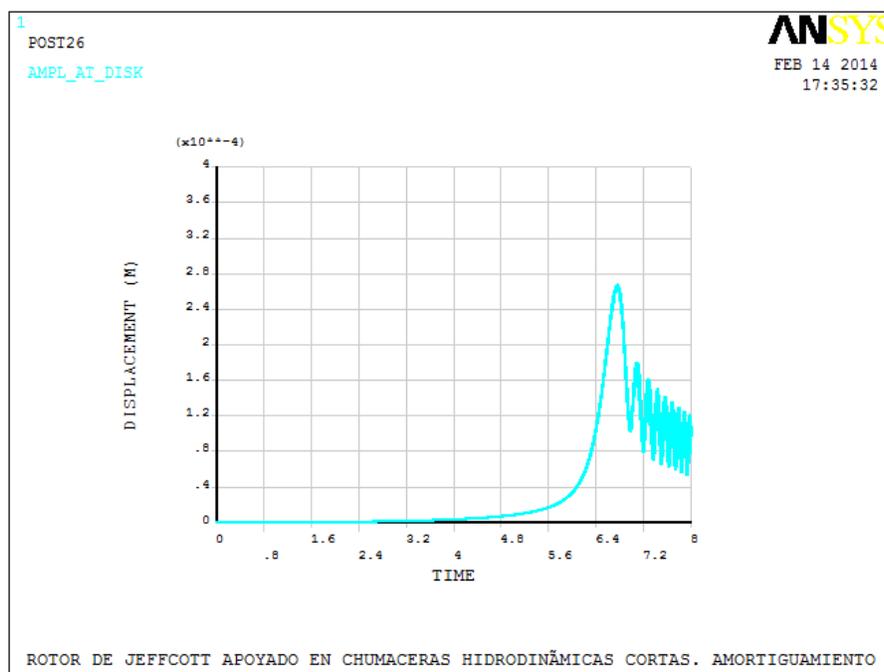


Figura 5.16. Amplitud vibracional absoluta en el disco del disco para estado transitorio de 0 a 8 s.

$$f = 20$$

Las Figuras anteriores muestran la evolución de la firma vibratoria en la dirección Y. La amplitud máxima alcanzada por el disco en el proceso de aceleración es de  $2.6 \times 10^{-4}$ , ligeramente superior a la obtenida en el caso sin presurizar

La trayectoria correspondiente a una de las chumaceras se encuentra en las Figura 5.16. Deberían observarse diferencias al ser el punto directamente afectado por la presión extra.

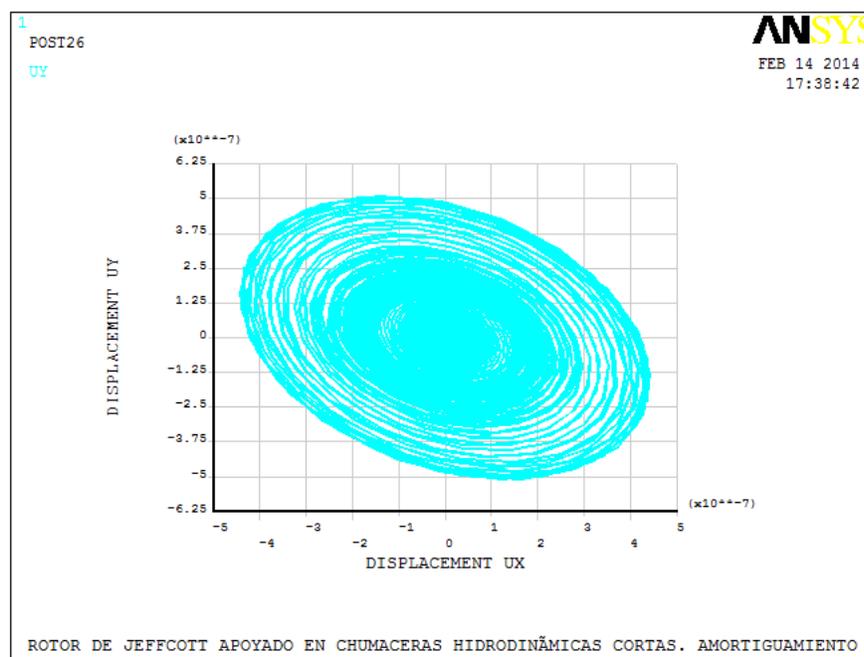


Figura 5.17 Órbita del nodo equivalente a la chumacera durante el estado transitorio de 0 a 8 s.  $f = 20$

El análisis de la Figura y su escala determina que ahora el nodo correspondiente al muñón sufre un mayor desplazamiento tanto en la dirección horizontal como vertical en su punto álgido, alcanzando valores de  $\pm 5 \times 10^{-7}$  y  $\pm 4 \times 10^{-7}$  m respectivamente, lo que representa un aumento de hasta 25% en comparación con el caso no presurizado. Sin embargo, siguen siendo equivalentes a la mitad de la distancia del claro radial.

Sin embargo, de la evolución de las Figuras 5.18 a,b,c, el muñón termina con una órbita final más pequeña y menos excéntrica en comparación.

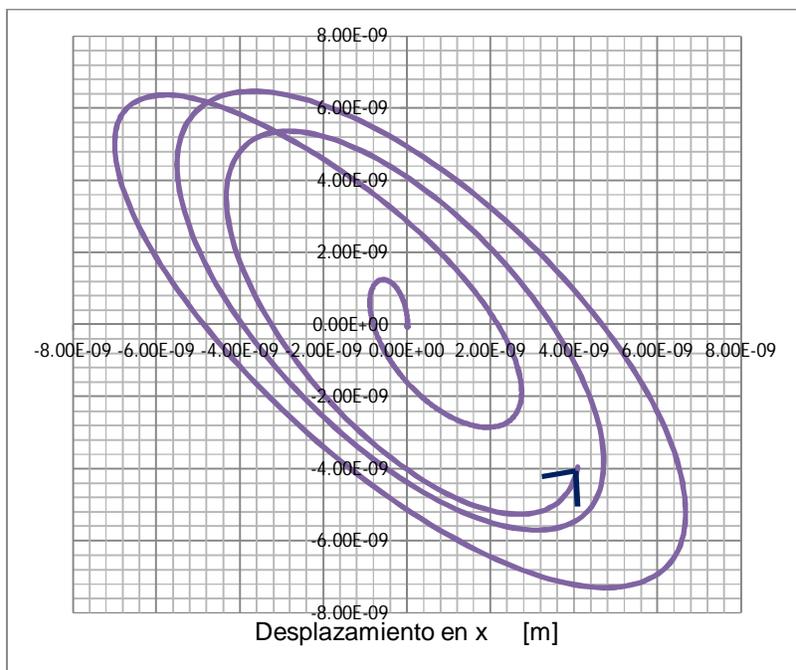


Figura 5.18a. Órbita del nodo equivalente a la chumacera durante el estado transitorio de 0 a 1 s.  $f = 20$

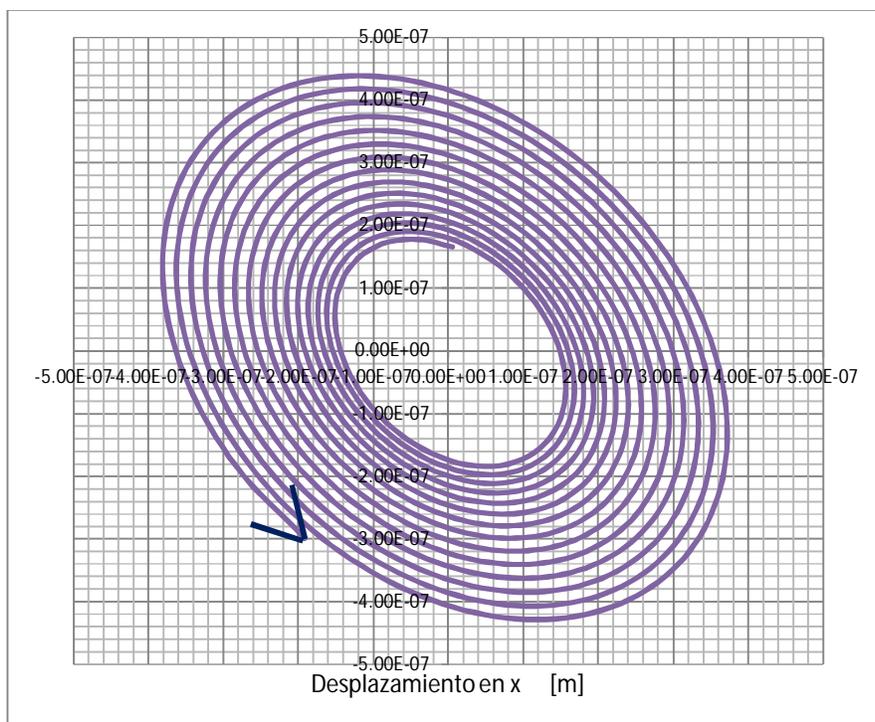


Figura 5.18b. Órbita del nodo equivalente a la chumacera durante el estado transitorio de 6.35 a 6.55 s.  $f = 20$

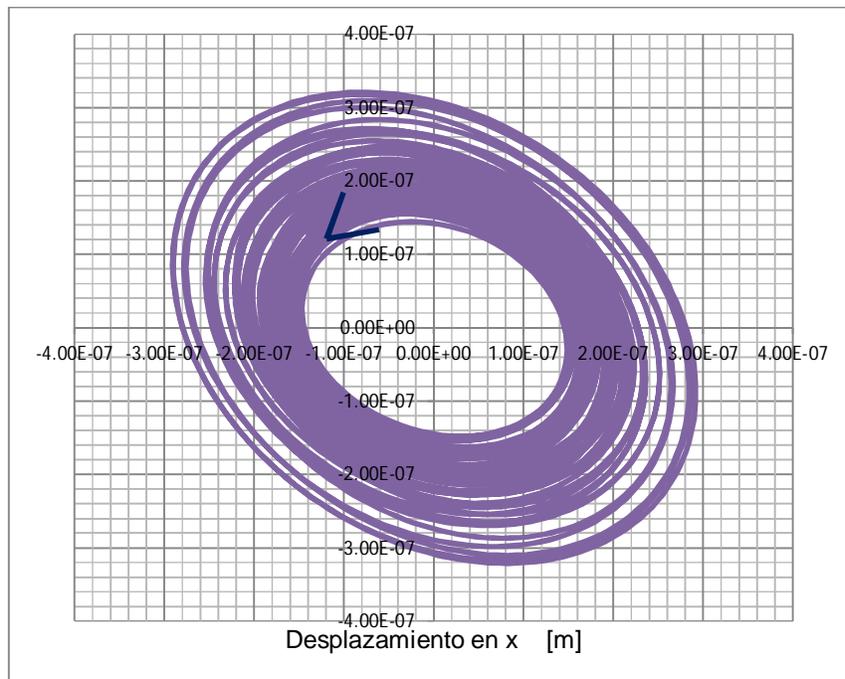


Figura 5.18c. Órbita del nodo equivalente a la chumacera durante el estado transitorio de 7.8 a 8 s.  $f = 20$

En cuanto al propio disco (Figura 5.19) su órbita es prácticamente la misma a la del caso clásico.

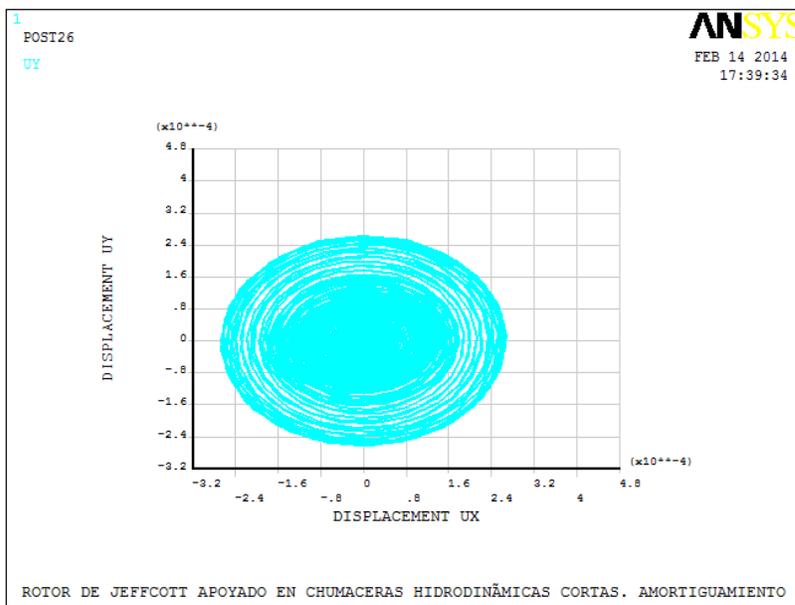


Figura 5.19. Órbita del nodo equivalente al disco durante el estado transitorio de 0 a 8 s.  $f = 20$

Ahora bien, el comportamiento del disco durante ese tránsito (Figuras 5.20 a,b,c) es mucho menos regular durante las primeras fases.

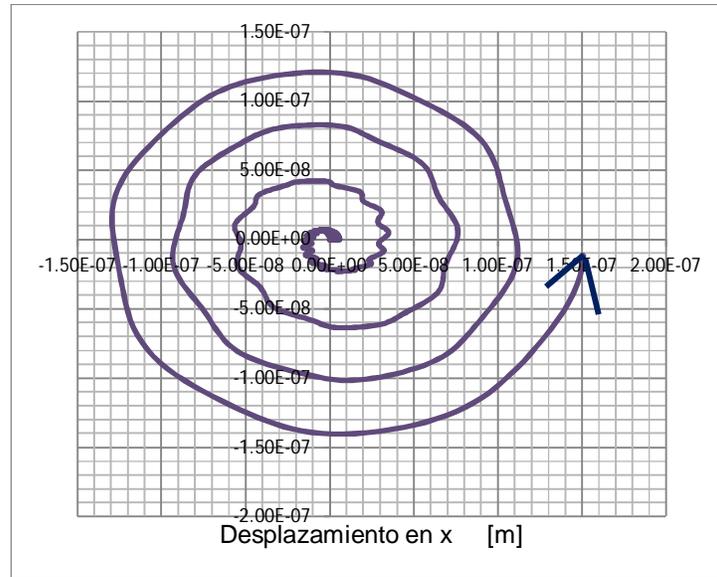


Figura 5.20a. Órbita del nodo equivalente al disco durante el estado transitorio de 0 a 1 s.  $f = 20$

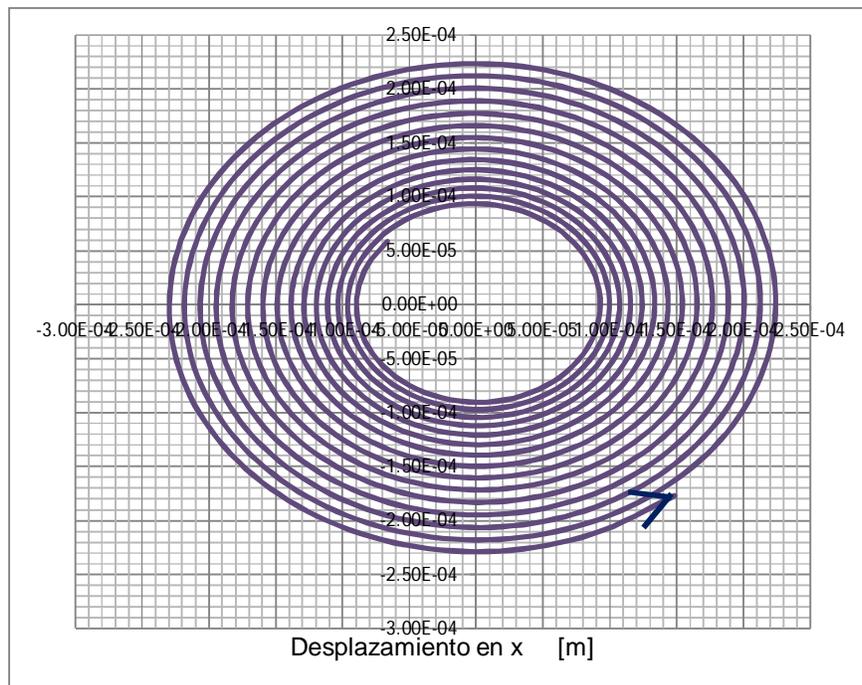


Figura 5.20b. Órbita del nodo equivalente al disco durante el estado transitorio de 6.35 a 6.55 s.

$$f = 20$$

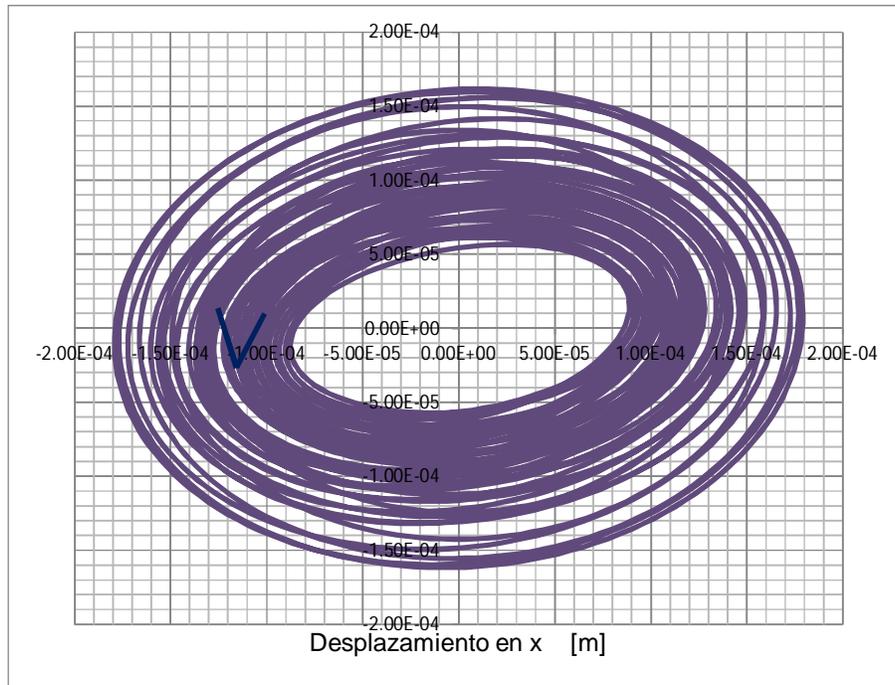


Figura 5.20c. Órbita del nodo equivalente al disco durante el estado transitorio de 7.8a 8 s.  $f = 20$

La excentricidad general de la órbita disminuye, aunque mantiene las mismas dimensiones generales. Entonces se afirmaría de esta simulación que si bien la presurización aumenta el desplazamiento de los muñones, el desplazamiento del propio rotor se haría menos excéntrico. Ahora bien, el desplazamiento extra del centro geométrico de la chumacera aún está en un valor inferior al claro radial, y la operación es segura.

### B) Caso con factor de presurización $f = 50$

Esta vez se modifican los valores de la presurización, aumentando la importancia del parámetro  $f = 50$ , que fue uno de los casos descritos [5.3].

Al realizar el análisis modal y armónico del mismo, se encontraron algunas inconsistencias atribuibles a una inestabilidad, pero no se descarta algún error de programación. Por lo pronto, se obtuvieron los coeficientes de rigidez y amortiguamiento vinculados con esta nueva condición y se realizó el análisis transitorio. Los valores utilizados se muestran en la Tabla siguiente.

Tabla 5.5. Valores de rigidez y amortiguamiento en las chumaceras a distintas velocidades de operación.  $f = 50$

RPM	1	250	500	1000	1800	3600
rad/s	0.10471976	26.1799388	52.3598776	104.719755	188.495559	376.991118
Sommerfeld	0.00220687	0.551167	1.10343539	2.20467	3.97236741	7.94473482
Excentricidad	0.97927747	0.69387587	0.5827839	0.44561	0.319432	0.18801721
KXX	181858	2720530	3850230	5765750	8943210	16867100
KYY	3105.65	926785	1978720	4262810	8134650	17008200
KXY	222791	4381630	4601020	5681010	10932000	35971800
KYX	46612.4	233994	-779668	-3592010	-10113200	-35763000
CXX	423214	124494	113406	108712	113840	145423
CYY	4806.96	28752.3	40038.1	59191.8	90698.4	173386
CXY	29371.7	32543.1	33064.7	32762.7	31503.1	29654.5
CYX	31232.6	39090.6	44271.1	53314.7	64230.1	76160.4

Del mismo modo, se estimó el comportamiento de los coeficientes en función de la excentricidad de la chumacera. (Figuras 5.21a,5.21b).

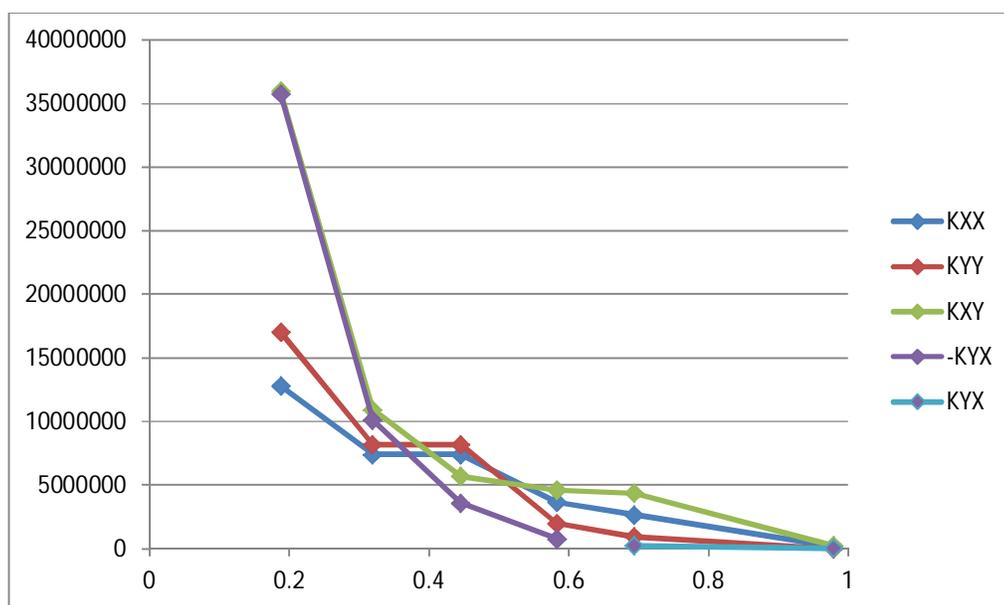


Figura 5.21a Interpolación de los coeficientes de rigidez a partir de los valores de la razón de excentricidad  $f = 50$

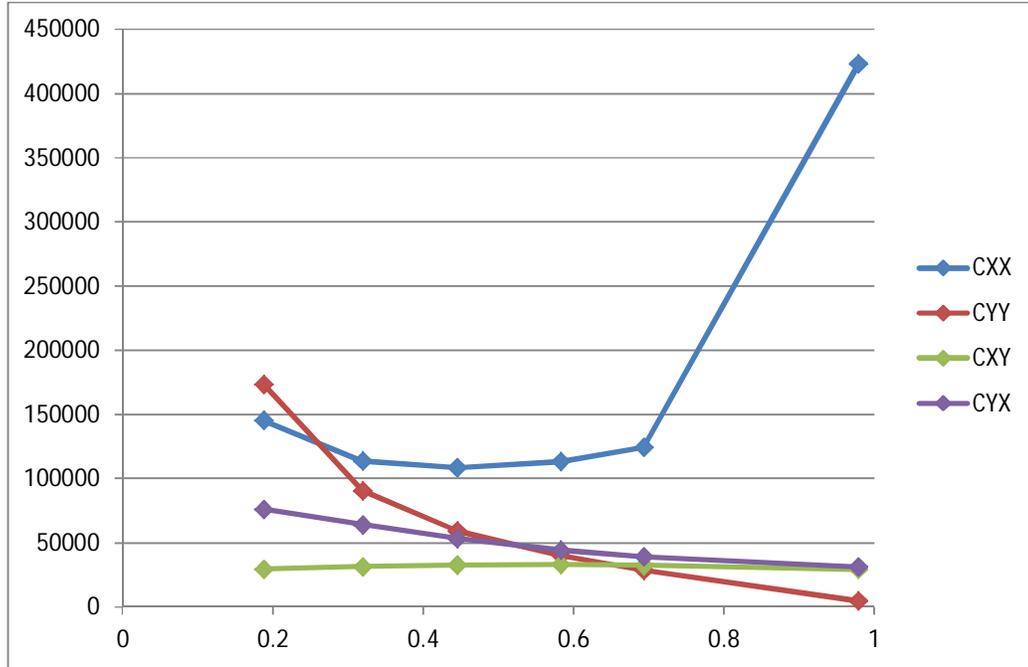


Figura 5.21b Interpolación de los coeficientes de amortiguamiento a partir de los valores de la razón de excentricidad  $f = 50$

Las gráficas preexistentes [5.3] para el caso se muestran a continuación.

*Inyección superior: (L/D)=1/4*

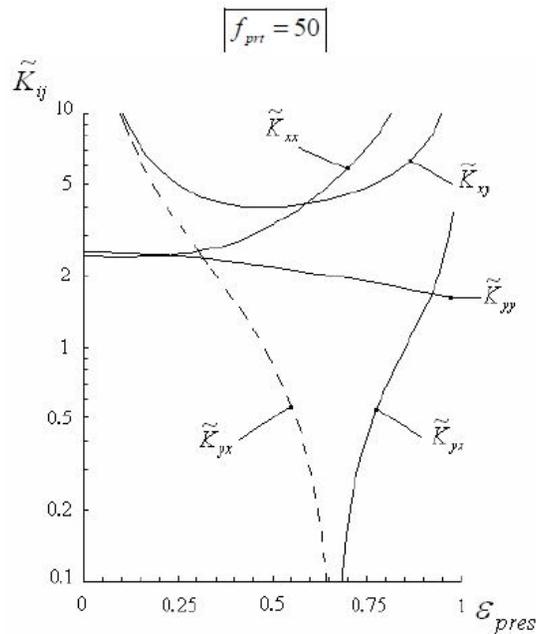


Figura 5.22a Coeficientes de rigidez adimensionalizado para una chumacera corta en función de la razón de excentricidad. Caso presurizado con  $f = 50$

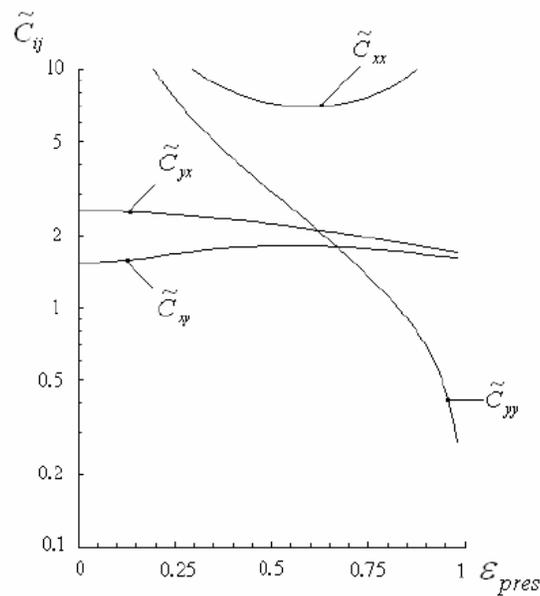


Figura 5.22a Coeficientes de amortiguamiento adimensionalizado para una chumacera corta en función de la razón de excentricidad. Caso presurizado con  $f = 50$

Hay que recordar que la excentricidad en este análisis es fundamentalmente una función de la velocidad de rotación. Las gráficas muestran tendencias semejantes a las mostradas en el primer caso presurizado. La mayor diferencia se encuentra en los coeficientes de amortiguamiento cruzados, iguales para el caso clásico y divergen conforme aumenta la presurización.

Como en los otros análisis, se estudia la respuesta vibratoria en un periodo de ocho segundos. Durante el análisis numérico, se observa una dificultad en la solución a partir del punto  $t = 5.94$  s, que en los resultados previos, estaba vinculado con el paso de la primera frecuencia natural.

Las mismas gráficas obtenidas en los casos anteriores se estudian ahora para esta condición particular. Se inicia con la amplitud vibracional total del disco como función del tiempo (Figura 5.23)

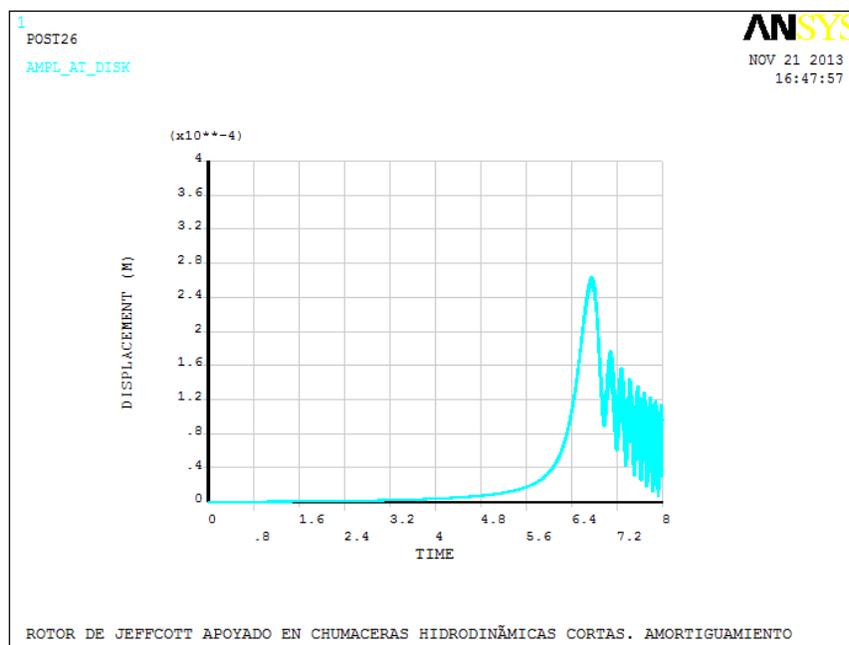


Figura 5.23. Amplitud vibracional absoluta en el disco del disco para estado transitorio de 0 a 8 s.  
 $f = 50$

La amplitud máxima alcanzada por el disco en el proceso de aceleración es de  $2.6 \times 10^{-4}$ , semejante al valor obtenido en el caso presurizado anterior.

Sin embargo, es también notorio el aumento del desplazamiento después del pico de la gráfica, aunque la tendencia sea finalmente estable.

De experimentación [5.3] se sabe que una presurización excesiva tendría un efecto contrario al buscado; es decir, causa problemas de estabilidad. Incluso si no fuera el caso, la amplitud de vibración también se vería aumentada, lo que para un rotor concreto implicaría cierta problemática.

En cuanto a la trayectoria correspondiente a una de las chumaceras, se encuentra en la Figura 5.24. En esta se aprecia la posición del muñón desde el arranque hasta llegar a la velocidad designada.

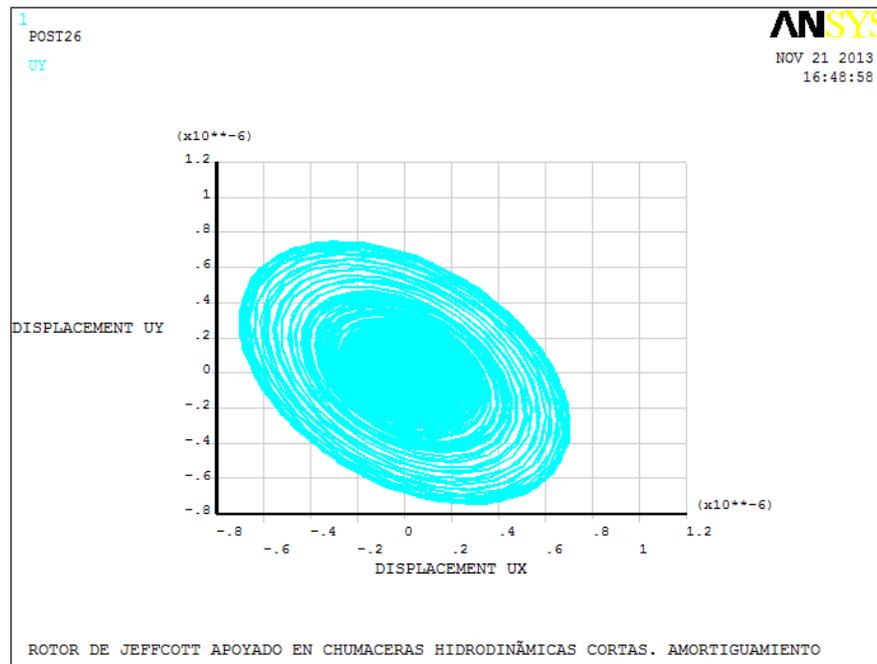


Figura 5.24 Órbita del nodo equivalente a la chumacera durante el estado transitorio de 0 a 8 s.

$$f = 50$$

La trayectoria del muñón es más claramente elíptica. El desplazamiento más importante en la dirección  $x$  es ahora  $\pm 6 \times 10^{-7}$ ; para la dirección  $y$   $\pm 7 \times 10^{-7}$ .

Es una reducción importante del desplazamiento en comparación del caso sin presurizar y el que considera una  $f = 20$ . Se debe recordar que el objetivo principal de la presurización de la chumacera es el de hacer que el centro del muñón se acerque lo más posible al centro de la chumacera.

En cuanto a la validez de estos resultados en comparación con lo obtenido en el análisis modal y armónico para el caso  $f = 50$ , cabe recordar que hubo un cambio de código que sin duda evitó el error numérico mencionado.

La información más pertinente se obtiene del desglose ya mostrado del comportamiento de la órbita (Figuras 5.25a, 5.25b y 5.25c)

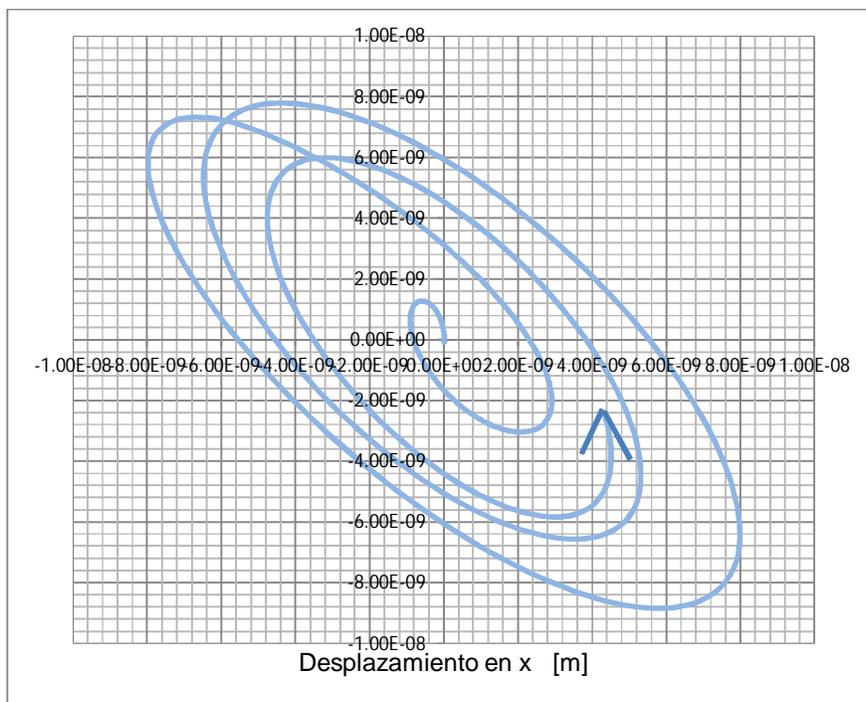


Figura 5.25a. Órbita del nodo equivalente a la chumacera durante el estado transitorio de 0 a 1 s.

$$f = 50$$

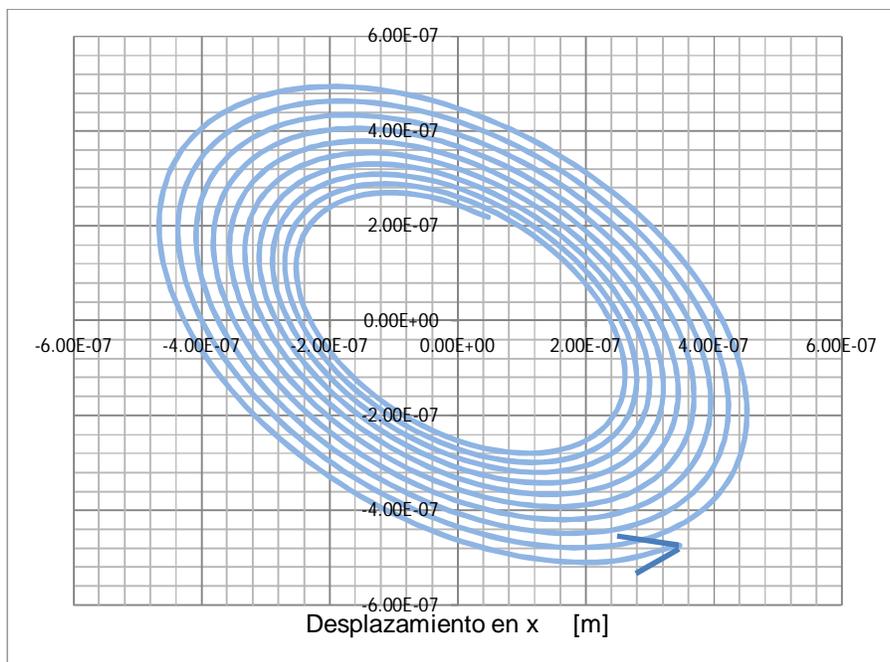


Figura 5.25b Órbita del nodo equivalente a la chumacera durante el estado transitorio de 6.35 a

$$6.55 \text{ s. } f = 50$$

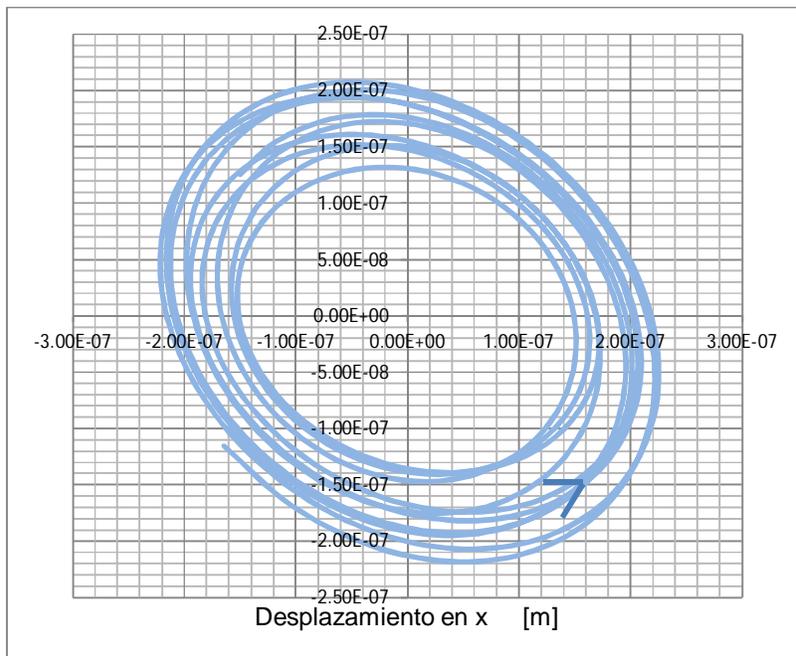


Figura 5.25c. Órbita del nodo equivalente a la chumacera durante el estado transitorio de 7.8 a 8 s.  
 $f = 50$

En cuanto al propio disco (Figura 5.26) su órbita es prácticamente la misma a la del caso clásico.

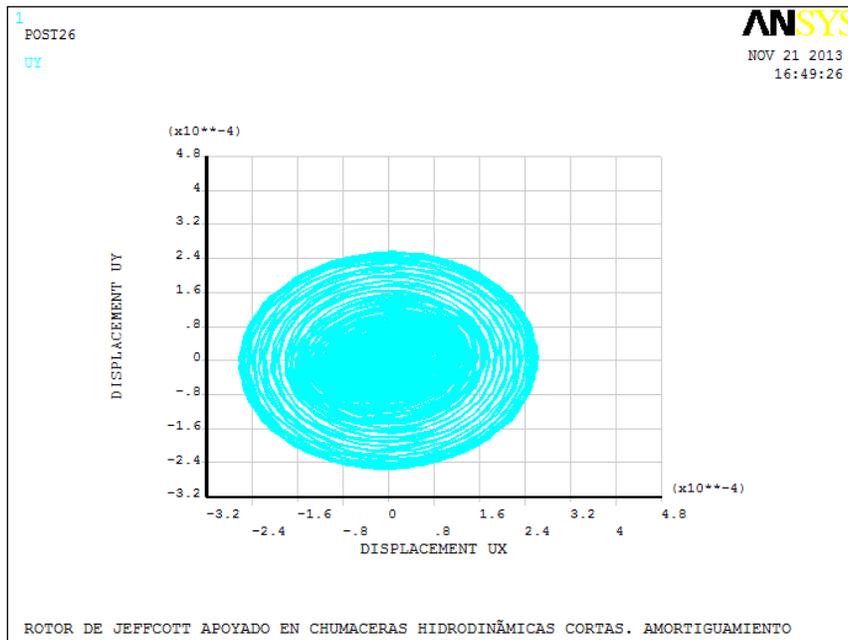


Figura 5.26. Órbita del nodo equivalente al disco durante el estado transitorio de 0 a 8 s.  $f = 50$

Es notable la observación respecto a que el comportamiento del disco presenta una mayor uniformidad con respecto a las condiciones de presurización que las propias chumaceras.

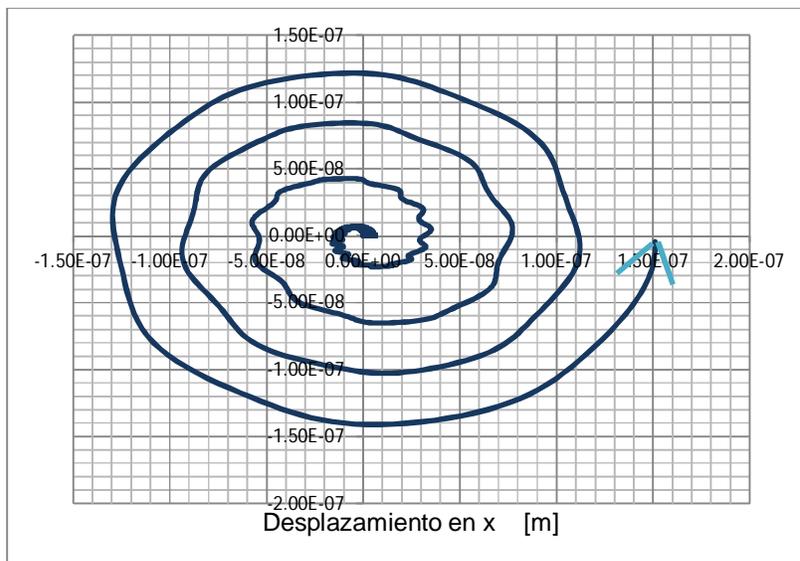


Figura 5.27a. Órbita del nodo equivalente al disco durante el estado transitorio de 0 a 1 s.  $f = 50$

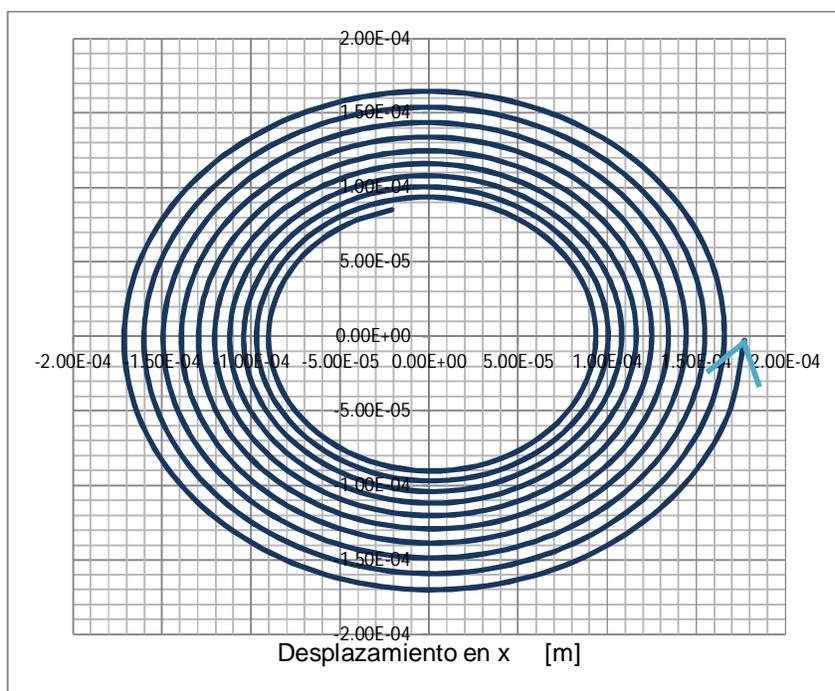


Figura 5.27b. Órbita del nodo equivalente al disco durante el estado transitorio de 6.35 a 16.55s.  
 $f = 50$

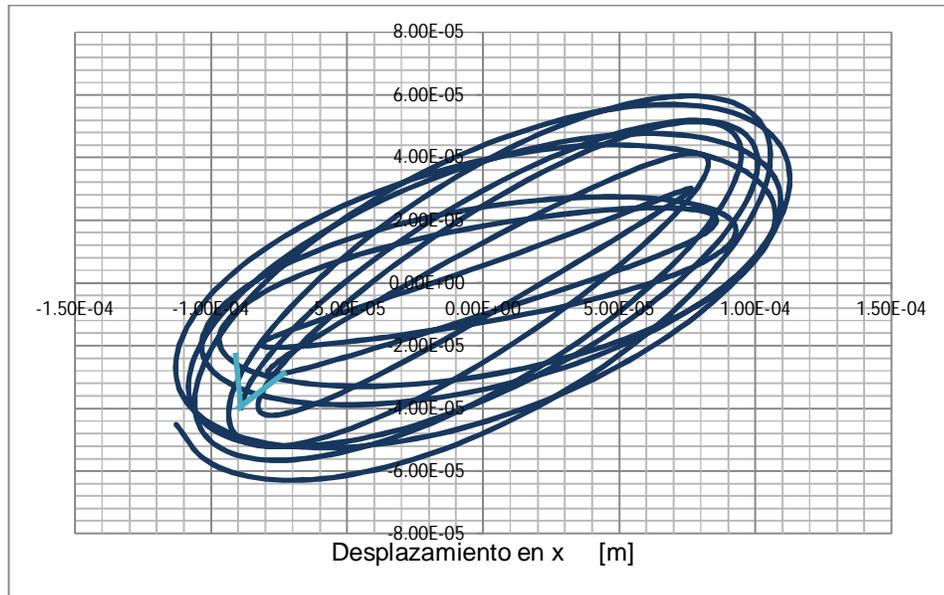


Figura 5.27c. Órbita del nodo equivalente al disco durante el estado transitorio de 7.8 a 8 s.  $f = 50$

De estas últimas Figuras, la 5.27c es de interés ya que muestra que las órbitas si bien conservan una estructura general, parecen ser afectadas por la presurización más hacia la inestabilidad. Además de que la amplitud de las órbitas no disminuye tanto como en los casos anteriores.

De forma comprobada por la experimentación, se espera que una presurización excesiva tenga efectos nocivos sobre la estabilidad. Los resultados obtenidos hasta ahora concuerdan con dicha idea. Falta corroborar con el tercer caso.

### C) Caso con factor de presurización $f = 100$

De igual modo se genera la simulación para el análisis transitorio del último caso descrito con  $f = 100$ . De esta manera se espera tener una comprobación numérica equivalente, más que ser reflejo de una aplicación práctica. Los valores obtenidos para la simulación se muestran en la Tabla y las Figuras subsiguientes.

Tabla 5.6. Valores de rigidez y amortiguamiento en las chumaceras a distintas velocidades de operación.  $f = 100$

RPM	1	250	500	1000	1800	3600
rad/s	0.10471976	26.1799388	52.3598776	104.719755	188.495559	376.991118
Excentricidad	0.97927747	0.69387587	0.5827839	0.44561	0.319432	0.18801721
KXX	181978	2817520	4148490	6736310	11492700	23671500
KYY	3096	914471	1950570	4211260	8075540	16971600
KXY	222801	4393950	4629170	5732570	10991100	36008400
KYX	46583.5	231459	-777106	-3567680	-10057000	-35692500
CXX	422908	120945	106760	94570.6	85275.2	81149.7
CYY	4538.04	27430.9	37220.1	52546.9	79432.9	160833
CXY	27493.2	28189.3	26996.9	23800	19243.3	13988.7
CYX	31215	41284.2	49409.7	64904	84697.4	107000

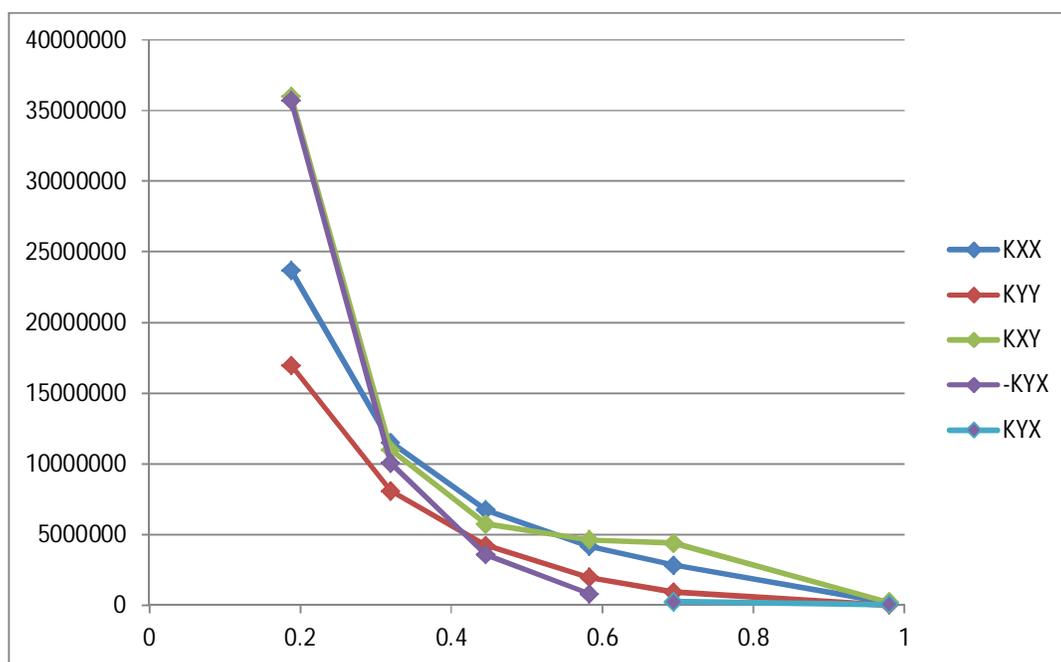


Figura 5.28a. Interpolación de los coeficientes de rigidez a partir de los valores de la razón de excentricidad.  $f = 100$

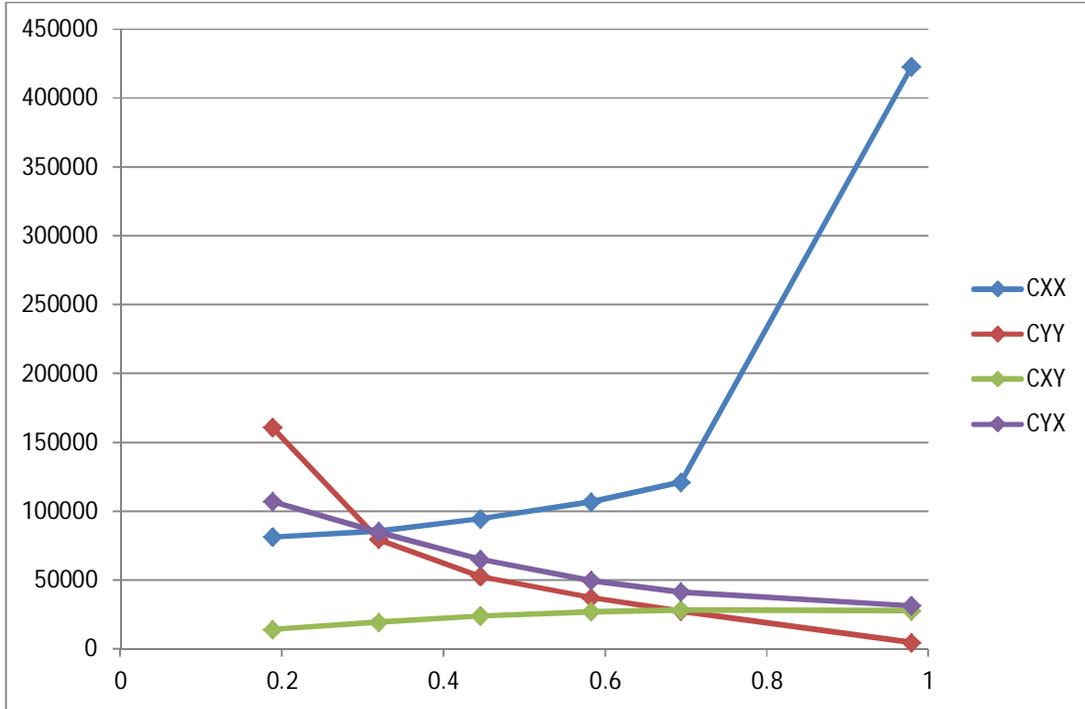


Figura 5.28b. Interpolación de los coeficientes de amortiguamiento a partir de los valores de la razón de excentricidad.  $f = 100$

*Inyección superior. (L/D)=1/4*

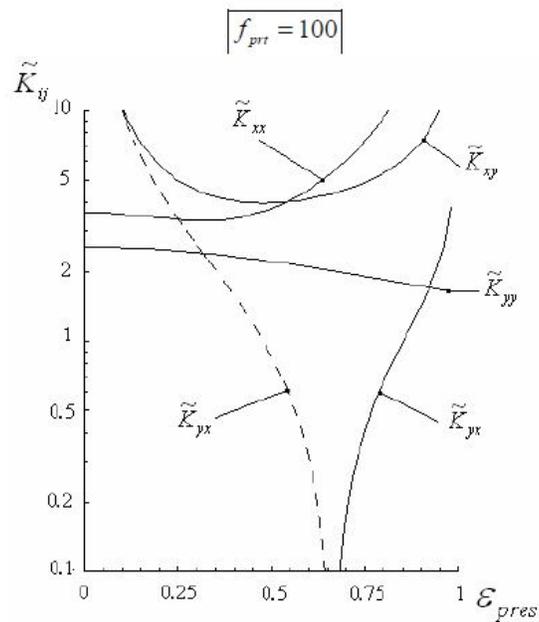


Figura 5.29a Coeficientes de rigidez adimensionalizado para una chumacera corta en función de la razón de excentricidad. Caso presurizado con  $f = 100$

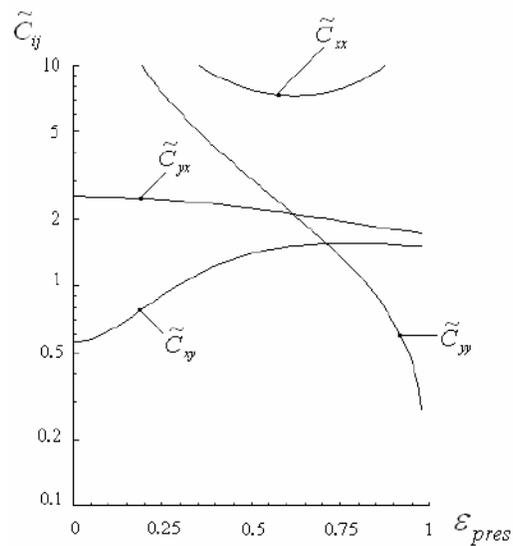


Figura 5.28b Coeficientes de amortiguamiento adimensionalizado para una chumacera corta en función de la razón de excentricidad. Caso presurizado con  $f = 100$

Del mismo modo, se estimó el comportamiento de los coeficientes en función de la excentricidad de la chumacera, mediante interpolación lineal.

Las tendencias observadas por efecto de la presurización se acentúan. La mayor diferencia se encuentra en los coeficientes de amortiguamiento cruzados nuevamente con la preponderancia del coeficiente  $c_{yx}$  sobre  $c_{xy}$ . Las gráficas consideradas [5.3] llevan una tendencia similar.

Como en los otros análisis, se estudia la respuesta vibratoria en un periodo de ocho segundos. Las mismas gráficas obtenidas en los casos anteriores se estudian ahora para esta condición particular. Se inicia con la amplitud vibracional total del disco como función del tiempo (Figura 5.30).

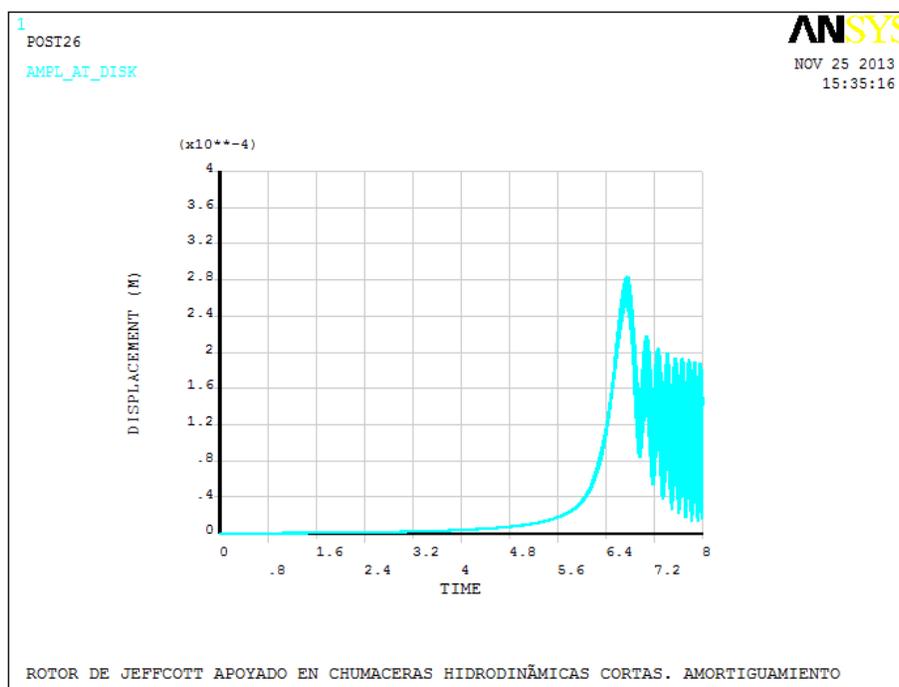


Figura 5.30 Amplitud vibracional absoluta en el disco del disco para estado transitorio de 0 a 8 s.

$$f = 100$$

La amplitud máxima alcanzada por el disco en el proceso de aceleración es de  $2.6 \times 10^{-4} m$ , semejante a valores anteriores

Por otra parte, se verifica la tendencia vista en las corridas anteriores al ver que el disco se sigue desplazando con una amplitud de al menos  $2.0 \times 10^{-4} m$  y no parece disminuir. En suma, las órbitas del rotor son mayores y esto debe atribuirse al cambio de la presión en las características de los apoyos.

La trayectoria correspondiente durante todo el intervalo de una de las chumaceras se encuentra en la Figura 5.30, generada directamente por el código programado

Hay que considerar los posibles cambios en el aspecto aparente, sin embargo, la lectura de la escala evitará interpretaciones erróneas.

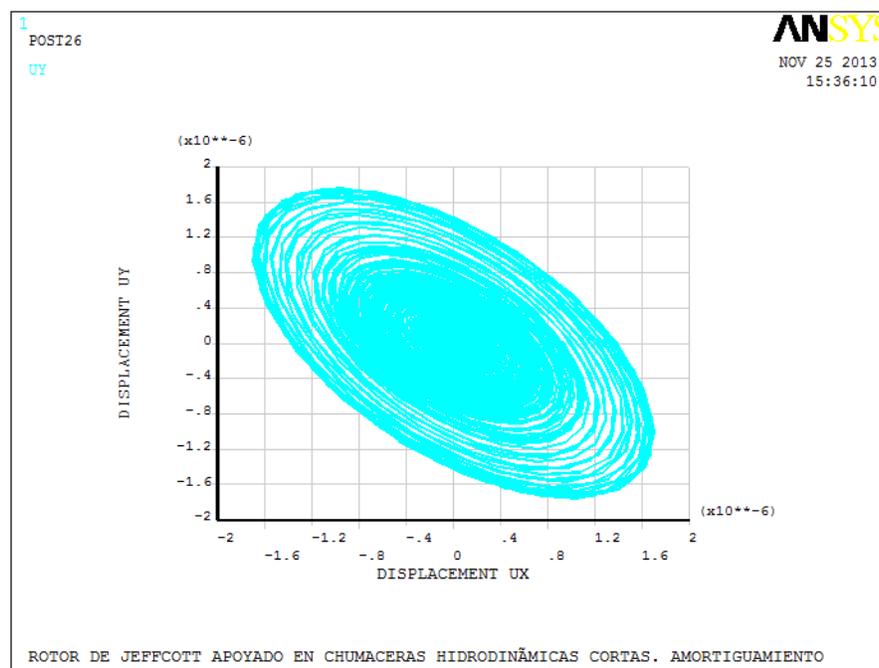


Figura 5.31. Órbita del nodo equivalente a la chumacera durante el estado transitorio de 0 a 8 s.

$$f = 100$$

La trayectoria del muñón tiene una excentricidad más marcada. El desplazamiento en la dirección  $x$  es ahora  $\pm 2 \times 10^{-6} m$ ; para la dirección  $y$   $\pm 1.8 \times 10^{-6} m$ . Es importante recordar que la convención establece que la dirección  $x$  hace referencia a la vertical y la la dirección  $y$  a la horizontal.

Nuevamente la imagen anterior se desglosa para intervalos de tiempo más específicos en las Figuras siguientes (5.32 a, b c). Por obvio fin de comparación, los intervalos son los mismos que para las órbitas parciales anteriores.

Se reitera que el cambio de colores en las Figuras de las órbitas parciales no tienen significado, sino para diferenciar los casos fácilmente.

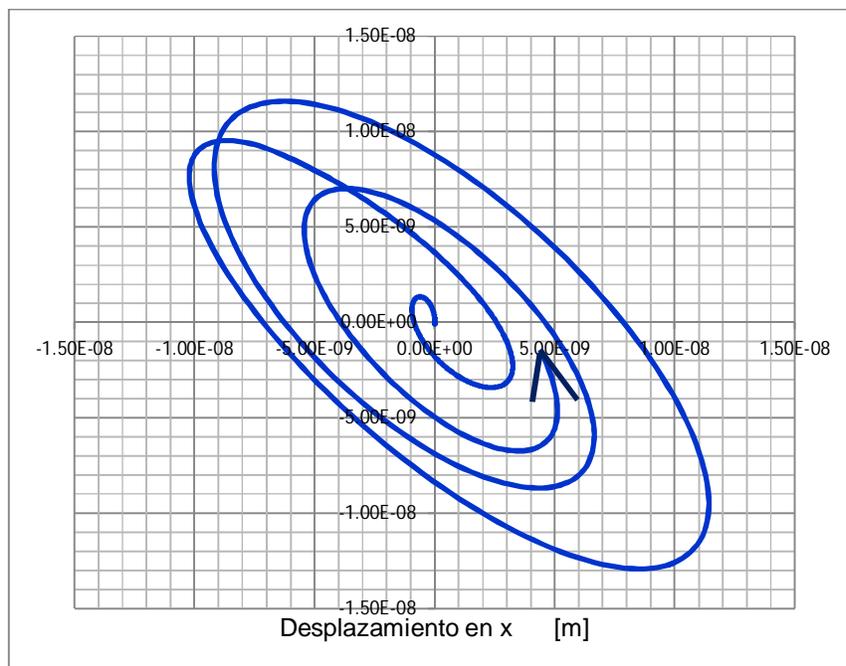


Figura 5.32a. Órbita del nodo equivalente a la chumacera durante el estado transitorio de 0 a 1 s.  
 $f = 100$

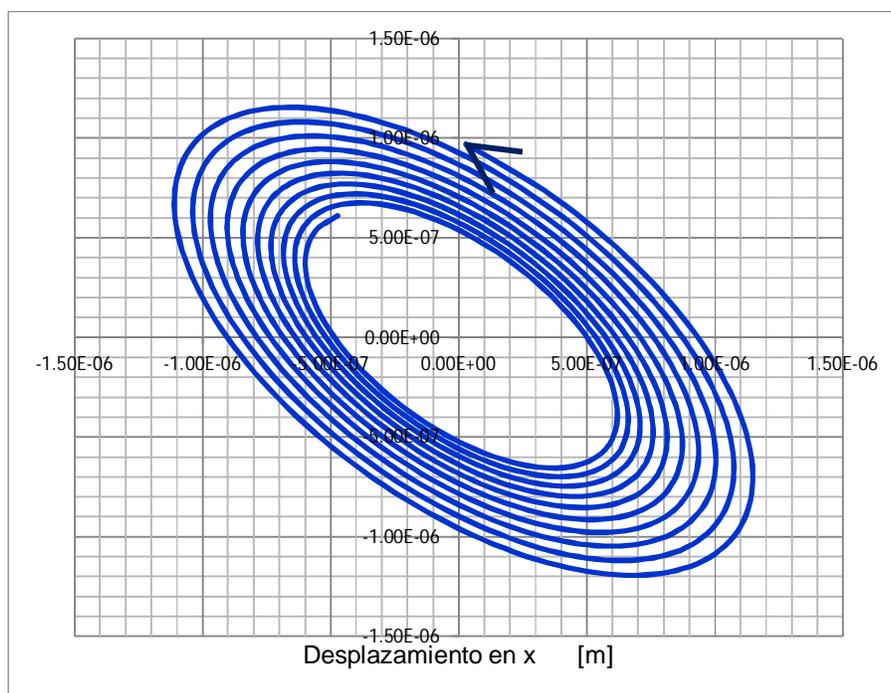


Figura 5.32b. Órbita del nodo equivalente a la chumacera durante el estado transitorio de 6.35 a 6.55 s.  $f = 100$

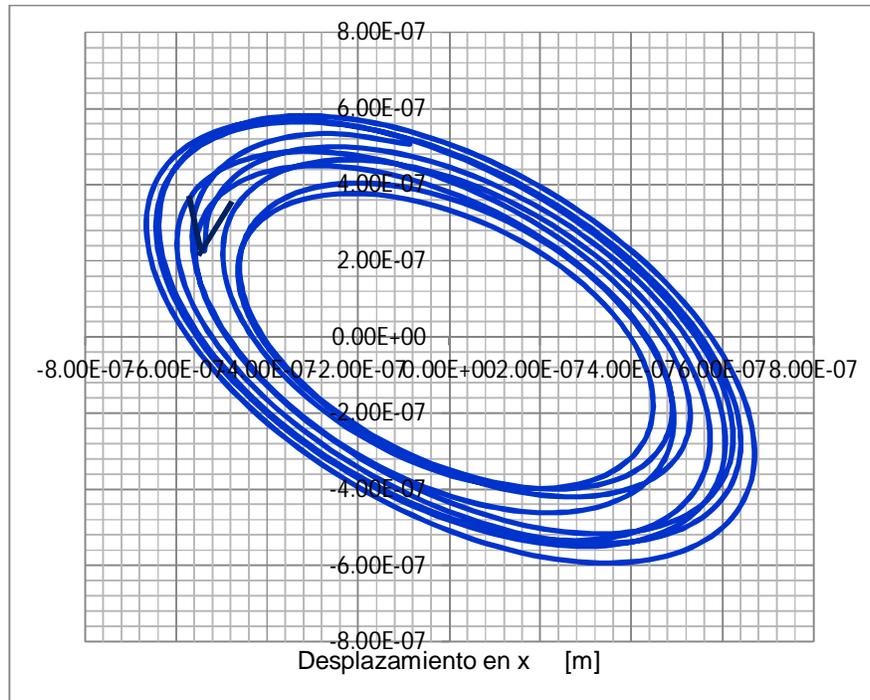


Figura 5.32c. Órbita del nodo equivalente a la chumacera durante el estado transitorio de 7.8 a 8 s.

$$f = 100$$

Al contrario que en otros casos presurizados, la desviación con respecto al punto de equilibrio es numéricamente más importante.

Estos valores de amplitud se acercan mucho al claro radial típico; implicando un choque entre muñón y chumacera, con consecuencias negativas para la operación del rotor. Aunque en este caso no se presente tal eventualidad al ser un rotor experimental, sin duda esta conclusión es importante para demostrar la utilidad del código.

Para el disco (Figuras 5.32) su órbita perdió la forma prácticamente circular de los casos anteriores, con una agitación más importante en la dirección y en los tramos finales de la órbita. (Figuras 5.33a, 5.33b y 5.33c)

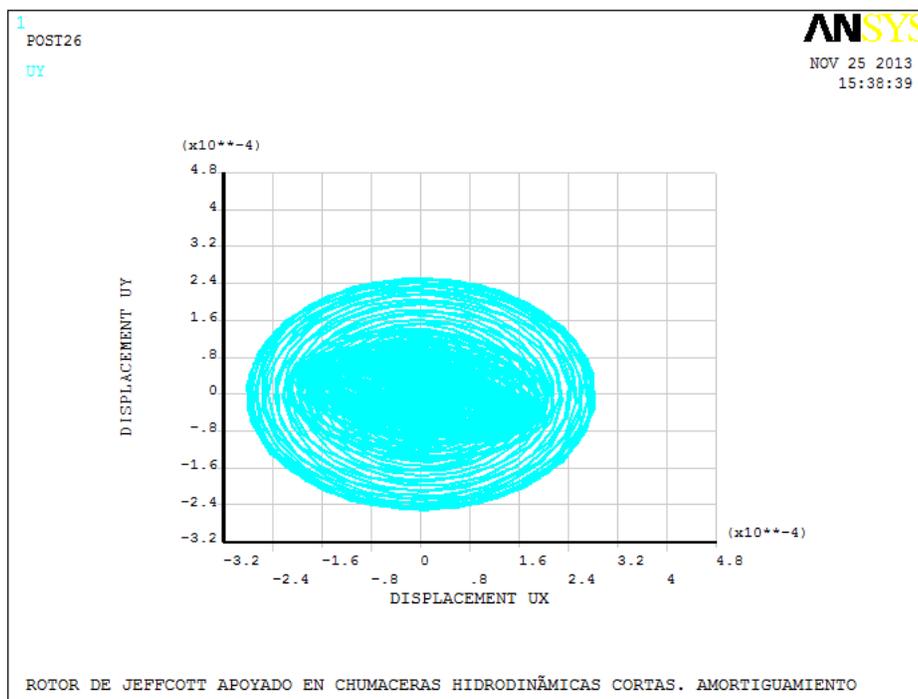


Figura 5.33. Órbita del nodo equivalente al disco durante el estado transitorio de 0 a 8 s.  $f = 100$

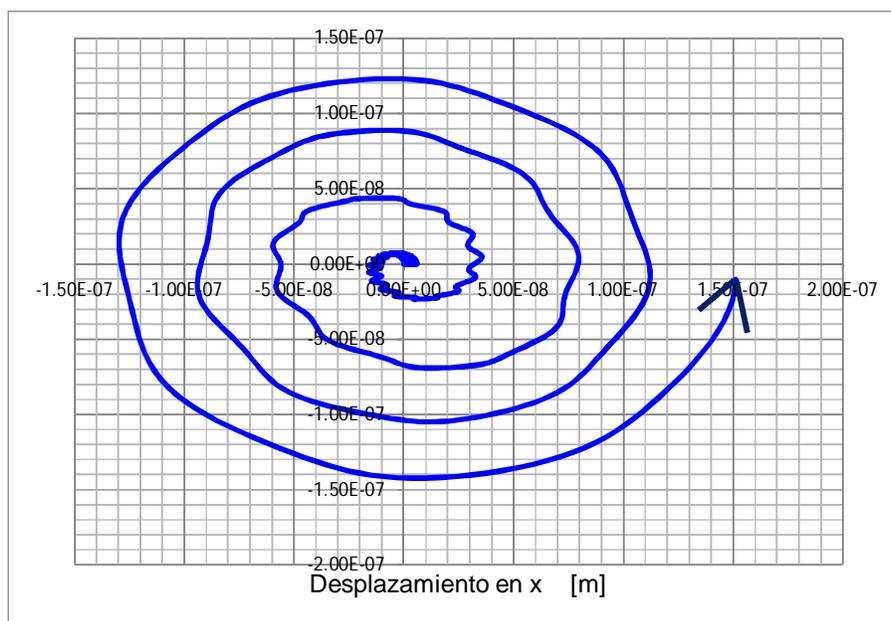


Figura 5.34a. Órbita del nodo equivalente al disco durante el estado transitorio de 0 a 1 s.  $f = 100$

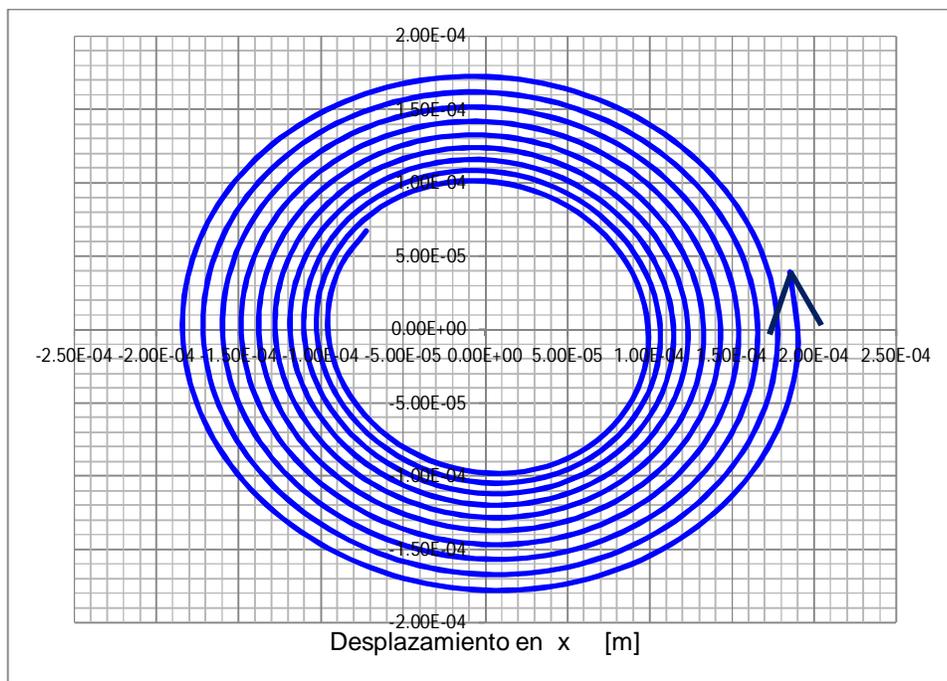


Figura 5.34b. Órbita del nodo equivalente al disco durante el estado transitorio de 6.35 a 6.55 s.

$$f = 100$$

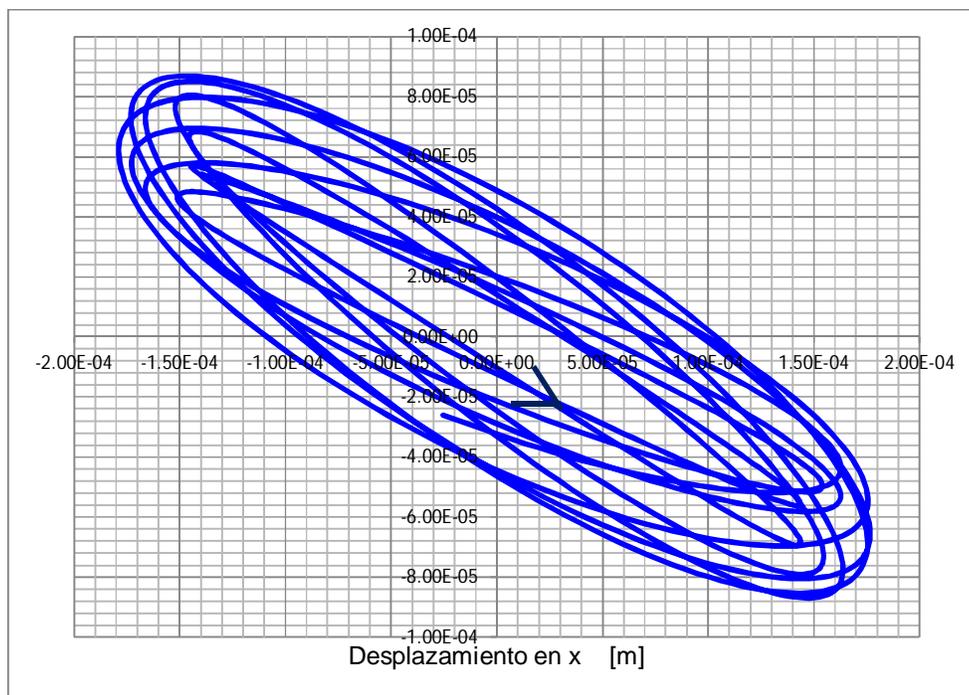


Figura 5.34c. Órbita del nodo equivalente al disco durante el estado transitorio de 7.8 a 8 s.

$$f = 100$$

---

### 5.3 Conclusiones

En general, puesto que existen soluciones analíticas para el modelo del rotor de Jeffcott, es posible comparar la cercanía de los resultados obtenidos con reportes experimentales y análisis matemáticos. Y en consecuencia la exactitud del modelo propuesto.

La importancia de la adecuación que se realizó mediante APDL permitirá predecir comportamientos vibratorios de rotores complejos que presenten excitaciones externas tanto en los discos como en los soportes; también se tomarían a consideración problemas de desalineamiento o presurización externa.

Es un hecho de que la programación se hizo con base en supuestos bastante acotados. La programación para otro tipo de chumaceras hidrodinámicas – intermedias, largas, o con otros niveles de presurización - implica un recálculo de los coeficientes, con fundamento en otros modelos matemáticos. Sin embargo, el código puede modificarse fácilmente permitiendo esta corrección o bien con programación adicional. Esta flexibilidad del código podría extenderse a otros tipos de rodamientos, a chumaceras con un gas o incluso electromagnéticas.

Hasta el momento, la generación de los coeficientes de rigidez y amortiguamiento se lleva a cabo en un procedimiento distinto y previo al análisis de elemento finito. Esto es necesario, si bien compromete a que el uso de los códigos generados para análisis posteriores se limite a las personas que tengan una referencia previa, en este caso proporcionada por el marco teórico.

En particular, para el modelo analizado se pueden prever algunos efectos en los cambios ocurridos.

Para el primer caso de presurización, relativamente baja ( $f = 20$ ), el comportamiento del eje mejora cualitativamente aunque no se aparte mucho en números absolutos del caso clásico sin presurizar.

En el segundo caso, con una presurización intermedia ( $f = 50$ ) el comportamiento de las frecuencias naturales se ven afectadas y disminuyen drásticamente. Sin embargo, en términos de operación esto es prácticamente igual a la situación del

caso clásico ya que una aceleración rápida permite alejarse de esa frecuencia natural durante el funcionamiento del rotor.

El tercer caso de alta presurización ( $f = 100$ ) es menos probable de encontrar en la realidad, además empieza a haber interferencia entre el muñón y la chumacera derivada por los problemas que causa este propio exceso de presurización. La amplitud de vibración del centro y los extremos del rotor es demasiado alta y genera estos problemas.

En resumen, los resultados obtenidos para los diversos casos presurizados son de sumo interés para la operación segura del rotor. Se comprueba la evidencia empírica que determina que una presurización de leve a mediana en verdad disminuye la excentricidad en una chumacera. Pero a partir de ciertos valores, la excentricidad del muñón y su amplitud de vibración aumentan al punto que se producen problemas al interior de la máquina pues se alcanzan valores iguales o superiores a los del claro radial con el consiguiente contacto de superficies y los desperfectos derivados.

La importancia de estas conclusiones particulares para un pequeño rotor experimental estiba en que pueden concluirse situaciones semejantes para cualquier modelo que se programe, sea una representación de un rotor existente que se quiera caracterizar o bien un diseño a prueba que tenga que cumplir con unas restricciones específicas. Esta es la mayor contribución posible del código.

---

## Referencias

### Introducción

[0.1]. Rao J.S. *Rotor Dynamics*. Wiley Eastern Limited, New Delhi 1983

### Capítulo 1

[1.1]. Vance J.M. *Rotodynamics of turbomachinery*. College Station, Texas. John Wiley & Sons, 1988.

[2]. ISO. 1940-1 *Mechanical vibration -- Balance quality requirements for rotors in a constant (rigid) state*. ISO 2003

[3]. Reinhoudt J.P. *On the stability of rotor-and-bearing systems and on the calculation of sliding bearings*. Technische Hogeschool Eindhoven, 1972

[4]. Ramírez Vargas, I. *Teoría de chumaceras presurizadas con puertos puntuales. Caso de la chumacera corta*. Instituto Politécnico Nacional, México D.F. 2007.

[5]. Meher-Homji C.B. *The Historical Evolution of Turbomachinery*. 29<sup>th</sup> Turbomachinery Symposium. 2000

[6]. San Andrés, L. *Static load of performance on plain journal bearings*. Texas A&M. 2010.

[7]. Nelson F.C. *Rotor Dynamics without Equations*. Tufts University. 2007

[8]. Beer F.P. , Johnston E.R. Clausen W.E. *Mecánica vectorial para ingenieros*. 2007

[9]. Krasnov M.L., Kiseliyov A.I., Makárenko. *Funciones de variable compleja. Cálculo operacional. Teoría de la estabilidad*.

## Capítulo 2

- [2.1]. Krodkiwski, J.M. *Mechanical Vibration*. The University of Melbourne. 2008
- [2.2]. Thompson, W.T. *Teoría de vibraciones*. Prentice Hall Ed. 1982
- [2.3]. Adams, M.L. *Rotating Machinery Vibration*. Marcel Dekker Inc. 2001
- [2.4]. Childs D. *Turbomachinery Rotodynamics. Phenomena, Modeling & Analysis*. John Wiley & Sons 1993.
- [2.5]. Vance J.M. *Rotodynamics of turbomachinery*. College Station, Texas. John Wiley & Sons, 1988.

## Capítulo 3

- [3.1]. Çengel Y.A. *Mecánica de fluidos. Fundamentos y aplicaciones*. Ed. 2006
- [3.2]. Childs D. *Turbomachinery Rotodynamics. Phenomena, Modeling & Analysis*. John Wiley & Sons 1993.
- [3.3]. Ramírez Vargas, I. *Teoría de chumaceras presurizadas con puertos puntuales. Caso de la chumacera corta*. Instituto Politécnico Nacional, México D.F. 2007.
- [3.4]. Senthil Kumar, M. Thyla P.R. Anbarasu E. *Numerical analysisi of hydrodynamic journal beariung under transient dynamic conditions*. Mechanika. 2010
- [3.5]. San Andrés, L. *Static load of performance on plain journal bearings*. Texas A&M. 2010.
- [3.6]. San Andrés, L. *Dynamics of a Rigid Rotor-Fluid Film Bearing System*. Class Notes- Modern Lubrication. Texas A&M University. College Station, Texas. 2010.
- [3.7]. Al-Wedyan H. M., Tahat M.S., Mutasher S.A. *The behavior of a Jeffcott rotor under a vibrating base of fluid flim bearing*. 2008

[3.8]. Greenwood. *Advanced dynamics*. Cambridge University Press 2003

#### **Capítulo 4**

[4.1]. Bathe, K.J. *Finite Element Procedures*. Prentice Hall 1996

[4.2]. Childs D. *Turbomachinery Rotodynamics. Phenomena, Modeling & Analysis*. John Wiley & Sons 1993.

[4.3]. ANSYS. *User's Guide ANSYS 12. Educational version*. Program documentation. SAS IP, Inc.; 2010.6. Hamrock. *Fundamentals on Fluid Film Lubrication*, 1994

[4.4]. Palacios Pineda, L.M., Gómez Mancilla J. C. Manilla García A. *Evaluación dinámica de un rotor de una bomba vertical*. Memorias del XVIII Congreso Internacional Anual de la SOMIM. 2012

[4.5]. Hamdoon, F.O. *Application of a Finite Element Package for Modeling Rotating Machinery Vibrations*. Eng. & Tech. Journal, Vol. 27, No.12. 2009

[4.6]. Kang, Y., Chang, Y.P., Tsai, J.W., Mu, L.H., Chang, Y.F., *An investigation in stiffness effects on dynamics of rotor-bearing-foundation systems*. Journal of Sound and Vibration 213 343-374. Taiwan, Republic of China. 2000

[4.7]. Ramírez Vargas, I. *Teoría de chumaceras presurizadas con puertos puntuales. Caso de la chumacera corta*. Instituto Politécnico Nacional, México D.F. 2007.

#### **Capítulo 5**

[5.1]. ANSYS. *User's Guide ANSYS 12. Educational version*. Program documentation. SAS IP, Inc.; 2010.6. Hamrock. *Fundamentals on Fluid Film Lubrication*, 1994

[5.2]. Palacios Pineda, L.M., Gómez Mancilla J. C. Manilla García A. *Evaluación dinámica de un rotor de una bomba vertical*. Memorias del XVIII Congreso Internacional Anual de la SOMIM. 2012

[5.3]. Ramírez Vargas, I. *Teoría de chumaceras presurizadas con puertos puntuales. Caso de la chumacera corta*. Instituto Politécnico Nacional, México D.F. 2007.

[5.4]. Lee, C.W. *Campbell Diagram. Waterfall Plot*. Center for Noise and Vibration Control. Department of Mechanical Engineering, KAIST.2010.

---

## Anexo A – Ecuación de Reynolds

---

Una seria apreciación de la hidrodinámica en la lubricación, empezó a finales del siglo XIX cuando Mr. Beauchamp Tower descubrió que se puede generar presión en la película del lubricante que se encuentra entre dos superficies en movimiento relativo. Al tiempo del descubrimiento de Tower, Osborne Reynolds y otros teóricos estaban trabajando sobre la teoría hidrodinámica de la lubricación. Por una afortunada coincidencia, los datos detallados de Tower estaban disponibles para proporcionar la confirmación experimental casi al mismo tiempo que Reynolds los necesitó. El resultado de esto fue la teoría de la lubricación hidrodinámica que se pudo expresar en forma de ecuación y que fue originalmente obtenida en un memorable artículo por Osborne Reynolds en 1886 y que se conoce como la “*ecuación de Reynolds*”, fué publicada en el Proceedings of the Royal Society de Londres. Reynolds proporcionó la primer prueba analítica de que un líquido viscoso podía separar físicamente dos superficies en deslizamiento relativo por medio de presión hidrodinámica, dando como resultado un bajo valor de fricción y teóricamente cero desgaste. El artículo clásico de Reynolds no solo contiene la ecuación diferencial básica, sino que contiene también una comparación entre sus predicciones teóricas y los resultados experimentales obtenidos por Tower en 1883.

### A.1 Las ecuaciones de Navier-Stokes

La ecuación de Reynolds se puede obtener a partir de las ecuaciones de Navier-Stokes, las cuales son fundamentales en la mecánica de fluidos. Usando coordenadas cartesianas y omitiendo las fuerzas de cuerpo, las ecuaciones de Navier-Stokes se pueden establecer como;

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + v \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + w \cdot \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \gamma \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \quad (\text{A.1})$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \cdot \frac{\partial v}{\partial x} + v \cdot \frac{\partial v}{\partial y} + w \cdot \frac{\partial v}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \gamma \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) \quad (\text{A.2})$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + u \cdot \frac{\partial w}{\partial x} + v \cdot \frac{\partial w}{\partial y} + w \cdot \frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \gamma \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) \quad (\text{A.3})$$

donde  $\rho$  y  $\mu$  son respectivamente la densidad y la viscosidad absoluta del fluido,  $p$  es la presión,  $u$ ,  $v$ , y  $w$  son las componentes de la velocidad del fluido en las direcciones  $x, y$  y  $z$ . El modelo campo-fluido se completa con la ecuación de continuidad para fluido incompresible, dada por:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (\text{A.4})$$

## A.2 Análisis de orden de magnitud.

### A.2.1 El número de Reynolds.

En cualquier problema de fluidos la importancia relacionada entre las fuerzas de inercia a las viscosas se puede obtener de los valores que proporcione el número de Reynolds. En una chumacera, la velocidad del fluido  $u$  es mucho mayor a la velocidad  $v$  que atraviesa la película de fluido, por tanto,  $v \ll u$  entonces  $u(\partial u / \partial x) > v(\partial u / \partial y)$ .

Además se puede considerar que el ancho de la chumacera es mas o menos del mismo orden que su longitud, por lo que  $(\partial u / \partial x) \approx u_0 / R$  y  $(\partial u / \partial z) \approx u_0 / R$ . Si  $w$  representa la velocidad del fluido en la dirección  $z$ , entonces la velocidad del fluido en la dirección  $z$  deberá ser una fracción de la velocidad  $u$  en la dirección de

movimiento. Por lo tanto  $u(\partial u / \partial x) > w(\partial u / \partial z)$  y de aquí que el término  $u(\partial u / \partial x)$  se considere como el término de inercia dominante que se usa para efectos de comparación.

Las fuerzas viscosas contienen los términos  $\mu(\partial^2 u / \partial x^2)$ ,  $\mu(\partial^2 u / \partial y^2)$ ,  $\mu(\partial^2 u / \partial z^2)$ ; los cuales necesitan compararse evaluando la siguiente relación:

$$\frac{\mu(\partial^2 u / \partial x^2)}{\mu(\partial^2 u / \partial y^2)} = \frac{(\partial / \partial x)(\partial u / \partial x)}{(\partial / \partial y)(\partial u / \partial y)} \approx \frac{(1/R)(u/R)}{(1/C_r)(u/C_r)} = \left(\frac{C_r}{R}\right)^2 \ll 1 \quad (\text{A.5})$$

Entonces se tiene:  $\mu(\partial^2 u / \partial x^2) \ll \mu(\partial^2 u / \partial y^2)$  se puede observar que las fuerzas viscosas con gradientes a través de la película del fluido son términos dominantes. A continuación se compararán las fuerzas viscosas con las de inercia.

$$\frac{\rho u(\partial u / \partial x)}{\mu(\partial^2 u / \partial y^2)} \approx \frac{\rho u_0(u_0/R)}{\mu(u_0/C_r^2)} = \frac{\rho u_0}{\mu} \left(\frac{C_r^2}{R}\right) = \frac{\rho u_0 R}{\mu} \left(\frac{C_r}{R}\right)^2 = Re \left(\frac{C_r}{R}\right)^2 = Re_* \quad (\text{A.6})$$

donde  $Re_*$  es el número de Reynolds modificado. Vale la pena notar que el factor  $(C_r/R)^2$  es una cantidad del orden  $10^{-6}$ . Se puede ver que si el número de Reynolds  $Re = (\rho u_0 R) / \mu$  llegara a ser muy grande, entonces las fuerzas viscosas tenderán a dominar las inerciales.

Para ser más claro, consideremos los siguientes valores típicos en una chumacera:

$$R = 0.02 \text{ m}, \quad \frac{C_r}{R} = 10^{-3}, \quad u_0 = 6.28 \text{ m/s}, \quad \rho = 876 \text{ kg/m}^3,$$

$$\mu = 0.25 \text{ Pa} \cdot \text{s}$$

Con estos valores el número de Reynolds modificado toma el valor:

$$Re_* = \frac{\rho u_0 R}{\mu} \left( \frac{C_r}{R} \right)^2 = 0.0004$$

De aquí se puede ver que las fuerzas de inercia son despreciables en comparación con las fuerzas viscosas. Este es un caso típico en chumaceras hidrodinámicas, aún así es posible que se presente el fenómeno de turbulencia cuando el número de Reynolds excede el rango de 1000 a 2000, siendo en este caso los términos de inercia predominantes.

### A.2.2 El número de Froude.

Las fuerzas de cuerpo que normalmente se encuentran en la lubricación hidrodinámica son las de gravitación y las magnéticas. El número de Fraude muestra la relación de las fuerzas de inercia a las de gravedad.

Sea la fuerza de gravedad por unidad de volumen igual a  $\rho g$ , la comparación con las fuerzas de inercia  $\rho u(\partial u / \partial x)$  se puede escribir como:

$$Fr = \frac{F.Inercia}{F.Gravedad} = \frac{\rho u(\partial u / \partial x)}{\rho g} \approx \frac{u_0(u_0 / R)}{g} = \frac{u_0^2}{g R} \quad (A.7)$$

Utilizando los valores anteriores para una chumacera típica, se tendrá:

$$Fr = \frac{F.Inercia}{F.Gravedad} = 201$$

este resultado indica que las fuerzas de inercia son más grandes que las fuerzas de gravedad.

También se puede encontrar una relación directa entre las fuerzas de gravedad y las fuerzas viscosas, dividiendo el número de Reynolds por el número de Froude.

$$\frac{\text{Número de Reynolds}}{\text{Número de Froude}} = \frac{\frac{F. Inercia}{F. Viscosas}}{\frac{F. Inercia}{F. Gravedad}} = \frac{F. Gravedad}{F. Viscosas} = \frac{\rho g C_r^2}{\mu u} \quad (\text{A.8})$$

Usando los valores para la chumacera dada con anterioridad:

$$\frac{F. Gravedad}{F. Viscosas} = \frac{\rho g C_r^2}{\mu u} = 2.189 \times 10^{-6}$$

Por lo tanto, se puede notar que las fuerzas de gravedad se pueden despreciar en relación con las fuerzas viscosas.

### A.2.3 El número de Euler.

Se puede determinar la importancia del término de presión relativo al término de inercia, utilizando el número de Euler; el cual se define como:

$$\text{Número de Euler} = \frac{F. Presión}{F. Inercia} = \frac{\partial p / \partial x}{\rho u (\partial u / \partial x)} \cong \frac{p_{ref}}{\rho u_0^2} \quad (\text{A.9})$$

En donde  $p_{ref}$  es la presión de referencia promedio, basada en la carga proyectada en una chumaceras hidrodinámica (esta es del orden de 5Mpa), por lo que:

$$\text{Número de Euler} = \frac{p_{ref}}{\rho u_0^2} = 144.72$$

Este resultado indica que las fuerzas de presión son más grandes que las fuerzas de inercia. Una relación directa de las fuerzas de presión con las viscosas se puede obtener multiplicando el número de Reynolds por el número de Euler.

$$\begin{aligned} (\text{Número de Euler})(\text{Número de Reynolds}) &= \frac{F.Presión}{F.Inercia} \frac{F.Inercia}{F.Viscosas} = \frac{F.Presión}{F.Viscosas} \quad (\text{A.10}) \\ &= \frac{p_{ref}}{\rho u_0^2} \frac{\rho u_0 R}{\mu} \left(\frac{C_r}{R}\right)^2 = \frac{p_{ref} R}{\mu u_0} \left(\frac{C_r}{R}\right)^2 \end{aligned}$$

Investigando el valor numérico de esta relación con los datos proporcionados con anterioridad se obtiene:

$$\frac{F.Presión}{F.Viscosas} = \frac{p_{ref} R}{\mu u_0} \left(\frac{C_r}{R}\right)^2 = 0.063$$

El resultado anterior permite concluir que las fuerzas viscosas son un poco más grandes que las de presión, de tal forma que ambos términos necesitan ser considerados.

### A.3 Hipótesis válidas para las chumaceras hidrodinámicas

Considerando el análisis adimensional anterior, se pueden sugerir cinco hipótesis válidas para la mayoría de las aplicaciones de chumaceras hidrodinámicas. El análisis de orden de magnitud justifica estas hipótesis:

1. Se asume que el fluido es newtoniano, donde los esfuerzos cortantes y las velocidades de deformación son directamente proporcionales.
2. Los términos de inercia y las fuerzas de cuerpo se consideran despreciables cuando se comparan con los términos viscosos.
3. La variación de la presión a través del espesor de la película se asume que es despreciable,  $\partial p / \partial y = 0$ .
4. Se considera que el flujo es laminar. En la presencia de turbulencias se deben de considerar los términos inerciales.
5. Los efectos de la curvatura son despreciables. Esto implica que el espesor de la película del lubricante es mucho más pequeño que la longitud ó el ancho de la chumacera, tal que el dominio físico del flujo se puede desenvolver. Esto permite el uso de coordenadas cartesianas.

#### **A.4 Deducción de la ecuación de Reynolds.**

Para comprender mejor cada término que aparecerá en la ecuación de Reynolds, es importante mostrar la ubicación de las variables que intervienen en una chumacera hidrodinámica. En la figura C.1 se muestra una chumacera junto con el muñón en reposo.

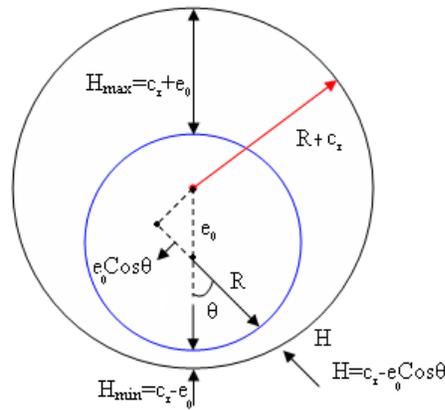


Fig. A.1 Nomenclatura de una chumacera hidrodinámica en reposo

En donde  $R$  es el radio del muñón,  $C_r$  representa el claro radial (diferencia entre el radio de la chumacera y del muñón),  $e_0$  es la excentricidad medida del centro de la chumacera al centro del muñón,  $H$  es el espesor de lubricante.

Para comenzar es necesario adimensionalizar las ecuaciones de Navier-Stokes para poder trabajar en forma general; éstas se repiten a continuación:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + v \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + w \cdot \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \gamma \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \quad (\text{A.11})$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \cdot \frac{\partial v}{\partial x} + v \cdot \frac{\partial v}{\partial y} + w \cdot \frac{\partial v}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \gamma \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) \quad (\text{A.12})$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + u \cdot \frac{\partial w}{\partial x} + v \cdot \frac{\partial w}{\partial y} + w \cdot \frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \gamma \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) \quad (\text{A.13})$$

Introduciendo los siguientes parámetros adimensionales:

$$\bar{x} = \frac{x}{R}, \quad \bar{y} = \frac{y}{C_r}, \quad \bar{z} = \frac{z}{R} \quad (\text{A.14})$$

$$\bar{u} = \frac{u}{\omega R}, \quad \bar{v} = \frac{v}{\omega C_r}, \quad \bar{w} = \frac{w}{\omega R}, \quad \tau = \omega t \quad (\text{A.15})$$

Ahora es necesario sustituir (A.14) y (A.15) en las ecuaciones de Navier-Stokes, para mostrarlo se calcularán todos los términos del primer y segundo miembro de (A.11) como se muestra a continuación:

Para el primer miembro:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial(\omega R \bar{u})}{\partial\left(\frac{\tau}{\omega}\right)} = \omega^2 R \frac{\partial \bar{u}}{\partial \tau} \quad (\text{A.16})$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial(\omega R \bar{u})}{\partial(R \bar{x})} = \omega \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} \quad (\text{A.17})$$

$$u \frac{\partial u}{\partial x} = \omega^2 R \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} \quad (\text{A.18})$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial(\omega R \bar{u})}{\partial(C_r \bar{y})} = \omega \left(\frac{R}{C_r}\right) \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} \quad (\text{A.19})$$

$$v \frac{\partial u}{\partial y} = \omega^2 R \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} \quad (\text{A.20})$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial(\omega R \bar{u})}{\partial(R \bar{z})} = \omega \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{z}} \quad (\text{A.21})$$

$$w \frac{\partial u}{\partial z} = \omega^2 R \bar{w} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{z}} \quad (\text{A.22})$$

Para el segundo miembro:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 (\omega R \bar{u})}{\partial (R \bar{x})^2} = \frac{\omega}{R} \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{x}^2} \quad (\text{A.23})$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 (\omega R \bar{u})}{\partial (C_r \bar{y})^2} = \frac{\omega}{R} \left( \frac{R}{C_r} \right)^2 \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{y}^2} \quad (\text{A.24})$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 (\omega R \bar{u})}{\partial (R \bar{z})^2} = \frac{\omega}{R} \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{z}^2} \quad (\text{A.25})$$

Haciendo que:

$$\bar{p} = \frac{p}{P_{dim}}, \quad \text{en donde:} \quad P_{dim} = \rho \gamma \omega \left( \frac{R}{C_r} \right)^2$$

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = \left( \frac{1}{\rho} \right) \rho \gamma \omega \left( \frac{R}{C_r} \right)^2 \frac{\partial \bar{p}}{\partial (R \bar{x})} = \gamma \frac{\omega}{R} \left( \frac{R}{C_r} \right)^2 \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}} \quad (\text{A.26})$$

Sustituyendo en la primera ecuación de Navier-Stokes (A.11) se tendrá:

$$\omega^2 R \left( \frac{\partial \bar{u}}{\partial \tau} + \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} + \bar{w} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{z}} \right) = -\gamma \frac{\omega}{R} \left( \frac{R}{C_r} \right)^2 \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}} + \gamma \frac{\omega}{R} \left[ \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{x}^2} + \left( \frac{R}{C_r} \right)^2 \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{y}^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{z}^2} \right] \quad (\text{A.27})$$

Procediendo de igual forma, se tendrá para la segunda ecuación de Navier-Stokes (A.12):

Para el primer miembro:

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial(\omega C_r \bar{v})}{\partial\left(\frac{\tau}{\omega}\right)} = \omega^2 C_r \frac{\partial \bar{v}}{\partial \tau} \quad (\text{A.28})$$

$$u \frac{\partial v}{\partial x} = \omega^2 C_r \bar{u} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{x}} \quad (\text{A.29})$$

$$v \frac{\partial v}{\partial y} = \omega^2 C_r \bar{v} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} \quad (\text{A.30})$$

$$w \frac{\partial v}{\partial z} = \omega^2 C_r \bar{w} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{z}} \quad (\text{A.31})$$

Para el segundo miembro:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \frac{\partial^2(\omega C_r \bar{v})}{\partial(R \bar{x})^2} = \frac{C_r \omega}{R^2} \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \bar{x}^2} \quad (\text{A.32})$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = \frac{\partial^2(\omega C_r \bar{v})}{\partial(C_r \bar{y})^2} = \frac{\omega}{C_r} \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \bar{y}^2} \quad \text{A.33}$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = \frac{\partial^2(\omega C_r \bar{u})}{\partial(R \bar{z})^2} = \frac{\omega C_r}{R^2} \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \bar{z}^2} \quad (\text{A.34})$$

Haciendo que:

$$\bar{p} = \frac{p}{P_{dim}}, \quad \text{en donde:} \quad P_{dim} = \rho \gamma \omega \left(\frac{R}{C_r}\right)^2$$

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} = \left( \frac{1}{\rho} \right) \rho \gamma \omega \left( \frac{R}{C_r} \right)^2 \frac{\partial \bar{p}}{\partial (C_r \bar{y})} = \gamma \frac{\omega}{C_r} \left( \frac{R}{C_r} \right)^2 \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{y}} \quad (\text{A.35})$$

Sustituyendo en la segunda ecuación de Navier-Stokes (A.12):

$$\omega^2 C_r \left( \frac{\partial \bar{v}}{\partial \tau} + \bar{u} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} + \bar{w} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{z}} \right) = -\gamma \frac{\omega}{C_r} \left( \frac{R}{C_r} \right)^2 \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{y}} + \gamma \frac{C_r \omega}{R^2} \left[ \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \bar{z}^2} \right] + \gamma \frac{\omega}{C_r} \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \bar{y}^2} \quad (\text{A.36})$$

Análogamente para la tercera ecuación se tendrá:

$$\omega^2 R \left( \frac{\partial \bar{w}}{\partial \tau} + \bar{u} \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{y}} + \bar{w} \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{z}} \right) = -\gamma \frac{\omega}{R} \left( \frac{R}{C_r} \right)^2 \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{z}} + \gamma \frac{\omega}{R} \left[ \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \bar{x}^2} + \left( \frac{R}{C_r} \right)^2 \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \bar{y}^2} + \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \bar{z}^2} \right] \quad (\text{A.37})$$

Multiplicando a las ecuaciones resultantes por el factor:

$$\frac{1}{\frac{\gamma \omega}{R} \left( \frac{R}{C_r} \right)^2}, \quad \text{y recordando que: } Re = \frac{\rho u L}{\mu} = \frac{\omega}{\gamma}, \quad \text{y además: } Re_* = Re \left( \frac{C_r}{R} \right)^2 R^2$$

Se puede escribir:

$$Re_* \left( \frac{\partial \bar{u}}{\partial \tau} + \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} + \bar{w} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{z}} \right) = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}} + \left( \frac{C_r}{R} \right)^2 \left[ \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{z}^2} \right] + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{y}^2} \quad (\text{A.38})$$

$$Re_* \left( \frac{C_r}{R} \right)^2 \left( \frac{\partial \bar{v}}{\partial \tau} + \bar{u} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} + \bar{w} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{z}} \right) = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{y}} + \left( \frac{C_r}{R} \right)^2 \left[ \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \bar{z}^2} \right] + \left( \frac{C_r}{R} \right)^2 \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \bar{y}^2} \quad (\text{A.39})$$

$$Re_* \left( \frac{\partial \bar{w}}{\partial \tau} + \bar{u} \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{y}} + \bar{w} \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{z}} \right) = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{z}} + \left( \frac{C_r}{R} \right)^2 \left[ \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \bar{z}^2} \right] + \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \bar{y}^2} \quad (\text{A.40})$$

Notando que para una chumacera debe cumplirse que:

$$\frac{C_r}{R} \cong 10^{-3}, \quad Re_* < 1 \quad (\text{A.41})$$

Entonces las ecuaciones (A.38), (A.39) y (A.40) toman la forma:

$$\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}} = \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{y}^2} \quad (\text{A.42})$$

$$\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{y}} = 0 \quad (\text{A.43})$$

$$\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{z}} = \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \bar{y}^2} \quad (\text{A.44})$$

De la segunda ecuación se puede notar que:

$$\bar{p}(\bar{y}) = \text{constante}, \text{ o bien } \bar{p} = \bar{p}(\bar{x}, \bar{z}).$$

Regresando a las variables adimensionales de las ecuaciones restantes, se tendrá:

$$\frac{1}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (\text{A.45})$$

$$\frac{1}{\mu} \frac{\partial p}{\partial z} = \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \quad (\text{A.46})$$

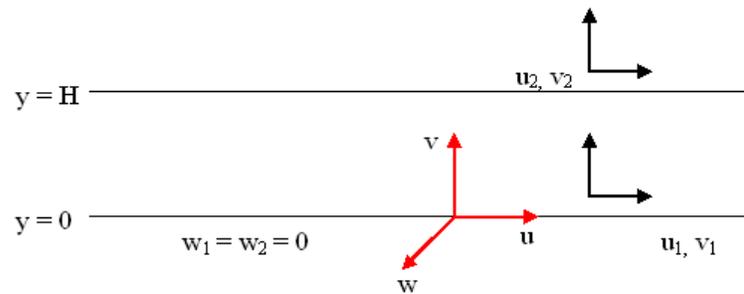


Figura A.2 Frontera de una chumacera hidrodinámica.

Integrando dos veces a (A.45) y usando los valores de la frontera en la chumacera (ver fig. A.2), se puede escribir:

$$u(y) = \frac{1}{2\mu} \frac{\partial p(x, z)}{\partial x} y(y-H) + c_1 y + c_2, \quad u(0) = u_1, \quad u(H) = u_2 \quad (\text{A.47})$$

donde:

$$u(y) = \frac{1}{2\mu} \frac{\partial p(x, z)}{\partial x} y(y-H) + \frac{u_2 - u_1}{H} y + u_1 \quad (\text{A.48})$$

Integrando dos veces a (A.46) se tendrá:

$$w(y) = \frac{1}{2\mu} \frac{\partial p(x, z)}{\partial z} y(y-H), \quad w(0) = w(H) = 0, \quad c_1 = c_2 = 0 \quad (\text{A.49})$$

De la ecuación de continuidad:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (\text{A.50})$$

o bien:

$$-\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z}$$

Notar que:

$$u_1 = u_1(x, z)$$

$$u_2 = u_2(x, z)$$

$$H = H(x, z)$$

Sustituyendo en la ecuación continuidad:

$$-\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left[ \underbrace{\frac{1}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial x} y(y-H) + \frac{u_2 - u_1}{H} y + u_1}_{u(y)} \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[ \underbrace{\frac{1}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial z} y(y-H)}_{w(y)} \right] \quad (\text{A.51})$$

Integrando a (A.51) con respecto de “y”:

$$-\int \frac{\partial v}{\partial y} dy = \int_0^{H(x,z)} \frac{\partial}{\partial x} [u(y)] dy + \int_0^{H(x,z)} \frac{\partial}{\partial z} \left[ \frac{1}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial z} y(y-H) \right] dy \quad (\text{A.52})$$

Usando la regla de Leibnitz:

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} \int_0^{r(\alpha)} f(x, \alpha) dx = \int_0^{r(\alpha)} \frac{\partial f(x, \alpha)}{\partial \alpha} dx + f(r(\alpha), \alpha) \frac{\partial r}{\partial \alpha} \quad (\text{A.53})$$

O bien:

$$\int_0^{r(\alpha)} \frac{\partial f(x, \alpha)}{\partial \alpha} dx = \frac{\partial}{\partial \alpha} \int_0^{r(\alpha)} f(x, \alpha) dx - f(r(\alpha), \alpha) \frac{\partial r}{\partial \alpha} \quad (\text{A.54})$$

Identificando las variables:

$$\begin{aligned} x &\rightarrow y \\ r(\alpha) &\rightarrow H(x, z) \\ \alpha &\rightarrow x, z \end{aligned}$$

aplicando (A.54) al primer término del segundo miembro de (A.52):

$$\begin{aligned} \int_0^H \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{1}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial x} y(y-H) + \frac{u_2 - u_1}{H} y + u_1 \right] dy = \\ = \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{1}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial x} \int_0^H y(y-H) dy + \frac{u_2 - u_1}{H} \int_0^H y dy + u_1 \int_0^H dy \right] - u_2 \frac{\partial H}{\partial x} \quad (\text{A.55}) \end{aligned}$$

$$= -\frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{1}{2\mu} \cdot \frac{H^3}{6} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{u_1 + u_2}{2} H \right] - u_2 \frac{\partial H}{\partial x}$$

De manera similar, aplicando (A.54) al segundo término del segundo miembro de (A.52):

$$\int_0^{H(x,z)} \frac{\partial}{\partial z} \left[ \frac{1}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial z} y(y-H) \right] dy = -\frac{\partial}{\partial z} \left[ \frac{1}{2\mu} \cdot \frac{H^3}{6} \frac{\partial p}{\partial z} \right] \quad (\text{A.56})$$

Finalmente, sustituyendo en (A.52):

$$v_1 - v_2 = -\frac{1}{12\mu} \frac{\partial}{\partial x} \left[ H^3(x,z) \cdot \frac{\partial p}{\partial x} \right] - \frac{1}{12\mu} \frac{\partial}{\partial z} \left[ H^3(x,z) \cdot \frac{\partial p}{\partial z} \right] + H \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{u_1 + u_2}{2} \right] + \frac{u_1 + u_2}{2} \frac{\partial H}{\partial x} - u_2 \frac{\partial H}{\partial x} \quad (\text{A.57})$$

Reordenando se obtiene la ecuación de Reynolds:

$$\underbrace{\frac{\partial}{\partial x} \left( H^3 \cdot \frac{\partial p}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( H^3 \cdot \frac{\partial p}{\partial z} \right)}_{\text{Ecuación de Reynolds}} = \underbrace{12\mu(v_2 - v_1)}_{\substack{\text{(estrechamiento)} \\ \text{squeeze}}} + \underbrace{6\mu(u_1 - u_2)}_{\substack{\text{(cuña)} \\ \text{wedge}}} \frac{\partial H}{\partial x} + \underbrace{6\mu H \frac{\partial}{\partial x} (u_1 + u_2)}_{\substack{\text{(extensión)} \\ \text{stretch}}} \quad H=f(x,z) \quad (\text{A.58})$$

### A.5 Ecuación de Reynolds en coordenadas cilíndricas.

En esta sección se mostrará el desarrollo completo para transformar la ecuación de Reynolds a coordenadas cilíndricas, recordar que la chumacera tiene la forma de un cilindro y esto hará que los análisis y desarrollos posteriores sean más fáciles de realizar. En la figura A.3 se muestra el espesor de la película de lubricante  $H$  en el sistema de coordenadas cartesiano, el eje  $x$  coincide con la superficie en reposo de la chumacera, por lo que ahí las velocidades son iguales a cero.

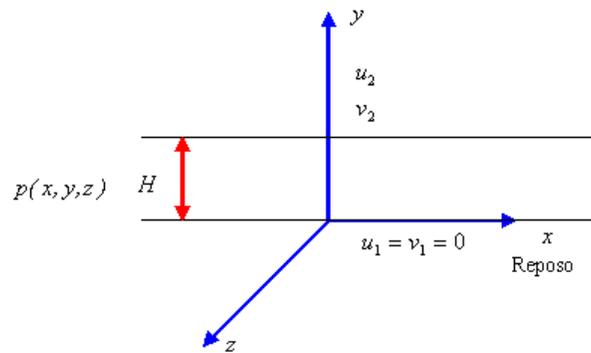


Figura A.3 Espesor de la película de lubricante en la chumacera.

Por lo anterior, la ecuación de Reynolds (A.58) puede escribirse como:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{H^3}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{H^3}{\mu} \frac{\partial p}{\partial z} \right) = 12v_2 - 6u_2 \frac{\partial H}{\partial x} + 6H \frac{\partial u_2}{\partial x} \quad (\text{A.59})$$

El espesor de la película del lubricante va cambiando a lo largo de la circunferencia de la chumacera, dando como resultado que existan posiciones para las cuales toma un valor máximo y mínimo respectivamente. En la figura A.4 aparece una chumacera junto con el muñón para una posición arbitraria, en donde  $O$  representa el centro de la chumacera y  $J$  es el centro del muñón,  $S$  es un punto arbitrario en la película de lubricante y  $\varphi$  es el ángulo de equilibrio.

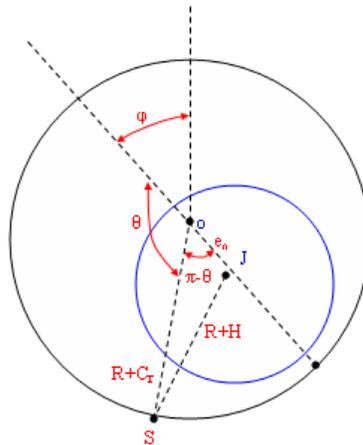


Figura A.4 Posición arbitraria del muñón en una chumacera.

Es posible encontrar una expresión para el espesor del lubricante a partir de un análisis geométrico como sigue:

Aplicando el teorema de cosenos al triángulo SOJ, se tendrá:

$$(R + H)^2 = (R + C_r)^2 + e_0^2 - 2(R + C_r)e_0 \cos(\pi - \theta) \tag{A.60}$$

Simplificando y notando que algunos términos son pequeños:

$$2RH + \underset{0}{H^2} = 2RC_r + \underset{0}{C_r^2} + \underset{0}{e_0^2} + 2e_0^2 R \cos\theta + 2C_r \underset{0}{e_0^2} \cos\theta \tag{A.61}$$

$$H = C_r + e_0 \cos\theta \tag{A.62}$$

Haciendo:

$$\varepsilon = \frac{e_0}{C_r}, \quad h = \frac{H}{C_r} \tag{A.63}$$

En forma adimensional:

$$h(\theta) = 1 + \varepsilon_0 \cos\theta \quad (\text{A.64})$$

En la figura A.5 aparece la gráfica de (A.64), en donde se aprecia la variación del espesor de la película del lubricante.

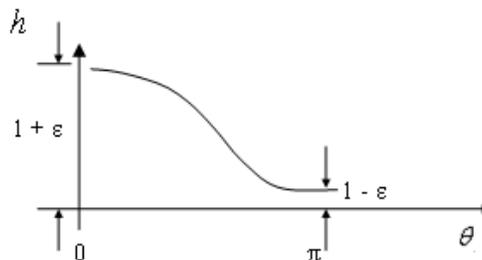


Figura A.5 Posición arbitraria del muñón en una chumacera.

Notar que:

$$0 < \varepsilon < 1, \quad h_{\min}(\theta = \pi) \leq h(\theta) \leq h_{\max}(\theta = 0)$$

Para transformar la ecuación de Reynolds, es necesario calcular cada término de (A.59), observar que aparecen las componentes de velocidad en la película del lubricante  $u_2, v_2$ ; para encontrarlos partiremos de la velocidad del muñón en el punto  $J$ .

En la figura A.6 aparecen los vectores unitarios en las direcciones radial y transversal del punto  $S$  para una posición arbitraria, así como los vectores en el centro del muñón (medidos desde la línea de carga).

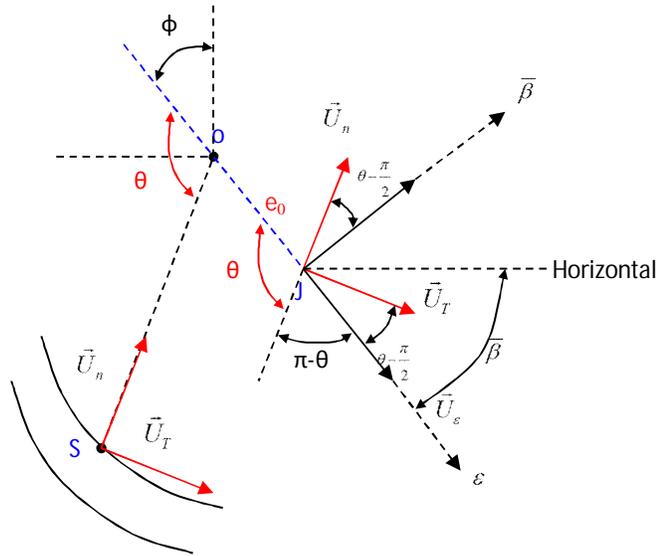


Figura A.6 Vectores unitarios en las direcciones radial y transversal del punto arbitrario S de la película de lubricante, y el centro del muñón J.

De la figura anterior se puede ver que la relación entre los vectores unitarios en el centro del muñón y el punto S está dada por:

$$\vec{U}_{\beta} = \underbrace{\vec{U}_n \cos\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right)}_{\text{Sen}\theta} + \underbrace{\vec{U}_T \text{Sen}\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right)}_{-\text{Cos}\theta} \quad (\text{A.65})$$

$$\vec{U}_{\epsilon} = -\vec{U}_n \text{Sen}\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) + \vec{U}_T \text{Cos}\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) \quad (\text{A.66})$$

o bien:

$$\vec{U}_{\beta} = \vec{U}_n \text{Sen}\theta - \vec{U}_T \text{Cos}\theta \quad (\text{A.67})$$

$$\vec{U}_{\epsilon} = -\vec{U}_n \text{Cos}\theta + \vec{U}_T \text{Sen}\theta \quad (\text{A.68})$$

Nota:  $\phi + \beta = \frac{\pi}{2}$

Por lo tanto la velocidad del punto “J” se puede escribir como:

$$\vec{v}_J = C_r \dot{\epsilon} \vec{U}_\epsilon + C_r \epsilon \dot{\beta} \vec{U}_\beta \quad (\text{A.69})$$

O bien usando (A.67) y (A.68), en las direcciones transversal y normal:

$$\vec{v}_J = \vec{U}_n \left( -C_r \dot{\epsilon} \text{Cos}\theta + C_r \epsilon \dot{\beta} \text{Sen}\theta \right) + \vec{U}_T \left( C_r \dot{\epsilon} \text{Sen}\theta - C_r \epsilon \dot{\beta} \text{Cos}\theta \right) \quad (\text{A.70})$$

La velocidad del punto móvil S se puede encontrar a partir de las velocidades relativas siguientes:

$$\vec{v}_{S/J} = \vec{v}_S - \vec{v}_J$$

O bien:

$$\vec{v}_S = \vec{v}_J + \underbrace{\vec{v}_{S/J}}_{\omega \hat{k} \times \vec{r}_{JS}} \quad (\text{A.71})$$

Observar que en (A.71) es necesario encontrar el vector  $\vec{r}_{JS}$  para poder realizar el producto vectorial. En la Figura A.7 se muestra este vector junto con unos trazos adicionales que permiten un análisis más sencillo.

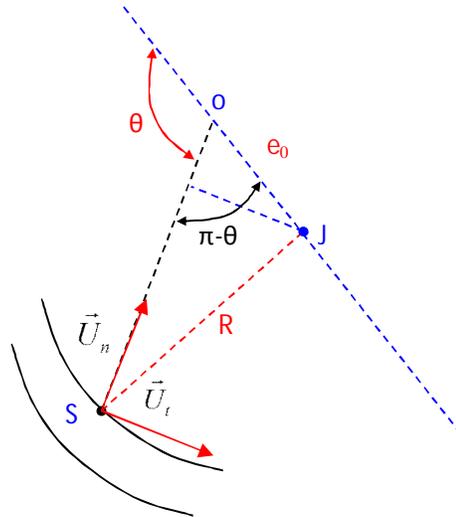


Figura A.7 Auxiliares para el producto vectorial

De la figura anterior se puede ver que:

$$\vec{r}_{JS} = - \left[ r_{OS} - e_0 \underbrace{\cos(\pi - \theta)}_{-\cos\theta} \right] \vec{U}_n - \left[ e_0 \underbrace{\sin(\pi - \theta)}_{+\sin\theta} \right] \vec{U}_t \quad (A.72)$$

O bien:

$$\vec{r}_{JS} = -(r_{OS} + e_0 \cos\theta) \vec{U}_n - (e_0 \sin\theta) \vec{U}_t \quad (A.73)$$

Aplicando el teorema de cosenos al triángulo SOJ:

$$R^2 = r_{OS}^2 + e_0^2 - 2r_{OS} e_0 \cos(\pi - \theta) \quad (A.74)$$

$$R^2 = r_{OS}^2 + \underbrace{(C_r \varepsilon)^2}_0 + 2r_{OS} C_r \underbrace{\varepsilon \cos\theta}_0 \quad (A.75)$$

$$R \approx r_{OS} \quad (A.76)$$

Entonces se tiene:

$$\vec{r}_{JS} = -R\vec{U}_n - C_r \varepsilon \text{ Sen}\theta \vec{U}_t \quad (\text{A.77})$$

De (A.71), el producto vectorial será:

$$\vec{v}_{S/J} = \omega \hat{k} \times \vec{r}_{JS} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 0 & 0 & \omega \\ -C_r \varepsilon \text{ Sen}\theta & -R & 0 \end{vmatrix} \quad (\text{A.78})$$

Notar que:  $\vec{U}_n = \hat{j}$  y  $\vec{U}_t = \hat{i}$ , después de desarrollar el determinante se tiene:

$$\vec{v}_{S/J} = \omega \hat{k} \times \vec{r}_{JS} = R\omega \vec{U}_t - C_r \varepsilon \omega \text{ Sen}\theta \vec{U}_n \quad (\text{A.79})$$

Finalmente, sustituyendo (A.70) y (A.79) en (A.71) se obtiene la velocidad del punto móvil S:

$$\vec{v}_S = (C_r \dot{\varepsilon} \text{ Cos}\theta + C_r \varepsilon \dot{\beta} \text{ Sen}\theta - C_r \varepsilon \omega \text{ Sen}\theta) \vec{U}_n + (C_r \dot{\varepsilon} \text{ Sen}\theta + R\omega - C_r \varepsilon \dot{\beta} \text{ Cos}\theta) \vec{U}_t \quad (\text{A.80})$$

De la ecuación anterior se puede reconocer:

$$v_2 = C_r \dot{\varepsilon} \text{ Cos}\theta + C_r \varepsilon \dot{\beta} \text{ Sen}\theta - C_r \dot{\varepsilon} \omega \text{ Sen}\theta \quad (\text{A.81})$$

$$u_2 = C_r \dot{\varepsilon} \text{ Sen}\theta + R\omega - C_r \varepsilon \dot{\beta} \text{ Cos}\theta \quad (\text{A.82})$$

Las componentes encontradas deberán ser sustituidas en el segundo miembro de la ecuación de Reynolds que se repite a continuación:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{H^3}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{H^3}{\mu} \frac{\partial p}{\partial z} \right) = 12v_2 - 6u_2 \frac{\partial H}{\partial x} + 6H \frac{\partial u_2}{\partial x}$$

(A.83)

Para continuar con la transformación a coordenadas cilíndricas, se calculará cada término por separado de la ecuación de Reynolds como sigue:

Haciendo:

$$\begin{aligned} x &= R\theta \\ dx &= R d\theta \end{aligned}$$

Y recordando que el espesor de la película de lubricante se definió como:

$$H = C_r(1 + \varepsilon \cos\theta)$$

De la ecuación de Reynolds, para cada término (primer miembro):

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{H^3}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x} \right) = \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{H^3}{R\mu} \frac{\partial p}{\partial \theta} \right) \cdot \frac{C_r^3}{C_r^3} = \frac{C_r^3}{R^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{h^3(\theta)}{\mu} \frac{\partial p}{\partial \theta} \right) \quad (\text{A.84})$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{H^3}{\mu} \frac{\partial p}{\partial z} \right) = C_r^3 \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{h^3(\theta)}{\mu} \frac{\partial p}{\partial z} \right) \quad (\text{A.85})$$

De forma similar al caso anterior, usando (A.81) y (A.82) se tiene para cada término en la ecuación de Reynolds (segundo miembro):

$$\frac{\partial H}{\partial x} = \frac{\partial H(\theta)}{R \partial \theta} = -\frac{1}{R} C_r \varepsilon \text{Sen} \theta \quad (\text{A.86})$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial x} = \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial \theta} (C_r \dot{\varepsilon} \text{Sen} \theta + R \omega - C_r \dot{\varepsilon} \dot{\beta} \text{Cos} \theta) = \frac{1}{R} (C_r \dot{\varepsilon} \text{Cos} \theta + C_r \dot{\varepsilon} \dot{\beta} \text{Sen} \theta) \quad (\text{A.87})$$

$$u_2 \frac{\partial H}{\partial x} = (C_r \dot{\varepsilon} \text{Sen} \theta + R \omega - C_r \dot{\varepsilon} \dot{\beta} \text{Cos} \theta) \left( -\frac{1}{R} C_r \varepsilon \text{Sen} \theta \right) \quad (\text{A.88})$$

Simplificando la ecuación anterior y eliminando los términos pequeños:

$$u_2 \frac{\partial H}{\partial x} = -\frac{C_r^2 \varepsilon \dot{\varepsilon}}{R} \text{Sen}^2 \theta - \omega C_r \varepsilon \text{Sen} \theta + \frac{C_r^2 \varepsilon^2}{R} \dot{\beta} \text{Sen} \theta \text{Cos} \theta$$

$$u_2 \frac{\partial H}{\partial x} = -\omega C_r \varepsilon \text{Sen} \theta \quad (\text{A.89})$$

El último término del segundo miembro de (A.83) se puede escribir como:

$$H \frac{\partial u_2}{\partial x} = -\frac{C_r}{R} (1 + \varepsilon \text{Cos} \theta) (C_r \dot{\varepsilon} \text{Cos} \theta + C_r \dot{\varepsilon} \dot{\beta} \text{Sen} \theta) \approx 0 \quad (\text{A.90})$$

Sustituyendo las ecuaciones (A.84) a la (A.90) en la ecuación (A.83), y después de simplificar y agrupar se obtiene la ecuación de la lubricación de Reynolds en coordenadas cilíndricas:

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \left( h^3(\theta) \frac{\partial p}{\partial \theta} \right) + R^2 \frac{\partial}{\partial z} \left( h^3(\theta) \frac{\partial p}{\partial z} \right) = 12 \frac{\mu R^2}{C_r^3} \left[ C_r \dot{\varepsilon} \cos \theta + C_r \varepsilon \left( \dot{\beta} - \frac{\omega}{2} \right) \text{Sen} \theta \right] \quad (\text{A.91})$$

Es posible simplificar aún más a la ecuación anterior, haciendo las siguientes sustituciones en el segundo miembro:

$$V_s^2 = (C_r \dot{\varepsilon})^2 + \left[ C_r \varepsilon \left( \dot{\beta} - \frac{\omega}{2} \right) \right]^2 \quad (\text{A.92})$$

En donde:

$$\text{Cos} \alpha = \frac{C_r \dot{\varepsilon}}{V_s}, \quad \text{Sen} \alpha = \frac{C_r \varepsilon \left( \dot{\beta} - \frac{\omega}{2} \right)}{V_s}, \quad \text{Tan} \alpha = \frac{-C_r \varepsilon \left( \dot{\beta} - \frac{\omega}{2} \right)}{C_r \dot{\varepsilon}} \quad (\text{A.93})$$

La ecuación de Reynolds toma la forma:

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \left( h^3(\theta) \frac{\partial p}{\partial \theta} \right) + R^2 \frac{\partial}{\partial z} \left( h^3(\theta) \frac{\partial p}{\partial z} \right) = 12 \frac{\mu R^2 V_s}{C_r^3} \text{Cos}(\theta + \alpha) \quad (\text{A.94})$$

En estado estacionario (posición de equilibrio) se tiene que  $\dot{\beta} = 0$ , y  $\dot{\varepsilon} = 0$ , lo que implica de (A.93) que:  $\alpha = \pi / 2$ ; entonces la ecuación de Reynolds en estado estacionario se escribe como:

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \left( h^3(\theta) \frac{\partial p}{\partial \theta} \right) + R^2 \frac{\partial}{\partial z} \left( h^3(\theta) \frac{\partial p}{\partial z} \right) = 12 \frac{\mu R^2}{C_r^2} \left( -\varepsilon \frac{\omega}{2} \text{Sen} \theta \right) \quad (\text{A.95})$$

---

## Anexo B – Soluciones analíticas aproximadas para chumaceras cortas

---

Una chumacera consiste de un cuerpo cilíndrico alrededor del cual gira un eje y que se usa en casi todos los tipos de maquinaria para soportar cargas radiales ó simplemente como una guía para la suave transmisión de un par con un mínimo de pérdida de carga y mínimo desgaste. La capacidad para soportar carga se debe a la generación de un campo de presión en la película del lubricante debido al movimiento relativo entre el muñón y la chumacera. El campo de presión en la chumacera se genera por la formación de una cuña de lubricante, el cual es arrastrado hacia el claro entre dos superficies convergentes. Esta cuña convergente se crea porque el eje no gira en forma concéntrica con respecto a la chumacera, sino que existe un desplazamiento relativo del centro del eje con respecto al centro de la chumacera y que se conoce como excentricidad. La cantidad de excentricidad se autoajusta hasta que la carga se equilibra con la presión generada en la parte convergente de la película del lubricante.

Los primeros estudios de un eje y una chumacera operando bajo condiciones completamente hidrodinámicas fueron realizadas por F. A. Von Pauli en 1849 y por G. A. Hirn en 1854. En 1883 Nikilay Petroff concluyó que la fricción en chumaceras se debía a un fenómeno hidrodinámico. Mr. Beauchamp Tower en 1883 realizó experimentos y demostró por primera vez la existencia de un campo de presión en una chumacera hidrodinámica. Posteriormente Osborne Reynolds en 1886 obtuvo una expresión matemática que explica este incremento de presión y que ha llegado a ser la base del análisis hidrodinámico del funcionamiento de las chumaceras.

La solución de la ecuación diferencial de Reynolds fue difícil y en 1904 Arnold Sommerfeld desarrollo una integración directa que permitió el análisis de chumaceras de longitud infinita. Para casos especiales se pueden utilizar modelos simplificados, de tal manera que el análisis de la lubricación hidrodinámica se simplifica mucho si la chumacera se asume infinitamente larga ó infinitamente

corta. El enfoque deseado es presentar dos soluciones aproximadas para las chumaceras: (1) solución de chumaceras infinitamente largas y (2) solución de chumaceras infinitamente cortas. Estas dos soluciones aproximadas ilustran las principales características de las chumaceras y su comportamiento. Como en otras disciplinas, la introducción de las computadoras permitió que complejos problemas de la lubricación hidrodinámica fueran resueltos por medio de análisis numéricos y tener resultados de tales problemas bajo condiciones reales sin tener la necesidad de confiar en ciertas hipótesis.

## B.1 Evaluación de los Principales Parámetros

- **Distribución de la Presión.**

La ecuación de Reynolds define el campo de presión  $p(x, z)$  dentro de una chumacera como función de su movimiento. La ecuación general de Reynolds se deriva en el apéndice A y se repite a continuación.

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\rho H^3}{12\mu} \frac{\partial p}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\rho H^3}{12\mu} \frac{\partial p}{\partial z} \right) = \frac{\rho(U_1 - U_2)}{2} \frac{\partial H}{\partial x} + \rho(V_2 - V_1) \quad (\text{B-1})$$

o bien en coordenadas circunferenciales esta ecuación se escribe como en [3]:

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{h^3}{\mu} \frac{\partial p}{\partial \theta} \right) + R^2 \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{h^3}{\mu} \frac{\partial p}{\partial z} \right) = \frac{12R^2}{C^3} [C\dot{\varepsilon} \cos \theta + C\varepsilon(\dot{\phi} - \omega/2) \sin \theta] \quad (\text{B-2})$$

donde  $C$  es el claro radial,  $\varepsilon$  es la excentricidad adimensional,  $R$  es el radio del muñón,  $\mu$  es la viscosidad dinámica,  $\theta$  es la coordenada circunferencial medida a partir de la línea de centros,  $\phi$  es el ángulo de actitud,  $h$  es el espesor de la película del fluido en forma adimensional y  $\omega$  es la velocidad angular del muñón. Donde  $H = C(1 + \varepsilon \cos \theta) = Ch$ .

En general  $\varepsilon$  y  $\dot{\phi}$  son diferentes de cero. Aun cuando la carga externa sea constante tanto en magnitud como en dirección el centro del eje describirá una órbita alrededor de su *posición de equilibrio estático*. En chumaceras bien diseñadas las amplitudes de sus orbitas son sumamente pequeñas de tal manera

que el movimiento del centro del muñón no tiene que considerarse cuando se calcula el comportamiento de estado estable. Sin embargo, si se investiga la estabilidad del movimiento del muñón ó si calcula la respuesta del sistema considerando cargas dinámicas, entonces,  $\varepsilon$  y  $\dot{\phi}$  se deberán de tomar en cuenta.

- **Capacidad de Carga.**

La carga total que la chumacera pueda soportar se encuentra integrando el campo de presión sobre el área total de la chumacera. La carga se calcula usualmente a partir de dos componentes, una que actúa a lo largo de la línea de centros (componente radial) y otra componente perpendicular a la primera (componente tangencial). Este método permite el cálculo del ángulo que se forma entre la línea de centros y la línea de carga. Por cierto, el eje no se desvía en la misma dirección en la que se aplica la carga, sino que se mueve a cierto ángulo de la línea de carga. Este ángulo se conoce como el **ángulo de equilibrio** el cual ubica la posición del mínimo espesor de película a partir donde la línea de carga intercepta al centro del eje. La figura B.1 muestra las componentes de la carga del campo de presión de una chumacera hidrodinámica.

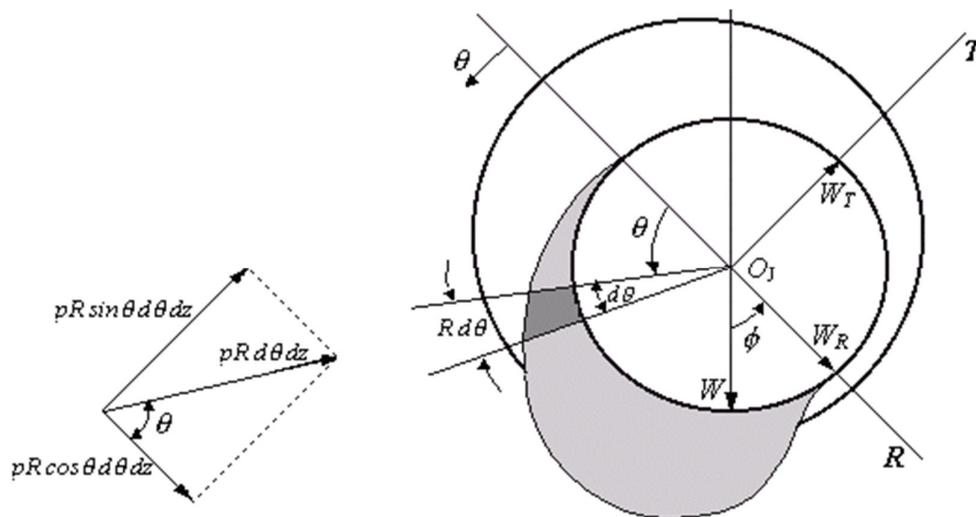


Figura B.1 Componentes radial y tangencial de la carga.

Para analizar y obtener las expresiones de las componentes de la fuerza de presión  $F_R$  y  $F_T$  considérese un pequeño elemento de área  $Rd\theta dz$  donde el eje  $z$  es normal al plano del diagrama en la figura 1.1. En la figura 1.2 el eje  $z$  se muestra en una forma de película desenvuelta.

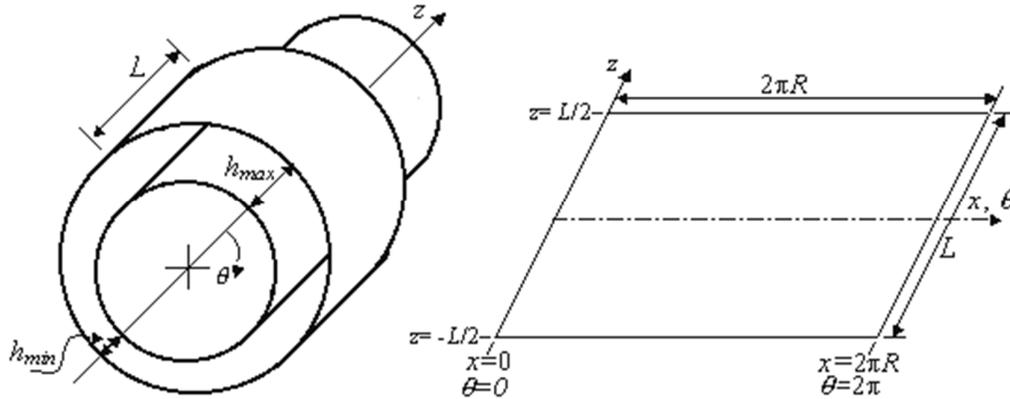


Figura B.2 Chumacera hidrodinámica en forma desenvuelta

El incremento de la fuerza ejercida por la presión hidrodinámica sobre el elemento de área es  $pRd\theta dz$  que tiene como componentes  $pR\cos\theta d\theta dz$  que actúa a lo largo de la línea de centros y  $pR\sin\theta d\theta dz$  que actúa en la dirección normal a la línea de centros. Por lo que, las componentes  $F_R$  y  $F_T$  de la fuerza de presión están dadas por:

$$F_R = \int_{-L/2}^{L/2} \int_0^{\theta_2} pR \cos\theta d\theta dz \quad (B-3a)$$

$$F_T = \int_{-L/2}^{L/2} \int_0^{\theta_2} pR \sin\theta d\theta dz \quad (B-3b)$$

El ángulo  $\theta_2$  indica la posición angular del margen de arrastre de la película del lubricante ó bien se conoce como la frontera de inicio de cavitación. La evaluación analítica de las integrales de  $F_R$  y  $F_T$  se realizan sobre la parte activa del campo de presión  $0 < \theta_2 < \pi$ . El centro del muñón permanecerá en la posición de

equilibrio estático siempre que la carga externa  $\mathbf{W}$  se iguale con la fuerza resultante de la presión  $\mathbf{F}$ . O bien:

$$\mathbf{W} + \mathbf{F} = 0 \quad (\text{B-4})$$

Donde  $\mathbf{W} = W \cos\phi \mathbf{R} - W \sin\phi \mathbf{T}$  y  $\mathbf{F} = F_R \mathbf{R} + F_T \mathbf{T}$  por lo tanto si expresamos (B-4) en sus componentes escribimos:

$$\begin{aligned} W \cos\phi + F_R &= 0 \\ -W \sin\phi + F_T &= 0 \end{aligned} \quad (\text{B-5})$$

En este punto es conveniente introducir las transformaciones (1-6) y escribir  $F_R$  y  $F_T$  en forma adimensional. Sean:

$$p = \mu N \left( \frac{R}{C} \right)^2 \bar{p} \quad \text{y} \quad z = \frac{L}{2} \bar{z} \quad (\text{B-6})$$

Si sustituimos las transformaciones (1-6) en las ecuaciones (1-3) obtenemos  $F_R$  y  $F_T$  en forma adimensional.

$$\bar{F}_R = \frac{F_R}{\mu NLD(R/C)^2} = \frac{1}{4} \int_{-1}^1 \int_0^{\theta_2} \bar{p} \cos\theta d\theta d\bar{z} \quad (\text{B-7a})$$

$$\bar{F}_T = \frac{F_T}{\mu NLD(R/C)^2} = \frac{1}{4} \int_{-1}^1 \int_0^{\theta_2} \bar{p} \sin\theta d\theta d\bar{z} \quad (\text{B-7b})$$

La carga total que la chumacera puede soportar es la resultante de las componentes  $\bar{F}_R$  y  $\bar{F}_T$ .

$$\bar{F} = (\bar{F}_R^2 + \bar{F}_T^2)^{1/2} = \left[ \left( \frac{F_R}{\mu NLD(R/C)^2} \right)^2 + \left( \frac{F_T}{\mu NLD(R/C)^2} \right)^2 \right]^{1/2}$$

o bien si sustituimos  $\bar{F}_R$  y  $\bar{F}_T$  del sistema de ecuaciones (1-5) se tiene:

$$\begin{aligned}\bar{F} &= (\bar{F}_R^2 + \bar{F}_T^2)^{1/2} = \left[ \left( \frac{-W \cos \phi}{\mu NLD(R/C)^2} \right)^2 + \left( \frac{W \sin \phi}{\mu NLD(R/C)^2} \right)^2 \right]^{1/2} \\ &= \frac{W}{\mu NLD(R/C)^2}\end{aligned}\quad (\text{B-8})$$

La literatura presenta un parámetro adimensional definido por:

$$S = (\bar{F}_R^2 + \bar{F}_T^2)^{-1/2} = \frac{\mu NLD}{W} \left( \frac{R}{C} \right)^2 \quad (\text{B-9})$$

Este número adimensional se usa para caracterizar el funcionamiento de las chumaceras. Este parámetro se conoce como el *número de Sommerfeld* ó *Carga Adimensional*. De las ecuaciones (B-8) y (B-9) podemos deducir que si el número de Sommerfeld  $S$  aumenta la capacidad de soportar carga  $F$  disminuye y viceversa. Por otro lado, el ángulo de actitud, el cual ubica la posición de la línea de centros a partir de la línea de carga se puede calcular del sistema de ecuaciones (B-5).

$$\phi = \tan^{-1} \left| \frac{\bar{F}_T}{\bar{F}_R} \right| \quad (\text{B-10})$$

- **Fuerza de Fricción.**

La fuerza de fricción,  $F_f$ , es la fuerza de resistencia viscosa que se opone a la rotación del muñón debido a la alta velocidad cortante en la película del fluido. Esta fuerza actúa en la dirección tangencial de la superficie del muñón y resulta en resistencia a la rotación del muñón. Esta fuerza se obtiene por integración del esfuerzo cortante sobre el área de la superficie del muñón, en  $y = h$ , alrededor de la chumacera. La distribución del esfuerzo cortante en la superficie del muñón

alrededor de la chumacera, se obtiene de los gradientes de velocidad, como a continuación se indica.

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = \mu \left( \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \approx \mu \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{y=h}$$

La fuerza de fricción se obtiene por la integración de  $\tau_{xy}$  sobre el área de la chumacera.

$$F_f = \int_0^L \int_0^{2\pi} R \tau_{xy} d\theta dz$$

(B-11)

- **Coeficiente de Fricción.**

El coeficiente de fricción de una chumacera se calcula una vez que la carga y la fuerza de fricción se conocen.

$$f = \frac{F_f}{W} \quad (\text{B-12})$$

Uno de los objetivos importantes en el diseño de las chumaceras es minimizar el coeficiente de fricción. Si el espesor de película es muy pequeño, implica el riesgo de un severo desgaste entre las superficies. Por consiguiente, el diseño implica un compromiso entre los requerimientos de baja fricción y el riesgo de desgaste severo. La determinación del mínimo espesor de película deseado requiere de consideraciones cuidadosas.

- **Rapidez del Flujo del Lubricante.**

Para evitar la falta del lubricante en el interior de la chumacera, es necesario compensar la pérdida del lubricante debido al flujo axial.

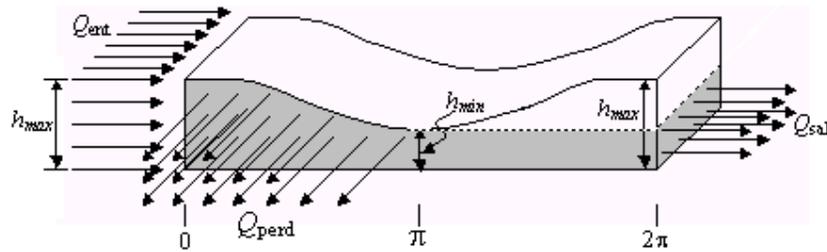


Figura B.3 Película del lubricante en forma desmenuada

La razón del flujo de entrada y salida están dados por las siguientes expresiones.

$$Q_{ent} = \int_0^L \int_0^{h_{max}} u|_{x=0} dy dz \quad (B-13a)$$

$$Q_{sal} = \int_0^L \int_0^{h_{max}} u|_{x=2\pi} dy dz \quad (B-13b)$$

donde  $u$  es la velocidad del flujo en la dirección del deslizamiento y es una función del gradiente de presión y la viscosidad del fluido. La rapidez del flujo axial está dada por:

$$Q_{axial} = 2 \int_0^\pi \int_0^{h_{min}} w|_{z=0} R dy d\theta = 2 \int_0^\pi \int_0^{h_{min}} w|_{z=L} R dy d\theta \quad (B-14)$$

donde  $w$  indica la velocidad del flujo en la dirección axial. El flujo de salida es simétrico y se puede determinar en cualquier extremo de la chumacera ( $z=0$  ó  $z=L$ ) por lo tanto, el flujo total deberá de ser el doble del flujo de un extremo.

## B.2 Condiciones de Frontera

Las condiciones de frontera para una chumacera, expuesta a la atmósfera en los extremos  $z=0$  y  $z=L$ , y con película del fluido sin considerar la cavitación son:

$$\begin{aligned} p(\theta, 0) &= p(\theta, L) = p_a \\ p(0, z) &= p(2\pi, z) = p_0 \end{aligned} \quad (\text{B-15})$$

donde  $p_a$  es la presión atmosférica y  $p_0$  es la presión de inyección a la chumacera. La presión clásica de inyección es un poco mayor a la presión atmosférica suficiente para mantener el flujo. A la fecha no se han obtenido soluciones analíticas de la ecuación de Reynolds en una forma funcional, con condiciones de frontera reales tales como (B-15), excepto para el caso especial de pequeñas excentricidades. Existen factores adicionales como la cavitación del fluido que se incluye en modelos reales y que hacen aún más difícil una solución analítica. Se han obtenido soluciones útiles empleando dos aproximaciones exitosas.

1. La simplificación de la ecuación de Reynolds para casos especiales de interés práctico, tal que se puedan obtener soluciones analíticas.
2. La reformulación de la ecuación en forma de diferencias finitas ó elementos finitos para una solución numérica.

La primera aproximación ha dado soluciones para dos casos especialmente notables: (a) chumaceras infinitamente largas y (b) chumaceras infinitamente cortas.

Para el caso de chumaceras infinitamente largas  $L \gg D$ , Sommerfeld en 1904 resolvió la ecuación de Reynolds para el campo de presión y la capacidad de carga de una chumacera hidrodinámica con lubricación completa sin considerar la cavitación. Este caso es de especial interés porque fue la primer solución analítica de una chumacera hidrodinámica basada en la ecuación de Reynolds. En la práctica, una lubricación hidrodinámica completa en la chumacera se mantiene siempre que, al menos, una de las siguientes dos condiciones se satisfagan.

- a. Que la presión de inyección  $p_o$  hacia la chumacera sea muy alta para mantener presiones positivas alrededor de la chumacera y así prevenir la cavitación.
- b. Que la carga de la chumacera sea ligera. En este caso, la presión mínima está arriba del valor crítico de cavitación.

Sommerfeld asumió un campo de presión periódico alrededor de la chumacera. Es decir, la presión es la misma en  $\theta = 0$  y  $\theta = 2\pi$ .

$$p(\theta = 0) = p(\theta = 2\pi) \quad (\text{B-16})$$

Claramente, los resultados que predicen las condiciones de Sommerfeld son censurables, principalmente porque la chumacera se asume libre de cavitación y existe sustentación del rotor con presiones negativas en la sección divergente del claro. Una solución que desprecia completamente las presiones negativas se conoce como la solución con condiciones de frontera *Half-Sommerfeld* ó *Gümbel*.

$$p(\theta = 0) = p(\theta = \pi) \quad (\text{B-17})$$

Las condiciones de frontera de Sommerfeld y de Gümbel tienen dos defectos: La condición de Sommerfeld desprecia completamente la cavitación y la condición de Gümbel viola el principio de la continuidad del flujo en  $\theta = \pi$ . Aunque las soluciones de Sommerfeld no estaban disponibles para Reynolds en 1886, él estaba aparentemente consciente de los problemas asociados con las condiciones de frontera y sugirió que la presión debería de tender a cero en forma suave a medida que se aproxima a la región de cavitación  $\theta = \theta_{cav}$ .

$$p = \frac{\partial p}{\partial \theta} = 0 \text{ en } \theta = \theta_{cav} \quad (\text{B-18})$$

donde la localización del ángulo de cavitación  $\theta_{cav}$  no se conoce. No fue sino hasta 1932 que Herbert Swift y W. Stieber que en forma independiente obtuvieron las mismas conclusiones. Swift probó que la condición  $p = \partial p / \partial \theta = 0$  satisface tanto el principio de la continuidad como el principio del mínimo potencial de

energía. Esta condición de frontera ha ganado amplia aceptación en chumaceras hidrodinámicas con cargas estacionarias.

### B.3 Propiedades dinámicas del lubricante en las chumaceras

El comportamiento de un rotor está fuertemente influenciado por las características de sus soportes. Las fuerzas generadas sobre el muñón por la película del lubricante de la chumacera son funciones no-lineales de la posición y la velocidad del centro del eje. Así para calcular las velocidades críticas y las amplitudes de vibración del rotor y para examinar su estabilidad contra vibraciones auto-excitadas, es esencial el conocimiento de la respuesta que la película del lubricante de la chumacera añade a los desplazamientos y velocidades del muñón.

Si los desplazamientos y velocidades dinámicas del muñón son pequeños entonces las fuerzas de la película del lubricante se pueden linealizar alrededor de su posición de equilibrio estático, pero aun así con esta aproximación la película del lubricante no se puede simular por un simple sistema elástico-disipativo. Existen términos acoplados (Ver la ecuación 1-19) de rigidez y amortiguamiento que se necesitan para describir la relación entre el incremento de las fuerzas de la película del lubricante y los desplazamientos y velocidades que los causan.

$$\begin{pmatrix} dF_x \\ dF_y \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} k_{xx} & k_{xy} \\ k_{yx} & k_{yy} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} c_{xx} & c_{xy} \\ c_{yx} & c_{yy} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} \quad (\text{B-19})$$

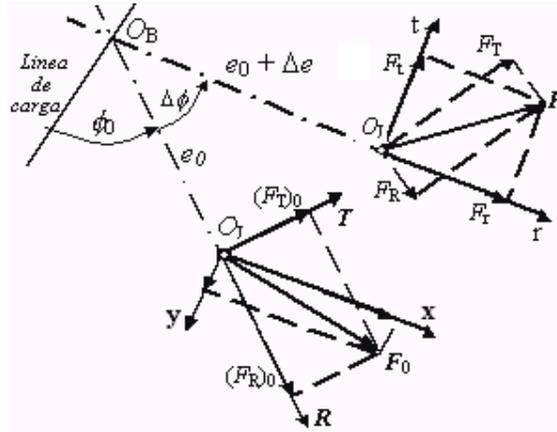


Figura B.4 Descomposición de fuerzas en chumaceras hidrodinámicas

Ahora bien, si existe una pequeña fuerza de desbalance en el muñón, este describirá una órbita alrededor de la posición de equilibrio estático  $(e_0, \phi_0)$ . Un punto genérico sobre la órbita ocupará en un instante en particular la posición  $O_J$  y en este punto la excentricidad será  $e = e_0 + \Delta e$  y el ángulo de actitud será  $\phi = \phi_0 + \Delta \phi$  y el muñón poseerá las velocidades instantáneas  $\dot{e}$  y  $e\dot{\phi}$ . Ver figura 1.4. Las fuerzas instantáneas del lubricante tendrán componentes  $F_r$  y  $F_t$  relativas a las coordenadas instantáneas radial y tangencial  $r$  y  $t$ , respectivamente. Las fuerzas instantáneas se pueden referir al sistema de coordenadas fijo  $(R, T)$  por medio de la siguiente transformación de coordenadas.

$$\begin{pmatrix} F_R \\ F_T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \Delta \phi & -\sin \Delta \phi \\ \sin \Delta \phi & \cos \Delta \phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_r \\ F_t \end{pmatrix}$$

Para pequeñas oscilaciones se puede escribir la relación de transformación de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} F_R &= F_r - \Delta \phi F_t \\ F_T &= F_t + \Delta \phi F_r \end{aligned} \tag{B-20}$$

El objetivo es evaluar el incremento de las componentes de estas fuerzas sobre sus valores de equilibrio a partir de la posición de equilibrio.

$$\begin{aligned}\Delta F_R &= F_R - (F_R)_0 \\ \Delta F_T &= F_T - (F_T)_0\end{aligned}\quad (\text{B-21})$$

El incremento de fuerza se puede evaluar sustituyendo (1-20) en (1-21) para obtener:

$$\begin{aligned}\Delta F_R &= F_r - (F_R)_0 - \Delta\phi F_t \\ \Delta F_T &= F_t - (F_T)_0 + \Delta\phi F_r\end{aligned}\quad (\text{B-22})$$

Las funciones escalares  $F_r$  y  $F_t$  se pueden desarrollar en series de Taylor de primer orden alrededor de su posición de equilibrio como sigue:

$$\begin{aligned}F_r &= (F_R)_0 + \left(\frac{\partial F_R}{\partial e}\right)_0 de + \left(\frac{\partial F_R}{\partial \phi}\right)_0 d\phi + \left(\frac{\partial F_R}{\partial \dot{e}}\right)_0 d\dot{e} + \left(\frac{\partial F_R}{\partial \dot{\phi}}\right)_0 d\dot{\phi} \\ F_t &= (F_T)_0 + \left(\frac{\partial F_T}{\partial e}\right)_0 de + \left(\frac{\partial F_T}{\partial \phi}\right)_0 d\phi + \left(\frac{\partial F_T}{\partial \dot{e}}\right)_0 d\dot{e} + \left(\frac{\partial F_T}{\partial \dot{\phi}}\right)_0 d\dot{\phi}\end{aligned}\quad (\text{B-23})$$

Todas las derivadas deben de ser evaluadas alrededor de la posición de equilibrio. Sustituyendo las expresiones (1-23) en las ecuaciones (1-22) y despreciando los términos de alto orden obtenemos:

$$\begin{pmatrix} dF_R \\ dF_T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_R}{\partial \varepsilon} & \frac{\partial F_R}{\partial \phi} - F_T \\ \frac{\partial F_T}{\partial \varepsilon} & \frac{\partial F_T}{\partial \phi} + F_R \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d\varepsilon \\ d\phi \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{\partial F_R}{\partial \dot{\varepsilon}} & \frac{\partial F_R}{\partial \dot{\phi}} \\ \frac{\partial F_T}{\partial \dot{\varepsilon}} & \frac{\partial F_T}{\partial \dot{\phi}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d\dot{\varepsilon} \\ d\dot{\phi} \end{pmatrix}\quad (\text{B-24})$$

Las matrices del lado izquierdo del sistema de ecuaciones (1-24) indican las expresiones para los coeficientes de rigidez y de amortiguamiento. A continuación se escriben.

$$\mathbf{k} = \begin{pmatrix} k_{RR} & k_{RT} \\ k_{TR} & k_{TT} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_R}{\partial \varepsilon} & \frac{\partial F_R}{\partial \phi} - F_T \\ \frac{\partial F_T}{\partial \varepsilon} & \frac{\partial F_T}{\partial \phi} + F_R \end{pmatrix} \quad (\text{B-25a})$$

$$\mathbf{c} = \begin{pmatrix} c_{RR} & c_{RT} \\ c_{TR} & c_{TT} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_R}{\partial \dot{\varepsilon}} & \frac{\partial F_R}{\partial \dot{\phi}} \\ \frac{\partial F_T}{\partial \dot{\varepsilon}} & \frac{\partial F_T}{\partial \dot{\phi}} \end{pmatrix} \quad (\text{B-25b})$$

#### B.4 Teoría de chumaceras Infinitamente cortas

El término *chumaceras infinitamente cortas* se refiere a una chumacera de longitud corta L, en comparación a el diámetro, D, ( $L \ll D$ ). Las chumaceras cortas son ampliamente usadas y operan exitosamente en diversas máquinas, particularmente en máquinas automotrices. Aunque la capacidad de carga, por unidad de longitud, de una chumacera corta es menor que para una chumacera larga, esta tiene las siguientes ventajas importantes:

1. Comparándola con chumaceras largas, una chumacera corta presenta mejor capacidad de transferencia de calor, debido a una circulación más rápida del lubricante a través del claro de la chumacera. La velocidad del flujo mejora el enfriamiento debido a que el lubricante que es calentado por el esfuerzo cortante viscoso es reemplazado continuamente. El sobrecalentamiento es una de las causas principales de falla en chumaceras. Por consiguiente, la temperatura de operación es una consideración importante en el diseño de chumaceras.
2. Una chumacera corta es menos sensible al desalineamiento. Es obvio que una chumacera corta reduce el riesgo de daño entre el muñón y el borde de la chumacera como resultado del desalineamiento.
3. Las partículas por desgaste abrasivo y el polvo se llevan al exterior a través del aceite con más facilidad en chumaceras cortas, por lo que el desgaste se reduce.

4. Las chumaceras cortas requieren de menos espacio y dan como resultado diseños más compactos. La tendencia en el diseño de máquinas es reducir su tamaño. Las chumaceras hidrodinámicas cortas compiten con elementos de rodamiento los cuales son usualmente cortas a su diámetro.

El análisis de chumaceras hidrodinámicas infinitamente cortas ha sido presentado por Dubois y Orvirk. Se asume que el gradiente de presión alrededor de la chumacera (en la dirección tangencial  $x$ ) es pequeño y se puede despreciar cuando se compara con los gradientes de presión en la dirección axial (dirección  $z$ ) o bien:

$$\frac{dp}{dz} \gg \frac{dp}{dx}$$

Omitiendo  $\frac{dp}{dx}$  en comparación a  $\frac{dp}{dz}$  es posible simplificar la ecuación de Reynolds. Esto permite una solución analítica para el campo de presión del fluido, la capacidad de carga y la obtención de los coeficientes rotodinámicos dados por (1-25a,b). La expresión analítica de la capacidad de carga se puede aplicar convenientemente en el diseño de chumaceras, así como, los coeficientes rotodinámicos en análisis dinámicos para determinar la respuesta del sistema y la velocidad umbral de estabilidad.

#### B.4.1 Análisis de chumaceras cortas

El punto de partida en el análisis es la ecuación de Reynolds y que a continuación se repite.

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{h^3}{\mu} \frac{\partial p}{\partial \theta} \right) + R^2 \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{h^3}{\mu} \frac{\partial p}{\partial z} \right) = \frac{12R^2}{C^3} \left[ C\dot{\varepsilon} \cos \theta + C\varepsilon(\dot{\phi} - \omega/2) \sin \theta \right] \quad (\text{B-2})$$

Para una mayor generalidad de los resultados, es necesario escribir ésta ecuación en forma adimensional, para esto introducimos los siguientes parámetros.

$$z = \frac{L}{2} \bar{z}, \quad p = \mu N \left( \frac{R}{C} \right)^2 \bar{p}, \quad \omega = 2\pi N \quad (\text{B-26})$$

Al sustituir (1-26) en la ecuación (1-2) obtenemos la ecuación adimensional de Reynolds.

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \left( h^3 \frac{\partial \bar{p}}{\partial \theta} \right) + \left( \frac{D}{L} \right)^2 \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \left( h^3 \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{z}} \right) = 24\pi \frac{\dot{\varepsilon}}{\omega} \cos \theta - 12\pi \varepsilon \left( 1 - \frac{2\dot{\phi}}{\omega} \right) \sin \theta \quad (\text{B-27})$$

Basados en la suposición de que el gradiente de presión en la dirección  $x = R\theta$  se puede despreciar, o bien, que la longitud  $L$  de la chumacera es mucho menor que su diámetro  $D$ ,  $L \ll D$ , la ecuación de Reynolds se puede escribir como:

$$\left( \frac{D}{L} \right)^2 \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \left( h^3 \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{z}} \right) = 24\pi \frac{\dot{\varepsilon}}{\omega} \cos \theta - 12\pi \varepsilon \left( 1 - \frac{2\dot{\phi}}{\omega} \right) \sin \theta \quad (\text{B-28})$$

con las condiciones de frontera:  $\bar{p} = \bar{p}_a$  en  $\bar{z} = \pm 1$

Integrando dos veces la ecuación simplificada de Reynolds obtenemos:

$$\left( \frac{D}{L} \right)^2 \bar{p} = \frac{1}{h^3} \left[ 24\pi \frac{\dot{\varepsilon}}{\omega} \cos \theta - 12\pi \varepsilon \left( 1 - \frac{2\dot{\phi}}{\omega} \right) \sin \theta \right] \frac{\bar{z}^2}{2} + C_1 \bar{z} + C_2 \quad (\text{B-29})$$

Donde  $C_1$  y  $C_2$  se determinan de las condiciones de frontera, evaluando obtenemos la expresión del campo de presión para chumaceras cortas.

$$\left( \frac{D}{L} \right)^2 \bar{p} = 6\pi \frac{(1 - \bar{z}^2)}{h^3} \left[ \varepsilon \left( 1 - \frac{2\dot{\phi}}{\omega} \right) \sin \theta - 2 \frac{\dot{\varepsilon}}{\omega} \cos \theta \right] + \bar{p}_a \left( \frac{D}{L} \right)^2 \quad (\text{B-30})$$

Bajo condiciones de carga dinámica es necesario emplear otra expresión de presión adimensional  $\hat{p}$  que se relaciona con  $\bar{p}$  por medio de:

$$\hat{p} = \frac{\bar{p}}{(1 - 2\dot{\phi}/\omega)} \quad (\text{B-31})$$

donde  $\hat{p}$  es la presión dinámica adimensional y  $\bar{p}$  es la presión estática adimensional. Si sustituimos (1-31) en (1-30) entonces el campo de presión adquiere la siguiente forma:

$$\left(\frac{D}{L}\right)^2 \hat{p} = 6\pi \frac{(1-\bar{z}^2)}{h^3} \left[ \varepsilon \sin \theta - 2 \frac{\dot{\varepsilon}/\omega}{(1-2\dot{\phi}/\omega)} \cos \theta \right] \quad (\text{B-32})$$

La figura B.5 muestra el campo de presión de estado estable para un valor de  $\varepsilon = 0.5$  y una razón de  $L/D=1/8$ . Se puede observar que este campo de presión es simétrico en la dirección axial, el cual no sería el caso en chumaceras reales en donde siempre hay presencia de desalineamiento del muñón en la chumacera.

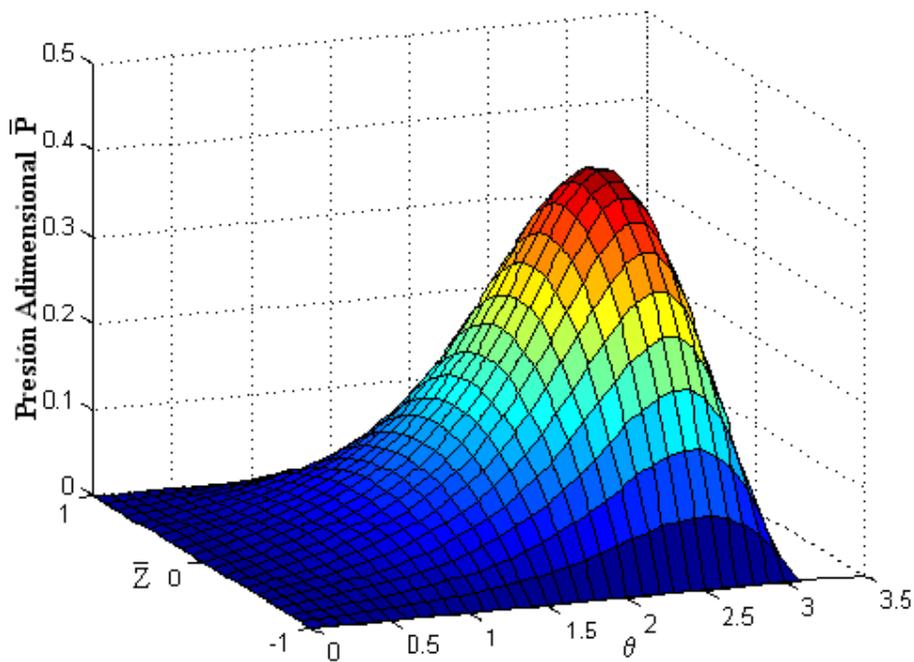


Figura B.5 Campo de presión de estado estable para chumacera corta con  $\varepsilon = 0.5$

Una vez conocido el campo de presión se procede a calcular las fuerzas componentes. Sustituyendo (B-31) en (B-7a, b) las fuerzas estarán dadas como sigue.

$$\bar{F}_R = \frac{F_R}{\mu NLD(R/C)^2} = \left(1 - 2\frac{\dot{\phi}}{\omega}\right) \left[ \frac{1}{4} \int_{-1}^1 \int_0^{\theta_2} \hat{p} \cos \theta d\theta dz \right]$$

$$\bar{F}_T = \frac{F_T}{\mu NLD(R/C)^2} = \left(1 - 2\dot{\phi}/\omega\right) \left[ \frac{1}{4} \int_{-1}^1 \int_0^{\theta_2} \hat{p} \sin \theta d\theta dz \right]$$

Empleando la siguiente notación

$$f_R = \frac{1}{4} \int_{-1}^1 \int_0^{\theta_2} \hat{p} \cos \theta d\theta d\bar{z} \quad (\text{B-33a})$$

$$f_T = \frac{1}{4} \int_{-1}^1 \int_0^{\theta_2} \hat{p} \sin \theta d\theta d\bar{z} \quad (\text{B-33b})$$

Sustituyendo la ecuación (B-32) que describe el campo de presión para chumaceras cortas en las ecuaciones (B-33a) y (B-33b) y evaluando para el caso cavitado  $\theta_2 = \pi$  obtenemos las componentes radial y tangencial de la fuerza.

$$\left(\frac{D}{L}\right)^2 f_R = -\frac{4\pi\varepsilon^2}{(1-\varepsilon^2)^2} - \frac{2\pi^2(1+2\varepsilon^2)}{(1-\varepsilon^2)^{5/2}} \frac{\dot{\varepsilon}/\omega}{(1-2\dot{\phi}/\omega)} \quad (\text{B-34a})$$

$$\left(\frac{D}{L}\right)^2 f_T = \frac{\varepsilon\pi^2}{(1-\varepsilon^2)^{3/2}} + \frac{8\pi\varepsilon}{(1-\varepsilon^2)^2} \frac{\dot{\varepsilon}/\omega}{(1-2\dot{\phi}/\omega)} \quad (\text{B-34b})$$

Para condiciones de estado estable  $\dot{\varepsilon} = 0$  y  $\dot{\phi} = 0$ , el número de Sommerfeld y el ángulo de actitud se pueden calcular utilizando (B-34a) y (B-34b) evaluadas de acuerdo con las expresiones (B-9) y (B-10).

$$\left(\frac{L}{D}\right)^2 S = \frac{(1-\varepsilon^2)^2}{\varepsilon\pi\sqrt{16\varepsilon^2 + \pi^2(1-\varepsilon^2)}} \quad (\text{B-35})$$

$$\phi = \tan^{-1} \left( \frac{\pi \sqrt{1 - \varepsilon^2}}{4\varepsilon} \right) \quad (\text{B-36})$$

Para obtener los coeficientes rotodinámicos evaluamos las derivadas parciales de (B-24) alrededor de la posición de equilibrio. Las componentes radial y tangencial de la fuerza son funciones de la excentricidad el ángulo de actitud y sus velocidades.

$$\bar{F}_R = (1 - 2\dot{\phi}/\omega) f_R \left[ \varepsilon, \phi, \frac{\dot{\varepsilon}/\omega}{(1 - 2\dot{\phi}/\omega)} \right]$$

$$\bar{F}_T = (1 - 2\dot{\phi}/\omega) f_T \left[ \varepsilon, \phi, \frac{\dot{\varepsilon}/\omega}{(1 - 2\dot{\phi}/\omega)} \right]$$

Las derivadas parciales de las componentes de la fuerza se evalúan de la siguiente manera.

$$\frac{\partial \bar{F}_R}{\partial \varepsilon} = (1 - 2\dot{\phi}/\omega) \frac{\partial f_R}{\partial \varepsilon}$$

$$\frac{\partial \bar{F}_R}{\partial \phi} = (1 - 2\dot{\phi}/\omega) \frac{\partial f_R}{\partial \phi}$$

$$\frac{\partial \bar{F}_R}{\partial (\dot{\varepsilon}/\omega)} = (1 - 2\dot{\phi}/\omega) \frac{\partial f_R}{\partial \left( \frac{\dot{\varepsilon}/\omega}{(1 - 2\dot{\phi}/\omega)} \right)} \frac{1}{(1 - 2\dot{\phi}/\omega)}$$

$$\frac{\partial \bar{F}_R}{\partial (\dot{\phi}/\omega)} = -2f_R + (1 - 2\dot{\phi}/\omega) \frac{\partial f_R}{\partial \left( \frac{\dot{\varepsilon}/\omega}{(1 - 2\dot{\phi}/\omega)} \right)} \frac{2\dot{\varepsilon}/\omega}{(1 - 2\dot{\phi}/\omega)}$$

Haciendo uso de las expresiones precedentes y evaluando alrededor de la posición de equilibrio  $\varepsilon = \varepsilon_0$ ,  $\phi = \phi_0$ ,  $\dot{\varepsilon} = 0$  y  $\dot{\phi} = 0$  se puede escribir el sistema de ecuaciones (B-24) en forma adimensional.

$$\begin{pmatrix} d\bar{F}_R \\ d\bar{F}_T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_R}{\partial \varepsilon} & \frac{\partial f_R}{\varepsilon \partial \phi} - \frac{f_T}{\varepsilon} \\ \frac{\partial f_T}{\partial \varepsilon} & \frac{\partial f_T}{\varepsilon \partial \phi} + \frac{f_R}{\varepsilon} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d\varepsilon \\ \varepsilon d\phi \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{\partial f_R}{\partial \dot{\varepsilon}/\omega} & -\frac{2f_R}{\varepsilon} \\ \frac{\partial f_T}{\partial \dot{\varepsilon}/\omega} & -\frac{2f_T}{\varepsilon} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d(\dot{\varepsilon}/\omega) \\ \varepsilon d(\dot{\phi}/\omega) \end{pmatrix} \quad (\text{B-37})$$

La primer matriz de la derecha describe la respuesta de la película del lubricante a los desplazamientos del muñón y se conoce como *matriz de rigidez adimensional*,  $\bar{k}$ . La segunda matriz describe la respuesta a las velocidades  $\dot{\varepsilon}/\omega$  y  $\varepsilon d(\dot{\phi}/\omega)$  y se conoce como la *matriz de amortiguamiento adimensional*,  $\bar{c}$ .

$$\bar{k} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_R}{\partial \varepsilon} & \frac{\partial f_R}{\varepsilon \partial \phi} - \frac{f_T}{\varepsilon} \\ \frac{\partial f_T}{\partial \varepsilon} & \frac{\partial f_T}{\varepsilon \partial \phi} + \frac{f_R}{\varepsilon} \end{pmatrix} \quad (\text{B-38})$$

$$\bar{c} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_R}{\partial \dot{\varepsilon}/\omega} & -\frac{2f_R}{\varepsilon} \\ \frac{\partial f_T}{\partial \dot{\varepsilon}/\omega} & -\frac{2f_T}{\varepsilon} \end{pmatrix}$$

(B-39)

Hay que recordar que todas las fuerzas y sus derivadas deben de ser evaluadas alrededor de su posición de equilibrio. Las matrices adimensionales  $\bar{k}$  y  $\bar{c}$  se relacionan con las matrices de rigidez y de amortiguamiento  $k$  y  $c$ , respectivamente, por medio de:

$$\bar{k} = \frac{C}{\mu NLD(R/C)^2} k, \quad \text{y} \quad \bar{c} = \frac{\omega C}{\mu NLD(R/C)^2} c$$

Evaluando las componentes  $f_R$  y  $f_T$  para el caso de chumaceras cortas dadas por (1-34a) y (1-34b) por medio de (B-38) y (B-39) obtenemos los coeficientes rotodinámicos en el sistema radial tangencial **R-T**.

Tabla B.1 Coeficientes rotodinámicos para chumaceras cortas en el sistema **R-T**

$\bar{k}_{RR} = -\frac{8\pi\varepsilon(1+\varepsilon^2)}{(1-\varepsilon^2)^3} \left(\frac{L}{D}\right)^2$	$\bar{c}_{RR} = -\frac{2\pi^2(1+2\varepsilon^2)}{(1-\varepsilon^2)^{5/2}} \left(\frac{L}{D}\right)^2$
$\bar{k}_{RT} = -\frac{\pi^2}{(1-\varepsilon^2)^{3/2}} \left(\frac{L}{D}\right)^2$	$\bar{c}_{RT} = \frac{8\pi\varepsilon}{(1-\varepsilon^2)^2} \left(\frac{L}{D}\right)^2$
$\bar{k}_{TR} = \frac{\pi^2(1+2\varepsilon^2)}{(1-\varepsilon^2)^{5/2}} \left(\frac{L}{D}\right)^2$	$\bar{c}_{TR} = \frac{8\pi\varepsilon}{(1-\varepsilon^2)^2} \left(\frac{L}{D}\right)^2$
$\bar{k}_{TT} = -\frac{4\pi\varepsilon}{(1-\varepsilon^2)^2} \left(\frac{L}{D}\right)^2$	$\bar{c}_{TT} = -\frac{2\pi^2}{(1-\varepsilon^2)^{5/2}} \left(\frac{L}{D}\right)^2$

Los elementos de  $k$  y  $c$  tienen dimensiones de fuerza/longitud y fuerza/velocidad, respectivamente. Por lo que, es conveniente expresar los coeficientes rotodinámicos en la siguiente forma adimensional.

$$\bar{\bar{k}} = \frac{C}{W} k \quad \text{y} \quad \bar{\bar{c}} = \frac{\omega C}{W} c$$

donde  $W$  es la carga externa sobre el muñón. Es fácil obtener los coeficientes adimensionales  $\bar{\bar{k}}$  y  $\bar{\bar{c}}$  a través de los coeficientes  $\bar{k}$  y  $\bar{c}$ , respectivamente, multiplicando estos últimos por el número de Sommerfeld.

$$\bar{\bar{k}} = S\bar{k} \quad \text{y} \quad \bar{\bar{c}} = S\bar{c} \quad (\text{B-40})$$

Además es conveniente expresar los coeficientes rotodinámicos en el sistema **X-Y** que se relaciona con el sistema **R-T** como se muestra en la figura B.6.

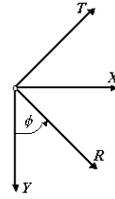


Figura B.6 Relación entre coordenadas **X-Y** y **R-T**.

La transformación entre **R-T** y **X-Y** está dada por la siguiente matriz Q.

$$\begin{Bmatrix} Y \\ X \end{Bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \cos \phi & -\sin \phi \\ \sin \phi & \cos \phi \end{bmatrix}}_Q \begin{Bmatrix} R \\ T \end{Bmatrix}$$

Por lo tanto, los coeficientes adimensionales se pueden calcular en el sistema **X-Y** a través de la matriz Q realizando las siguientes operaciones matriciales.

$$\tilde{\mathbf{k}} = -Q\bar{\mathbf{k}}Q^T \quad \text{y} \quad \tilde{\mathbf{c}} = -Q\bar{\mathbf{c}}Q^T \tag{B-41}$$

Realizando las operaciones indicadas por las ecuaciones (B-40) y (B-41) obtenemos los coeficientes rotodinámicos en el sistema de coordenadas **X-Y** y adimensionales de la forma  $\tilde{\mathbf{k}} = \frac{C}{W}\mathbf{k}$  y  $\tilde{\mathbf{c}} = \frac{\omega C}{W}\mathbf{c}$  y que se presentan en la tabla 1-2 [3,9].

Tabla B.2 Coeficientes rotodinámicos para chumaceras cortas en el sistema **X-Y**

$\tilde{k}_{xx} = \frac{4[2\pi^2 + (16 - \pi^2)\varepsilon^2]}{[\pi^2 + (16 - \pi^2)\varepsilon^2]^{3/2}}$	$\tilde{c}_{xx} = \frac{2\pi(1 - \varepsilon^2)^{1/2}[\pi^2 + 2(\pi^2 - 8)\varepsilon^2]}{\varepsilon[\pi^2 + (16 - \pi^2)\varepsilon^2]^{3/2}}$
$\tilde{k}_{xy} = \frac{\pi[-\pi^2 + 2\pi^2\varepsilon^2 + (16 - \pi^2)\varepsilon^4]}{\varepsilon\sqrt{1 - \varepsilon^2}[\pi^2 + (16 - \pi^2)\varepsilon^2]^{3/2}}$	$\tilde{c}_{xy} = \frac{8[\pi^2 + 2(\pi^2 - 8)\varepsilon^2]}{[\pi^2 + (16 - \pi^2)\varepsilon^2]^{3/2}}$
$\tilde{k}_{yx} = \frac{\pi[\pi^2 + (32 + \pi^2)\varepsilon^2 + 2(16 - \pi^2)\varepsilon^4]}{\varepsilon\sqrt{1 - \varepsilon^2}[\pi^2 + (16 - \pi^2)\varepsilon^2]^{3/2}}$	$\tilde{c}_{yx} = \frac{8[\pi^2 + 2(\pi^2 - 8)\varepsilon^2]}{[\pi^2 + (16 - \pi^2)\varepsilon^2]^{3/2}}$
$\tilde{k}_{yy} = \frac{4[\pi^2 + (32 + \pi^2)\varepsilon^2 + 2(16 - \pi^2)\varepsilon^4]}{(1 - \varepsilon^2)[\pi^2 + (16 - \pi^2)\varepsilon^2]^{3/2}}$	$\tilde{c}_{yy} = \frac{2\pi[\pi^2 + 2(24 - \pi^2)\varepsilon^2 + \pi^2\varepsilon^4]}{\varepsilon\sqrt{1 - \varepsilon^2}[\pi^2 + (16 - \pi^2)\varepsilon^2]^{3/2}}$

## B.5 Teoría de chumaceras infinitamente largas

En el análisis presentado hasta este momento, se ha asumido que la chumacera es “corta” ó bien que  $\partial p / \partial z \gg \partial p / \partial x$ . Es posible asumir lo contrario y hacer el análisis de una *chumacera infinitamente larga* donde  $\partial p / \partial z \ll \partial p / \partial x$ . La aplicación de longitud infinitamente larga al análisis de chumaceras requiere de una matemática más complicada que la utilizada en la aproximación para chumaceras cortas. La aproximación de chumaceras largas es valida para razones de la longitud al diámetro (L/D) mayor que 2, aproximadamente.

### B.5.1 Análisis de chumaceras largas con condiciones de frontera de Sommerfeld

Si la longitud de la chumacera es mucho mayor que su diámetro ( $L \gg D$ ) entonces se puede despreciar el segundo término del lado izquierdo de la ecuación adimensional de Reynolds descrita por la ecuación (1-27) y escribir como a continuación.

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \left( h^3 \frac{\partial \bar{p}}{\partial \theta} \right) = 24\pi \frac{\dot{\varepsilon}}{\omega} \cos \theta - 12\pi \varepsilon \left( 1 - \frac{2\dot{\phi}}{\omega} \right) \sin \theta \quad (\text{B-42})$$

con condiciones de frontera:

$$p(\theta = 0) = p(\theta = 2\pi) = p_0$$

Integrando una vez la ecuación (B-42) obtenemos la expresión para  $d\bar{p}/d\theta$ .

$$d\bar{p} = 24\pi \frac{\dot{\varepsilon}}{\omega} \frac{\sin \theta}{h^3} d\theta + 12\pi \varepsilon \left( 1 - 2\frac{\dot{\phi}}{\omega} \right) \frac{\cos \theta d\theta}{h^3} + \frac{A d\theta}{h^3} \quad (\text{B-43})$$

Evaluando (B-43) con la condición de frontera  $p(\theta = 0) = p_0$  obtenemos:

$$\int_{\bar{p}_0}^{\bar{p}} d\bar{p} = 24\pi \frac{\dot{\varepsilon}}{\omega} \int_0^\theta \frac{\sin \theta d\theta}{h^3} + 12\pi \varepsilon \left( 1 - 2\frac{\dot{\phi}}{\omega} \right) \int_0^\theta \frac{\cos \theta d\theta}{h^3} + A \int_0^\theta \frac{d\theta}{h^3}$$

o bien

$$\bar{p} = 24\pi \frac{\dot{\varepsilon}}{\omega} \int_0^\theta \frac{\sin \theta d\theta}{h^3} + 12\pi\varepsilon(1 - 2\dot{\phi}/\omega) \int_0^\theta \frac{\cos \theta d\theta}{h^3} + A \int_0^\theta \frac{d\theta}{h^3} + \bar{p}_0 \quad (\text{B-44})$$

Utilizando la segunda condición de frontera  $p(\theta = 2\pi) = p_0$  podemos evaluar la constante  $A$  de la ecuación (B-44).

$$\bar{p}_0 = 24\pi \frac{\dot{\varepsilon}}{\omega} \int_0^{2\pi} \frac{\sin \theta d\theta}{h^3} + 12\pi\varepsilon(1 - 2\dot{\phi}/\omega) \int_0^{2\pi} \frac{\cos \theta d\theta}{h^3} + A \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{h^3} + \bar{p}_0 \quad (\text{B-45})$$

Despejando de la ecuación (B-45) la constante  $A$ .

$$A = \frac{-24\pi \frac{\dot{\varepsilon}}{\omega} \int_0^{2\pi} \frac{\sin \theta d\theta}{h^3} - 12\pi\varepsilon(1 - 2\frac{\dot{\phi}}{\omega}) \int_0^{2\pi} \frac{\cos \theta d\theta}{h^3}}{\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{h^3}} \quad (\text{1-46})$$

El procedimiento para evaluar las integrales del tipo:

$$\int \frac{d\theta}{(1 + \varepsilon \cos \theta)^n}$$

es introduciendo una nueva variable  $\gamma = \tan(\phi/2)$ . Con este procedimiento la presión se puede evaluar, pero la expresión no es particularmente útil, ya que es difícil para obtener las componentes de la carga realizando futuras integraciones.

Sommerfeld en 1904 venció hábilmente estas dificultades usando la sustitución.

$$1 + \varepsilon \cos \theta = \frac{1 - \varepsilon^2}{1 - \varepsilon \cos \gamma}$$

Esta relación se conoce como *la sustitución de Sommerfeld* y  $\gamma$  se conoce como *la variable de Sommerfeld*. De la sustitución de Sommerfeld se pueden obtener las siguientes relaciones.

$$\sin \theta = \frac{(1 - \varepsilon^2)^{1/2} \sin \gamma}{1 - \varepsilon \cos \gamma}$$

$$\cos \theta = \frac{\cos \gamma - \varepsilon}{1 - \varepsilon \cos \gamma}$$

$$\sin \gamma = \frac{(1 - \varepsilon^2)^{1/2} \sin \theta}{1 + \varepsilon \cos \theta}$$

$$\cos \gamma = \frac{\varepsilon + \cos \theta}{1 + \varepsilon \cos \theta}$$

$$d\theta = \frac{(1 - \varepsilon^2)^{1/2} d\gamma}{1 - \varepsilon \cos \gamma}$$

Haciendo uso de las sustituciones de Sommerfeld evaluamos la constante  $A$  de (B-46).

$$A = (1 - 2\dot{\phi}/\omega) \frac{36\pi\varepsilon^2}{2 + \varepsilon^2} \quad (\text{B-47})$$

Sustituimos  $A$  en las expresiones (B-43) y (B-44) y obtenemos la distribución del campo de presión.

$$\bar{p} = 24\pi \frac{\dot{\varepsilon}}{\omega} \int_0^\theta \frac{\sin \theta d\theta}{h^3} + 12\pi\varepsilon(1 - 2\dot{\phi}/\omega) \left[ \int_0^\theta \frac{\cos \theta d\theta}{h^3} + \frac{3\varepsilon}{(2 + \varepsilon^2)} \int_0^\theta \frac{d\theta}{h^3} \right] \quad (\text{B-48})$$

$$y \frac{d\bar{p}}{d\theta} = 24\pi \frac{\sin \theta}{h^3} \dot{\varepsilon}/\omega + 12\pi \left[ \frac{\varepsilon \cos \theta}{h^3} + \frac{3\varepsilon^2}{(2 + \varepsilon^2)h^3} \right] (1 - 2\dot{\phi}/\omega)$$

$$\text{o bien: } \frac{d\bar{p}}{d\theta} = 24\pi \frac{\sin \theta}{h^3} \dot{\varepsilon}/\omega + 12\pi \left[ \frac{h - B}{h^3} \right] (1 - 2\dot{\phi}/\omega); \text{ donde } B = \frac{2(1 - \varepsilon^2)}{(2 + \varepsilon^2)}$$

Esta última expresión de  $d\bar{p}/d\theta$  es útil cuando se requieren evaluar las componentes de la fuerza de presión utilizando la integración por partes.

Evaluando las integrales de (1-48) se obtiene la expresión del campo de presión con condiciones de frontera de Sommerfeld.

$$\bar{p} = \frac{12\pi\dot{\epsilon}/\omega}{\epsilon} \left[ \frac{1}{(1 + \epsilon \cos \theta)^2} - \frac{1}{(1 - \epsilon)^2} \right] + \frac{12\pi\epsilon \sin \theta (2 + \epsilon \cos \theta)}{(2 + \epsilon^2)(1 + \epsilon \cos \theta)^2} (1 - 2\dot{\phi}/\omega) \quad (\text{B-49})$$

y la presión dinámica  $\hat{p}$  está dada por:

$$\hat{p} = \frac{12\pi\epsilon \sin \theta (2 + \epsilon \cos \theta)}{(2 + \epsilon^2)(1 + \epsilon \cos \theta)^2} + 12\pi \frac{1}{\epsilon} \left[ \frac{1}{(1 + \epsilon \cos \theta)^2} - \frac{1}{(1 + \epsilon)^2} \right] \frac{\dot{\epsilon}/\omega}{(1 - 2\dot{\phi}/\omega)} \quad (\text{B-50})$$

La figura B.7 muestra el perfil del campo de presión de estado estable considerando las condiciones de frontera de Sommerfeld.

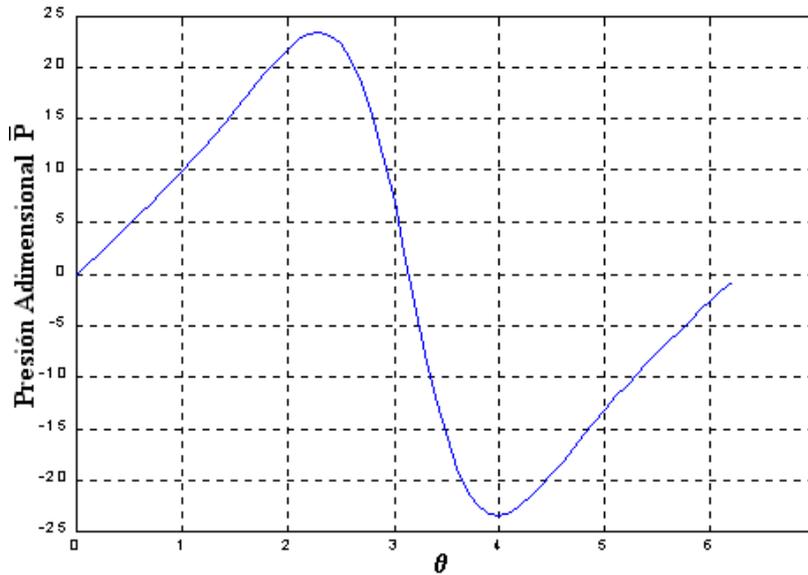


Figura B.7 Perfil del campo de presión de estado estable para chumaceras largas con condiciones de frontera de SOMMERFELD para  $\epsilon = 0.5$

Las condiciones de frontera de Sommerfeld conducen a un campo de presión que da presiones negativas en la parte divergente lo que raramente se encuentra en chumaceras reales. Considerar esta parte negativa para la evaluación de las componentes de la fuerza reduce la capacidad de carga de la chumacera. Este campo de presión no es posible en situaciones reales. Por tal motivo, para evaluar las componentes de la fuerza, solo se consideran valores positivos del campo de presión. Una vez obtenido el campo de presión en estado dinámico, podemos calcular las componentes radial y tangencial de la fuerza de presión utilizando (B-33a) y (B-33b). Evaluando para el caso cavitado  $\theta_2 = \pi$  obtenemos.

$$f_R = \frac{1}{2} \int_0^\pi \left[ \frac{12\pi\varepsilon \sin\theta(2 + \varepsilon \cos\theta)}{(2 + \varepsilon^2)(1 + \varepsilon \cos\theta)^2} + 12\pi \frac{1}{\varepsilon} \left( \frac{1}{h^2} - \frac{1}{(1 + \varepsilon)^2} \right) \frac{\dot{\varepsilon}/\omega}{(1 - 2\dot{\phi}/\omega)} \right] \cos\theta d\theta \quad (\text{B-51a})$$

$$f_T = \frac{1}{2} \int_0^\pi \left[ \frac{12\pi\varepsilon \sin\theta(2 + \varepsilon \cos\theta)}{(2 + \varepsilon^2)(1 + \varepsilon \cos\theta)^2} + 12\pi \frac{1}{\varepsilon} \left( \frac{1}{h^2} - \frac{1}{(1 + \varepsilon)^2} \right) \frac{\dot{\varepsilon}/\omega}{(1 - 2\dot{\phi}/\omega)} \right] \sin\theta d\theta \quad (\text{B-51b})$$

Estas integrales se evalúan haciendo uso de las sustituciones de Sommerfeld. Las componentes radial y tangencial de la fuerza son las siguientes.

$$f_R = -\frac{12\pi\varepsilon^2}{(1 - \varepsilon^2)(2 + \varepsilon^2)} - \frac{6\pi^2}{(1 - \varepsilon^2)^{3/2}} \frac{\dot{\varepsilon}/\omega}{(1 - 2\dot{\phi}/\omega)} \quad (\text{B-52a})$$

$$f_T = \frac{6\pi^2\varepsilon}{(1 - \varepsilon^2)^{1/2}(2 + \varepsilon^2)} + \frac{24\pi}{(1 - \varepsilon^2)(1 + \varepsilon)} \frac{\dot{\varepsilon}/\omega}{(1 - 2\dot{\phi}/\omega)} \quad (\text{B-52b})$$

Evaluando para el caso de estado estable podemos expresar el número de Sommerfeld y el ángulo de actitud utilizando de las componentes encontradas. Nuevamente utilizando (B-9) y (B-10) podemos encontrar estos parámetros.

$$S = \frac{(2 + \varepsilon^2)(1 - \varepsilon^2)}{6\pi\varepsilon\sqrt{4\varepsilon^2 + \pi^2(1 - \varepsilon^2)}} \quad (\text{B-53})$$

$$\phi = \tan^{-1} \frac{\pi\sqrt{1 - \varepsilon^2}}{2\varepsilon} \quad (\text{B-54})$$

También es importante conocer los coeficientes rotodinámicos. Utilizando las ecuaciones (B-38) y (B-39) se pueden evaluar para el sistema de coordenadas **R-T**

coeficientes adimensionales [8] de la forma:  $\bar{k} = \frac{C}{\mu NLD(R/C)^2} k$ , y

$$\bar{c} = \frac{\omega C}{\mu NLD(R/C)^2} c.$$

Tabla B.3 Coeficientes rotodinámicos para chumaceras largas con condiciones de Sommerfeld en el sistema **R-T**.

$\bar{k}_{RR} = -\frac{24\pi\varepsilon(2 + \varepsilon^4)}{(1 - \varepsilon^2)^2(2 + \varepsilon^2)^2}$	$\bar{c}_{RR} = -\frac{6\pi^2}{(1 - \varepsilon^2)^{3/2}}$
$\bar{k}_{RT} = -\frac{6\pi^2}{\sqrt{1 - \varepsilon^2}(2 + \varepsilon^2)}$	$\bar{c}_{RT} = \frac{24\pi\varepsilon}{(1 - \varepsilon^2)(2 + \varepsilon^2)}$
$\bar{k}_{TR} = -\frac{6\pi^2(-2 + \varepsilon^2 - 2\varepsilon^4)}{(1 - \varepsilon^2)^{3/2}(2 + \varepsilon^2)^2}$	$\bar{c}_{TR} = \frac{24\pi}{(1 - \varepsilon)(1 + \varepsilon)^2}$
$\bar{k}_{TT} = -\frac{12\pi\varepsilon}{(1 - \varepsilon^2)(2 + \varepsilon^2)}$	$\bar{c}_{TT} = -\frac{12\pi^2}{\sqrt{1 - \varepsilon^2}(2 + \varepsilon^2)}$

Expresamos estos coeficientes en el sistema **X-Y** y adimensionales de la forma:

$$\tilde{k} = \frac{C}{W} k \text{ y } \tilde{c} = \frac{\omega C}{W} c \text{ [9].}$$

Tabla B.4 Coeficientes rotodinámicos para chumaceras largas con condiciones de frontera de Sommerfeld expresados en el sistema **X-Y**.

$\tilde{k}_{xx} = \frac{2[2\pi^2 + (4 - \pi^2)\varepsilon^2]}{[\pi^2 + (4 - \pi^2)\varepsilon^2]^{3/2}}$	$\tilde{c}_{xx} = \frac{\pi[\pi^2 - (8 - \pi^2)\varepsilon]\sqrt{1 - \varepsilon^2}(2 + \varepsilon^2)}{\varepsilon(1 + \varepsilon)[\pi^2 + (4 - \pi^2)\varepsilon^2]^{3/2}}$
$\tilde{k}_{xy} = \frac{\pi[-\pi^2 + 2\pi^2\varepsilon^2 + (4 - \pi^2)\varepsilon^4]}{\varepsilon\sqrt{1 - \varepsilon^2}[\pi^2 + (4 - \pi^2)\varepsilon^2]^{3/2}}$	$\tilde{c}_{xy} = \frac{2[\pi^2 - (8 - \pi^2)\varepsilon](2 + \varepsilon^2)}{(1 + \varepsilon)[\pi^2 + (4 - \pi^2)\varepsilon^2]^{3/2}}$
$\tilde{k}_{yx} = \frac{\pi\sqrt{1 - \varepsilon^2}[2\pi^2 + (16 - 3\pi^2)\varepsilon^2 + 3\pi^2\varepsilon^4 + 2(4 - \pi^2)\varepsilon^6]}{\varepsilon(2 - \varepsilon^2 - \varepsilon^4)[\pi^2 + (4 - \pi^2)\varepsilon^2]^{3/2}}$	$\tilde{c}_{yx} = \frac{2[4\pi^2 - 4\pi^2\varepsilon + 2\pi^2\varepsilon^2 - (8 - \pi^2)\varepsilon^3]}{\varepsilon[\pi^2 + (4 - \pi^2)\varepsilon^2]^{3/2}}$
$\tilde{k}_{yy} = \frac{2[2\pi^2 + (16 - 3\pi^2)\varepsilon^2 + 3\pi^2\varepsilon^4 + 2(4 - \pi^2)\varepsilon^6]}{(2 - \varepsilon^2 - \varepsilon^4)[\pi^2 + (4 - \pi^2)\varepsilon^2]^{3/2}}$	$\tilde{c}_{yy} = \frac{2\pi[\pi^2 + 8\varepsilon - 2\pi^2\varepsilon^2 + 4\varepsilon^3 - (6 - \pi^2)\varepsilon^4]}{\varepsilon\sqrt{1 - \varepsilon^2}[\pi^2 + (4 - \pi^2)\varepsilon^2]^{3/2}}$

### B.5.2 Análisis de chumaceras largas con condiciones de frontera de Gumbel

El análisis de chumaceras largas con condiciones de Gumbel es similar al análisis del punto anterior. La ecuación de Reynolds para el caso de chumaceras infinitamente largas debe de resolverse ahora con las condiciones de frontera  $p(\theta = 0) = p(\theta = \pi) = p_0$ .

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \left( h^3 \frac{\partial \bar{p}}{\partial \theta} \right) = 24\pi \frac{\dot{\varepsilon}}{\omega} \cos \theta - 12\pi\varepsilon \left( 1 - \frac{2\dot{\phi}}{\omega} \right) \sin \theta \quad (\text{B-55})$$

con condiciones de frontera  $p(\theta = 0) = p(\theta = \pi) = p_0$

Integrar una vez la ecuación (B-55) y evaluar con la condición de frontera  $p(\theta = 0) = p_0$  conduce a las ecuaciones (B-43) y (B-44) del punto anterior. La nueva condición de frontera  $p(\theta = \pi) = p_0$  conduce a una constante  $A$  diferente a la obtenida con condiciones de frontera de Sommerfeld.

$$A = \frac{-24\pi \frac{\dot{\varepsilon}}{\omega} \int_0^\pi \frac{\sin \theta d\theta}{h^3} - 12\pi\varepsilon(1 - 2\frac{\dot{\phi}}{\omega}) \int_0^\pi \frac{\cos \theta d\theta}{h^3}}{\int_0^\pi \frac{d\theta}{h^3}}$$

Utilizando el cambio de variables de Sommerfeld obtenemos para la constante A el siguiente valor.

$$A = (1 - 2\dot{\phi}/\omega) \frac{36\pi\varepsilon^2}{2 + \varepsilon^2} - \dot{\varepsilon}/\omega \frac{96(1 - \varepsilon^2)^{1/2}}{(2 + \varepsilon^2)} \quad (\text{B-56})$$

Por lo que el campo de presión con condiciones de frontera de Gumbel esta dado por la siguiente expresión.

$$\bar{p} = 12\pi\varepsilon(1 - 2\frac{\dot{\phi}}{\omega}) \left[ \int_0^\theta \frac{\cos \theta d\theta}{h^3} + \frac{3\varepsilon}{(2 + \varepsilon^2)} \int_0^\theta \frac{d\theta}{h^3} \right] + \frac{\dot{\varepsilon}}{\omega} \left[ 24\pi \int_0^\theta \frac{\sin \theta d\theta}{h^3} - \frac{96(1 - \varepsilon^2)^{1/2}}{(2 + \varepsilon^2)} \int_0^\theta \frac{d\theta}{h^3} \right] \quad (\text{B-57})$$

$$\frac{d\bar{p}}{d\theta} = 24\pi \frac{\sin \theta}{h^3} \frac{\dot{\varepsilon}}{\omega} + 12\pi \left[ \frac{\varepsilon \cos \theta}{h^3} + \frac{3\varepsilon^2}{(2 + \varepsilon^2)h^3} \right] (1 - 2\frac{\dot{\phi}}{\omega}) - \frac{96(1 - \varepsilon^2)^{1/2}}{(2 + \varepsilon^2)h^3} \frac{\dot{\varepsilon}}{\omega}$$

Para evaluar la ecuación del campo de presión (B-57) es necesario hacer uso de la sustitución de Sommerfeld. El campo de presión con condiciones de Gumbel es como sigue.

$$\hat{p} = \frac{12\pi\varepsilon \sin \theta (2 + \varepsilon \cos \theta)}{(2 + \varepsilon^2)(1 + \varepsilon \cos \theta)^2} + \left[ \frac{12\pi}{\varepsilon} \left( \frac{1}{h^2} - \frac{1}{(1 + \varepsilon)^2} \right) - \frac{96(1 - \varepsilon^2)^{1/2}}{(2 + \varepsilon^2)} \int_0^\theta \frac{d\theta}{h^3} \right] \frac{\dot{\varepsilon}/\omega}{(1 - 2\dot{\phi}/\omega)} \quad (\text{B-58})$$

Las ecuación (B-58) solo difiere de (B-50) en el término dinámico del campo de presión. Por lo tanto, el campo de presión de estado estable es el mismo, pero con condiciones de frontera de Gumbel solo se grafica en el rango de  $0 \leq \bar{P} \leq \pi$  en donde los valores de la presión son positivos. Las fuerzas de presión de los primeros términos de  $\hat{p}$  de (B-58) ya fueron calculadas con (B-50), solo falta sumar a estas fuerzas la contribución del siguiente término.

$$\hat{p}_1 = -\frac{96(1-\varepsilon^2)^{1/2}}{(2+\varepsilon^2)} \int_0^\theta \frac{d\theta}{h^3} \frac{\dot{\varepsilon}/\omega}{(1-2\dot{\phi}/\omega)} \quad (\text{B-59})$$

Para obtener las componentes  $f_R$  y  $f_T$  de la fuerza de presión utilizamos la integración por partes y las sustituciones de Sommerfeld.

$$f_{R1} = \frac{1}{2} \int_0^\pi \hat{p}_1 \cos \theta d\theta = \frac{1}{2} (\hat{p}_1 \sin \theta \Big|_0^\pi - \frac{1}{2} \int_0^\pi \sin \theta \frac{d\hat{p}_1}{d\theta} d\theta$$

$$f_{T1} = \frac{1}{2} \int_0^\pi \hat{p}_1 \sin \theta d\theta = -\frac{1}{2} (\hat{p}_1 \cos \theta \Big|_0^\pi + \frac{1}{2} \int_0^\pi \cos \theta \frac{d\hat{p}_1}{d\theta} d\theta$$

donde 
$$\frac{d\hat{p}_1}{d\theta} = -\frac{96(1-\varepsilon^2)^{1/2}}{(2+\varepsilon^2)h^3} \frac{\dot{\varepsilon}/\omega}{(1-2\dot{\phi}/\omega)}$$

y 
$$\hat{p}_1 = -\frac{96(1-\varepsilon^2)^{1/2}}{(2+\varepsilon^2)} \int_0^\theta \frac{d\theta}{h^3} \frac{\dot{\varepsilon}/\omega}{(1-2\dot{\phi}/\omega)}$$

Por lo tanto:

$$f_{R1} = \frac{1}{2} \left( \frac{96(1-\varepsilon^2)^{1/2}}{(2+\varepsilon^2)} \right) \int_0^\pi \frac{\sin \theta}{h^3} d\theta \frac{\dot{\varepsilon}/\omega}{(1-2\dot{\phi}/\omega)}$$

$$f_{T1} = \left\{ \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{96(1-\varepsilon^2)^{1/2}}{(2+\varepsilon^2)} \int_0^\pi \frac{d\theta}{h^3} \right) \cos \theta \right] \Big|_0^\pi - \frac{1}{2} \frac{96(1-\varepsilon^2)^{1/2}}{(2+\varepsilon^2)} \int_0^\pi \frac{\cos \theta d\theta}{h^3} \right\} \frac{\dot{\varepsilon}/\omega}{(1-2\dot{\phi}/\omega)}$$

Evaluando las integrales de  $f_{R1}$  y  $f_{T1}$  encontramos la contribución a la fuerza de la presión que se debe al término (1-59).

$$f_{R1} = \frac{96}{(2+\varepsilon^2)(1-\varepsilon^2)^{3/2}} \frac{\dot{\varepsilon}/\omega}{1-2\dot{\phi}/\omega} \quad (\text{B-60a})$$

$$f_{T1} = \frac{24\pi(-2 - \varepsilon^2 + 3\varepsilon)}{(2 + \varepsilon^2)(1 - \varepsilon^2)^2} \frac{\dot{\varepsilon}/\omega}{(1 - 2\dot{\phi}/\omega)}$$

(B-60b)

Por lo tanto, las componentes radial y tangencial de la fuerza del campo de presión con condiciones de frontera de Gumbel se obtienen sumando a (1-52a) y (1-52b) las componentes (1-60a) y (1-60b) que corresponden al término de presión adicional (1-59). Las componentes  $f_R$  y  $f_T$  para el campo de presión con condiciones de Gumbel son:

$$f_R = -\frac{12\pi\varepsilon^2}{(2 + \varepsilon^2)(1 - \varepsilon^2)} - \frac{12\pi}{(1 - \varepsilon^2)^{3/2}} \left[ \frac{\pi}{2} - \frac{8}{\pi(2 + \varepsilon^2)} \right] \frac{\dot{\varepsilon}/\omega}{(1 - 2\dot{\phi}/\omega)} \quad (\text{B-61a})$$

$$f_T = \frac{6\pi^2\varepsilon}{(1 - \varepsilon^2)^{1/2}(2 + \varepsilon^2)} + \frac{24\pi\varepsilon}{(2 + \varepsilon^2)(1 - \varepsilon^2)} \frac{\dot{\varepsilon}/\omega}{(1 - 2\dot{\phi}/\omega)} \quad (\text{B-61b})$$

Considerando condiciones de estado estable obtenemos el número de Sommerfeld y el ángulo de actitud.

$$S = \frac{(2 + \varepsilon^2)(1 - \varepsilon^2)}{6\pi\varepsilon\sqrt{4\varepsilon^2 + \pi^2(1 - \varepsilon^2)}} \quad (\text{B-62})$$

$$\phi = \tan^{-1} \frac{\pi\sqrt{1 - \varepsilon^2}}{2\varepsilon} \quad (\text{B-63})$$

Los coeficientes rotodinámicos en el sistema de coordenadas **R-T** y

adimensionales de la forma:  $\bar{k} = \frac{C}{\mu NLD(R/C)^2} k$  y  $\bar{c} = \frac{\omega C}{\mu NLD(R/C)^2} c$  se

muestran en la tabla B-5.

Tabla B.5 Coeficientes rotodinámicos para chumaceras largas con condiciones de Gumbel en el sistema **R-T**.

$\bar{k}_{RR} = -\frac{24\pi\varepsilon(2+\varepsilon^4)}{(1-\varepsilon^2)^2(2+\varepsilon^2)^2}$	$\bar{c}_{RR} = -\frac{12\pi}{(1-\varepsilon^2)^{3/2}}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{8}{\pi(2+\varepsilon^2)}\right)$
$\bar{k}_{RT} = -\frac{6\pi^2}{\sqrt{1-\varepsilon^2}(2+\varepsilon^2)}$	$\bar{c}_{RT} = \frac{24\pi\varepsilon}{(1-\varepsilon^2)(2+\varepsilon^2)}$
$\bar{k}_{TR} = -\frac{6\pi^2(-2+\varepsilon^2-2\varepsilon^4)}{(1-\varepsilon^2)^{3/2}(2+\varepsilon^2)^2}$	$\bar{c}_{TR} = \frac{24\pi\varepsilon}{(1-\varepsilon^2)(2+\varepsilon^2)}$
$\bar{k}_{TT} = -\frac{12\pi\varepsilon}{(1-\varepsilon^2)(2+\varepsilon^2)}$	$\bar{c}_{TT} = -\frac{12\pi^2}{\sqrt{1-\varepsilon^2}(2+\varepsilon^2)}$

Los coeficientes rotodinámicos en el sistema **X-Y** y adimensionales de la forma

$\tilde{k} = \frac{C}{W}k$  y  $\tilde{c} = \frac{\omega C}{W}c$  se presentan en la tabla B-6.

Tabla B.6 Coeficientes rotodinámicos para chumaceras largas con condiciones de Gumbel en el sistema **X-Y**.

$\tilde{k}_{xx} = \frac{2[2\pi^2 + (4-\pi^2)\varepsilon^2]}{[\pi^2 + (4-\pi^2)\varepsilon^2]^{3/2}}$	$\tilde{c}_{xx} = \frac{\pi(-8+\pi^2)\sqrt{1-\varepsilon^2}(2+\varepsilon^2)}{\varepsilon[\pi^2 + (4-\pi^2)\varepsilon^2]^{3/2}}$
$\tilde{k}_{xy} = \frac{\pi[-\pi^2 + 2\pi^2\varepsilon^2 + (4-\pi^2)\varepsilon^4]}{\varepsilon\sqrt{1-\varepsilon^2}[\pi^2 + (4-\pi^2)\varepsilon^2]^{3/2}}$	$\tilde{c}_{xy} = \frac{2(-8+\pi^2)(2+\varepsilon^2)}{[\pi^2 + (4-\pi^2)\varepsilon^2]^{3/2}}$
$\tilde{k}_{yx} = \frac{\pi\sqrt{1-\varepsilon^2}[2\pi^2 + (16-3\pi^2)\varepsilon^2 + 3\pi^2\varepsilon^4 + 2(4-\pi^2)\varepsilon^6]}{\varepsilon(2-\varepsilon^2-\varepsilon^4)[\pi^2 + (4-\pi^2)\varepsilon^2]^{3/2}}$	$\tilde{c}_{yx} = \frac{2(-8+\pi^2)(2+\varepsilon^2)}{[\pi^2 + (4-\pi^2)\varepsilon^2]^{3/2}}$
$\tilde{k}_{yy} = \frac{2[2\pi^2 + (16-3\pi^2)\varepsilon^2 + 3\pi^2\varepsilon^4 + 2(4-\pi^2)\varepsilon^6]}{(2-\varepsilon^2-\varepsilon^4)[\pi^2 + (4-\pi^2)\varepsilon^2]^{3/2}}$	$\tilde{c}_{yy} = \frac{2[\pi^4 - 2(16-6\pi^2+\pi^4)\varepsilon^2 + \pi^2(-6+\pi^2)\varepsilon^4]}{\varepsilon\sqrt{1-\varepsilon^2}[\pi^2 + (4-\pi^2)\varepsilon^2]^{3/2}}$

Las siguientes Figuras corresponden a los coeficientes rotodinámicos directos y acoplados de chumaceras cortas y de chumaceras largas.

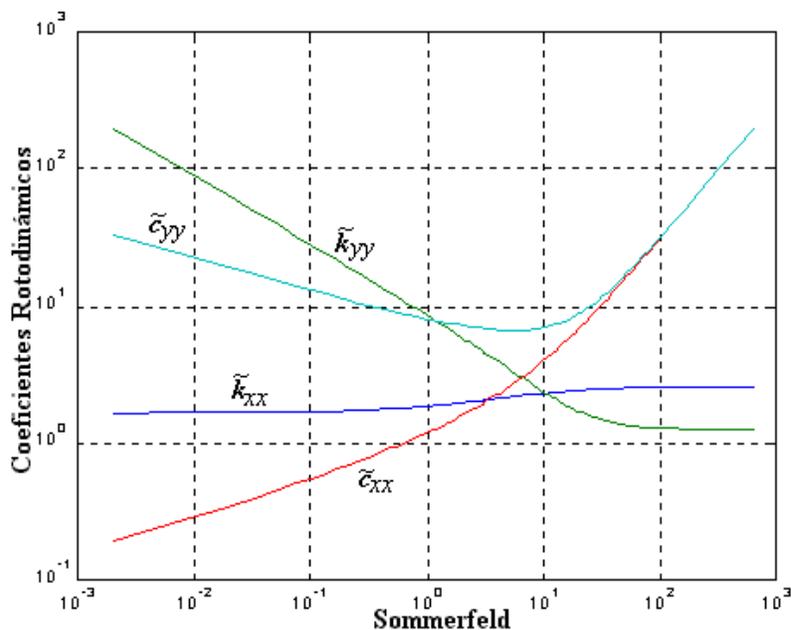


Figura B.8 Coeficientes rotodinámicos directos para chumaceras cortas

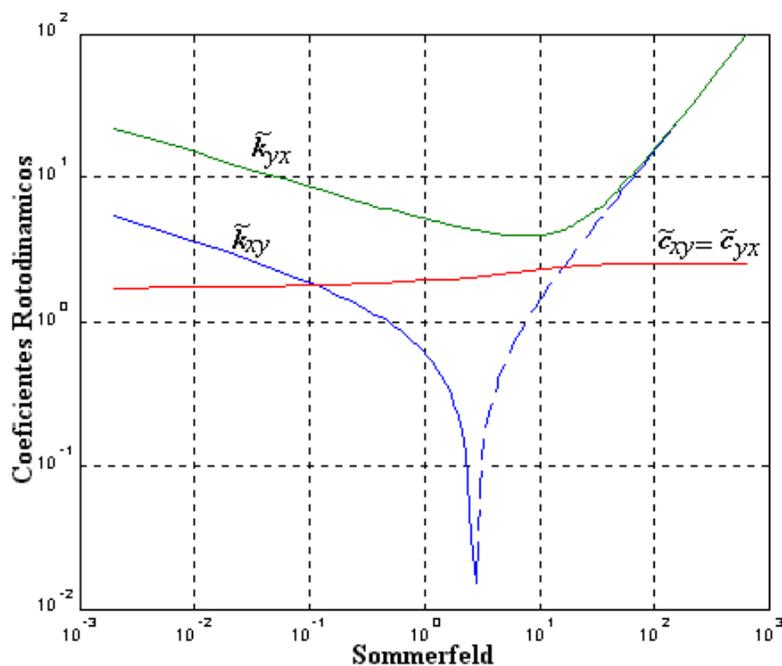


Figura B.9 Coeficientes rotodinámicos acoplados para chumaceras cortas

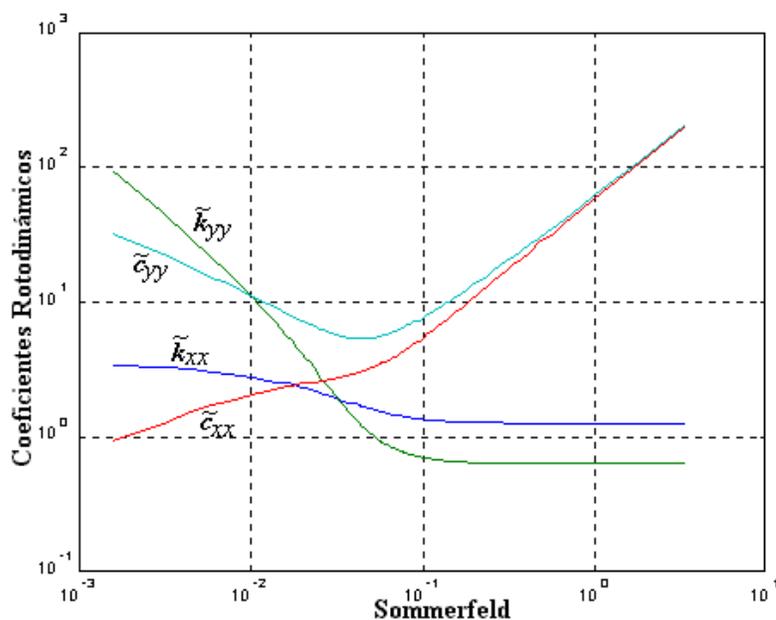


Figura B.10 Coeficientes rotodinámicos directos para chumaceras largas en donde el campo de presión se evaluó con condiciones de frontera de SOMMERFELD

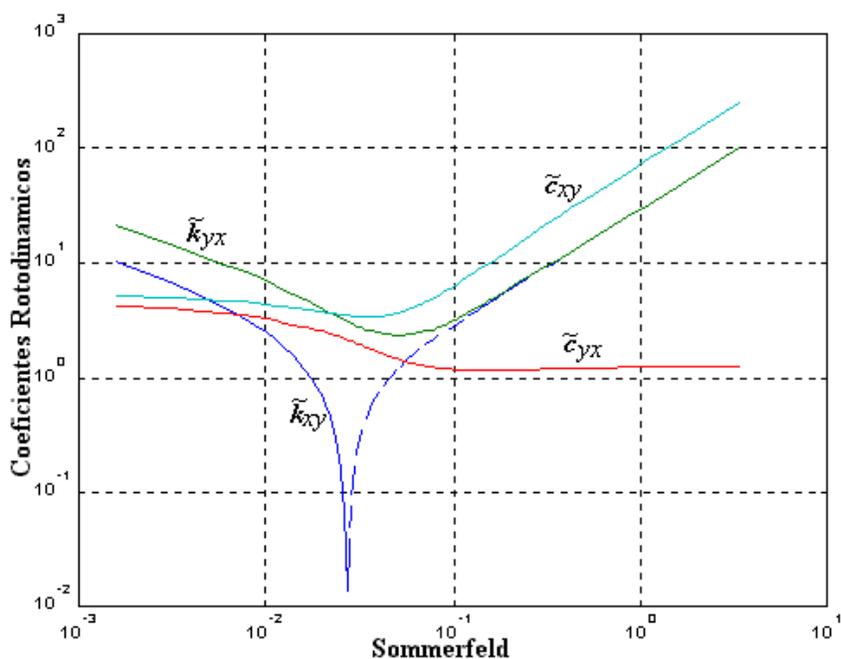


Figura B.11 Coeficientes rotodinámicos acoplados para chumaceras largas en donde el campo de presión se evaluó con condiciones de frontera de SOMMERFELD

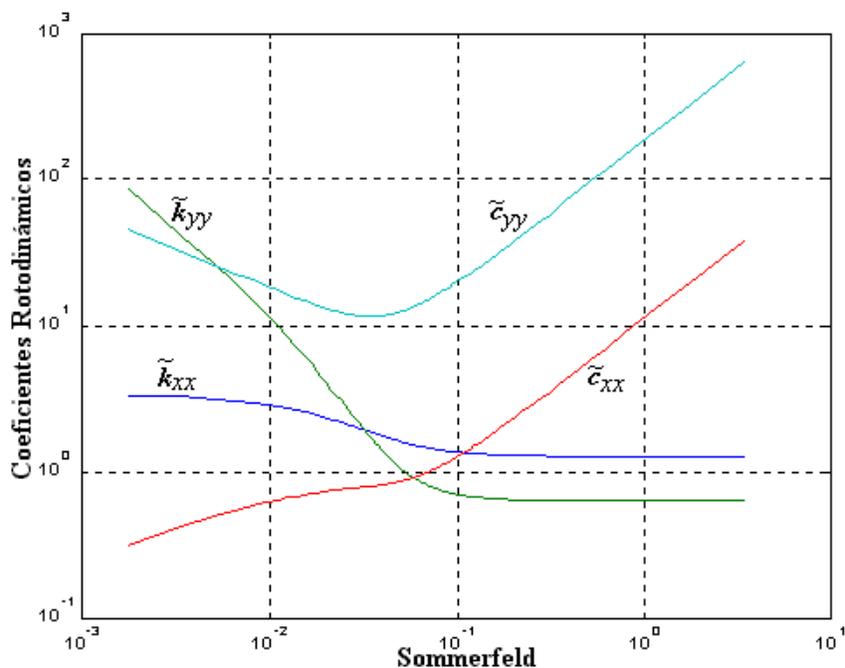


Figura B.12 Coeficientes rotodinámicos directos para chumaceras largas en donde el campo de presión se evaluó con condiciones de frontera de GÜMBEL

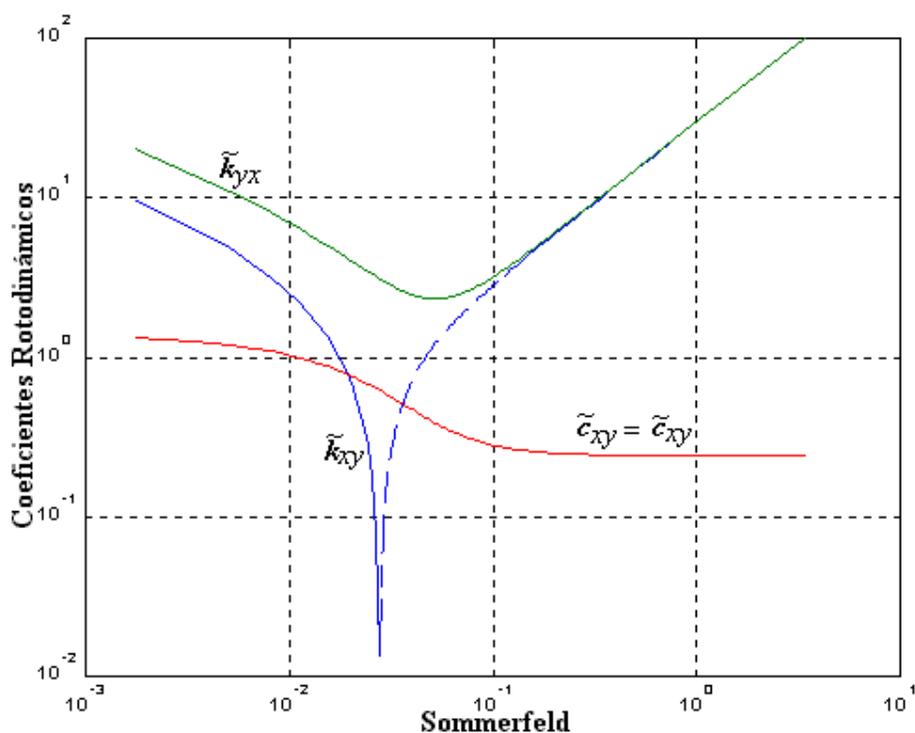


Figura B.13 Coeficientes rotodinámicos acoplados para chumaceras largas en donde el campo de presión se evaluó con condiciones de frontera de GÜMBEL

También se puede decir que evaluar el campo de presión con condiciones de frontera de Gumbel no es del todo correcto en lo que se refiere al cálculo de los coeficientes de amortiguamiento directos  $c_{xx}$  y  $c_{yy}$ . Ya que, es una característica que a medida que la excentricidad se hace pequeña estos coeficientes tienden a hacerse iguales ( $c_{xx} = c_{yy}$ ) como se aprecia en las figuras B.8 y B.10. Cuando el campo de presión se evalúa con condiciones de frontera de Gumbel los coeficientes  $c_{xx}$  y  $c_{yy}$  son diferentes ( $c_{xx} \neq c_{yy}$ ) para todo el rango de excentricidades como se puede apreciar en la figura 1.12. Por lo tanto, las condiciones de frontera de Gumbel no conducen a resultados correctos en lo referente a los coeficientes de amortiguamiento directos.

Por lo tanto, podemos decir que ni las condiciones de frontera de Sommerfeld ni las condiciones de frontera de Gumbel proporcionan resultados satisfactorios cuando se calculan los coeficientes de amortiguamiento. Este problema se resuelve si se consideran la región y la frontera de cavitación empleando las condiciones de frontera de Reynolds ó Swift-Stieber, lo que analíticamente es complicado, pero factible numéricamente.

# Anexo C – Tabla de integrales para chumaceras hidrodinámicas

## A Table of the Journal-Bearing Integral

J. F. BOOKER<sup>1</sup>

A comprehensive list of recursion formulas is given for integrals of the type

$$\int \frac{\sin^l \theta \cos^m \theta \, d\theta}{(1 + \epsilon \cos \theta)^n}$$

### Introduction

The integral type

$$I_n^{lm} \equiv \int \frac{\sin^l \theta \cos^m \theta \, d\theta}{(1 + \epsilon \cos \theta)^n}$$

(particularly its archetype  $I_1^{00}$ ) has been treated in mathematical literature for some centuries.<sup>2</sup> Solutions have usually been obtained either by use of the standard substitution for rational trigonometric functions

$$\tan \theta/2 = \gamma \tag{1}$$

or by the special substitution(s)

$$\frac{1 - \epsilon^2}{1 + \epsilon \cos \theta} = \frac{1 - \epsilon \cos \gamma}{1 - \epsilon \cosh \gamma}, \quad \begin{matrix} \epsilon^2 < 1 \\ \epsilon^2 > 1 \end{matrix} \tag{2}$$

Such integrals play a central role from the beginning in the relatively short history of hydrodynamic lubrication theory. In his classic paper of 1886, O. Reynolds [2], apparently unable to find solutions in closed form, used instead trigonometric series convergent only for  $\epsilon < 0.5$ . Attacking Reynolds' journal-bearing problem shortly thereafter (1904), A. Sommerfeld [3] provided the closed-form solution which, along with (2), usually bears his name in lubrication literature.

This is the essence of the classic story as related in the original (1928) English language account by R. Boswall [4] and repeated without substantive change by the many subsequent histories. It remains enigmatic that Reynolds chose to use the series integration when British integral calculus texts [5, 6] of the time (1880) dealt with such integrals via substitution (1) in their introductory chapters. Another obscurity is that the "Sommerfeld Substitution" (2) does not seem to appear in Sommerfeld's original paper (although other possibly equivalent multiple substitutions are used, along with (1)). In any case, the substitution (2) probably did not originate with Sommerfeld, since a contemporary (1905) text on integration [7] treats both (1) and (2).

Although the problem of how to evaluate such integrals has thus been solved for some time, the algebraic complexity of *ad hoc* solution encourages the use of tabulated formulas. Since standard tables<sup>4</sup> seldom treat more than a handful of such integrals, most

workers in the field of lubrication accumulate personal lists<sup>5</sup> of solutions. Unfortunately, this approach has its limitations, since there are perhaps 100 permutations of the powers  $l, m, n$  which can easily arise—coupled with three or four common limits of integration. (For example, a single paper by the author [11] involves evaluation of 21 such integrals, each over four different limits.) Thus, even the largest tabulations seem always to lack the one integral needed at a particular moment.

The table presented herewith is an attempt to overcome these shortcomings by providing a comprehensive and systematic set of recursion rules from which specific formulas can be derived with a minimum of effort. No claim to originality is made; it is hoped only that the table may prove as useful to others as it has to the author in minimizing the time spent in the vastly unrewarding task of integral evaluation.

### Use of the Table

In this table indefinite integrals of the general family

$$I_n^{lm} \equiv \int \frac{\sin^l \theta \cos^m \theta \, d\theta}{(1 + \epsilon \cos \theta)^n}$$

are expressed in terms of two special subfamilies,  $I_n^{00}$  and  $I_n^{10}$  (which are respectively monotonic and periodic functions of  $\theta$ ). The formulas relating all other integrals to these two subfamilies are simply partial fraction identities. The formulas for  $I_n^{00}$  and  $I_n^{10}$  are thus the only ones involving integration *per se*, and of these the only "difficult" integral is  $I_1^{00}$  (for which two formulas are given, with separate ranges of definition). It should be emphasized that the difficulty is only one of interpreting awkward mathematical forms; the integrand of  $I_1^{00}$  is perfectly well behaved for  $\epsilon^2 < 1$ , as a sketch will show. In fact, it cannot be too strongly recommended that any interpretation be made in the light of such a sketch. As a further aid to interpretation,  $I_1^{00}$  is also given as a *definite* integral, evaluated over most of the common limits which occur in practice.

Following the usual notations, logarithmic functions are natural (Napierian), and inverse trigonometric functions are principal-valued.

Two examples illustrating the typical usage of the table follow:

**Example 1.** Find

$$\int \frac{\sin \theta \cos \theta \, d\theta}{(1 + \epsilon \cos \theta)^2} \equiv I_2^{11} + K, \quad 0 < \epsilon^2 < 1$$

Entering the table, we find successively

$$I_2^{11} = 1/\epsilon[-I_2^{10} + I_1^{10}]$$

$$I_2^{10} = \frac{1}{\epsilon(1 + \epsilon \cos \theta)}$$

$$I_1^{10} = -1/\epsilon \log(1 + \epsilon \cos \theta)$$

<sup>5</sup> The largest of these to be widely circulated is that by W. Gross [10].

<sup>6</sup> Although  $I_1^{00}$  can be expressed in a variety of ways, only the form obtained from substitution (2) is given here. Alternative forms obtained from substitution (1) can be found in most standard references. See for example H. Dwight [9] p. 105, no. 446.00, or B. Peirce and R. Foster [8] p. 44, no. 309.

<sup>1</sup> Assistant Professor of Mechanical Engineering, Sibley School of Mechanical Engineering, Cornell University, Ithaca, N. Y. Assoc. Mem. ASME.

<sup>2</sup> See the mathematical history by M. Cantor [1],<sup>3</sup>

<sup>3</sup> Numbers in brackets designate References at end of paper.

<sup>4</sup> See, for example, the tables by B. Peirce and R. Foster [8] or H. Dwight [9].

Contributed by the Lubrication Division of THE AMERICAN SOCIETY OF MECHANICAL ENGINEERS. Manuscript received at ASME Headquarters, January 21, 1965.

**Table of  $I_n^{lm}$**   $\equiv \int \frac{\sin^l \theta \cos^m \theta d\theta}{(1 + \epsilon \cos \theta)^n}$   $0 < \epsilon^2 < 1$   
 $l, m, n$  integers

**Indefinite Integrals** (constants of integration omitted)

$$I_n^{00} = \frac{1}{(n-1)(1-\epsilon^2)} \left[ \frac{-\epsilon \sin \theta}{(1 + \epsilon \cos \theta)^{n-1}} + (2n-3)I_{n-1}^{00} - (n-2)I_{n-2}^{00} \right], \quad n \neq 1$$

$$= \frac{\delta}{(1-\epsilon^2)^{1/2}} \cos^{-1} \left( \frac{\epsilon + \cos \theta}{1 + \epsilon \cos \theta} \right), \quad n = 1$$

where  $\delta = 1, \quad \sin \theta \geq 0$   
 $= -1, \quad \sin \theta \leq 0$

$$I_n^{01} = 1/\epsilon [-I_n^{00} + I_{n-1}^{00}]$$

$$I_n^{02} = 1/\epsilon^2 [I_n^{00} - 2I_{n-1}^{00} + I_{n-2}^{00}]$$

$$I_n^{03} = 1/\epsilon^3 [-I_n^{00} + 3I_{n-1}^{00} - 3I_{n-2}^{00} + I_{n-3}^{00}]$$

$$I_n^{10} = \frac{1}{(n-1)\epsilon(1 + \epsilon \cos \theta)^{n-1}}, \quad n \neq 1$$

$$= -1/\epsilon \log |1 + \epsilon \cos \theta|, \quad n = 1$$

$$I_n^{21} = 1/\epsilon [-I_n^{10} + I_{n-1}^{10}]$$

$$I_n^{32} = 1/\epsilon^2 [I_n^{10} - 2I_{n-1}^{10} + I_{n-2}^{10}]$$

$$I_n^{43} = 1/\epsilon^3 [-I_n^{10} + 3I_{n-1}^{10} - 3I_{n-2}^{10} + I_{n-3}^{10}]$$

$$I_n^{20} = 1/\epsilon^2 [-(1-\epsilon^2)I_n^{00} + 2I_{n-1}^{00} - I_{n-2}^{00}]$$

$$I_n^{31} = 1/\epsilon^3 [(1-\epsilon^2)I_n^{00} - (3-\epsilon^2)I_{n-1}^{00} + 3I_{n-2}^{00} - I_{n-3}^{00}]$$

$$I_n^{42} = 1/\epsilon^4 [-(1-\epsilon^2)I_n^{00} + 2(2-\epsilon^2)I_{n-1}^{00} - (6-\epsilon^2)I_{n-2}^{00} + 4I_{n-3}^{00} - I_{n-4}^{00}]$$

$$I_n^{53} = 1/\epsilon^5 [(1-\epsilon^2)I_n^{00} - (5-3\epsilon^2)I_{n-1}^{00} + (10-3\epsilon^2)I_{n-2}^{00} - (10-\epsilon^2)I_{n-3}^{00} + 5I_{n-4}^{00} - I_{n-5}^{00}]$$
  

$$I_n^{30} = 1/\epsilon^3 [-(1-\epsilon^2)I_n^{10} + 2I_{n-1}^{10} - I_{n-2}^{10}]$$

$$I_n^{41} = 1/\epsilon^4 [(1-\epsilon^2)I_n^{10} - (3-\epsilon^2)I_{n-1}^{10} + 3I_{n-2}^{10} - I_{n-3}^{10}]$$

$$I_n^{52} = 1/\epsilon^5 [-(1-\epsilon^2)I_n^{10} + 2(2-\epsilon^2)I_{n-1}^{10} - (6-\epsilon^2)I_{n-2}^{10} + 4I_{n-3}^{10} - I_{n-4}^{10}]$$

$$I_n^{63} = 1/\epsilon^6 [(1-\epsilon^2)I_n^{10} - (5-3\epsilon^2)I_{n-1}^{10} + (10-3\epsilon^2)I_{n-2}^{10} - (10-\epsilon^2)I_{n-3}^{10} + 5I_{n-4}^{10} - I_{n-5}^{10}]$$

**Definite Integrals**

$$[I_n^{00}]_0^{\pi/2} = \frac{\cos^{-1}(\epsilon)}{(1-\epsilon^2)^{1/2}} \quad [I_n^{00}]_0^{3\pi/2} = \frac{2\pi - \cos^{-1}(\epsilon)}{(1-\epsilon^2)^{1/2}} \quad [I_n^{00}]_{\theta_1}^{\theta_1+2\pi} = \frac{2\pi}{(1-\epsilon^2)^{1/2}}$$

$$[I_n^{00}]_0^\pi = \frac{\pi}{(1-\epsilon^2)^{1/2}} \quad [I_n^{00}]_0^{2\pi} = \frac{2\pi}{(1-\epsilon^2)^{1/2}} \quad [I_n^{00}]_{\theta_1}^{\theta_1+\pi} = \frac{\cos^{-1}(-\delta A) + \cos^{-1}(-\delta B)}{(1-\epsilon^2)^{1/2}}$$

where

$$A = \left( \frac{\epsilon + \cos \theta_1}{1 + \epsilon \cos \theta_1} \right) \quad B = \left( \frac{\epsilon - \cos \theta_1}{1 - \epsilon \cos \theta_1} \right) \quad \delta = 1, \quad \sin \theta_1 \geq 0$$

$$= -1, \quad \sin \theta_1 \leq 0$$

**Other Useful Relations**

$$\sin^{-1}(\epsilon) + \cos^{-1}(\epsilon) = \pi/2$$

$$\cos^{-1}(\epsilon) + \cos^{-1}(-\epsilon) = \pi$$

$$\sin^{-1}(\epsilon) + \sin^{-1}(-\epsilon) = 0$$

**Example 2.** Find

$$\int_{\pi/2}^{3\pi/2} \frac{d\theta}{(1 + \epsilon \cos \theta)^2} \equiv [I_2^{00}]_{\pi/2}^{3\pi/2} \equiv J_2^{00}, \quad 0 < \epsilon^2 < 1$$

Entering the table, we find successively

$$J_2^{00} = \frac{1}{(1 - \epsilon^2)} \left[ \frac{-\epsilon \sin \theta}{(1 + \epsilon \cos \theta)} + I_1^{00} \right]_{\pi/2}^{3\pi/2} \\ = \frac{1}{(1 - \epsilon^2)} [2\epsilon + J_1^{00}]$$

$$J_1^{00} = [I_1^{00}]_0^{3\pi/2} - [I_1^{00}]_0^{\pi/2} = \frac{2\pi - \cos^{-1}(\epsilon)}{(1 - \epsilon^2)^{1/2}} - \frac{\cos^{-1}(\epsilon)}{(1 - \epsilon^2)^{1/2}} \\ = \frac{2 \cos^{-1}(-\epsilon)}{(1 - \epsilon^2)^{1/2}}$$

Combining<sup>7</sup> gives the desired result

**Limitations and Extensions of Table**

**Parameter  $\epsilon$ .** The tables are nominally good only for  $0 < \epsilon^2 < 1$  where  $\epsilon$  is a real number.

The difficulty at  $\epsilon^2 = 0$  is obvious, since all but the  $I_n^{00}$  formula would indicate division by zero. The problem is trivial, however, since the integrand reduces to  $\sin^l \theta \cos^m \theta$  under these circumstances. The reader is referred to any of the standard references<sup>8</sup> for appropriate formulas.

The difficulties for  $\epsilon^2 \geq 1$  are of more fundamental nature, since under these circumstances the integrand will "blow up" locally. Nevertheless, a need for integration over other well-behaved regions can arise in physically meaningful problems; e. g., the study of partial-arc bearings. Fortunately, only the  $I_n^{00}$  formula fails for such cases, and the reader is again referred to the standard references<sup>8</sup> for a replacement.

**Exponents  $l, m, n$ .** The tables are nominally good only for integer  $l, m, n$ . (Actually, the formulas are valid, but lead nowhere, for noninteger  $n$ .) Since the vast majority of practical problems involves integer exponents, this is not considered a serious deficiency.

The tables actually cover only  $l, m = 0, 1, 2, 3$ . In the unlikely event that other exponents are encountered, the tables can be extended by constructing additional partial-fraction identities. To increase  $m$  beyond the present formulas, one can make use of the identity

$$I_n^{l(m+1)} = 1/\epsilon [-I_n^{lm} + I_{n-1}^{lm}]$$

The process by which  $l$  is increased is best understood by comparing the formulas for  $I_n^{2m}$  and  $I_n^{3m}$ .

**Acknowledgment**

This note is an outgrowth of studies carried on under sponsorship of the National Science Foundation in the Sibley School of Mechanical Engineering, Cornell University.

**References**

- 1 M. Cantor, *Geschichte der Mathematik*, Teubner, Leipzig, Germany, vol. 4, (1759-1799), 1908.
- 2 O. Reynolds,<sup>11</sup> "On the Theory of Lubrication and Its Application to Mr. Beauchamp Tower's Experiments Including an Experimental Determination of the Viscosity of Olive Oil," *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, vol. 177, Series A, Part I, 1886.
- 3 A. Sommerfeld, "Zur hydrodynamischen Theorie der Schmiermittelreibung," *Zeitschrift für Mathematik und Physik*, vol. 50, 1904.
- 4 R. Boswall, *The Theory of Film Lubrication*, Longmans, Green and Company, London, England, 1928.
- 5 I. Todhunter, *A Treatise on the Integral Calculus*, Macmillan and Company, London, England, 1880.
- 6 B. Williamson, *An Elementary Treatise on The Integral Calculus*, Longmans, Green and Company, London, England, 1880.
- 7 G. Hardy, "The Integration of Functions of a Single Variable," *Cambridge Tracts in Mathematics and Mathematical Physics*, no. 2, Cambridge University Press, London, England, 1905.

<sup>7</sup> If only numerical results are required, this step is best omitted.  
<sup>8</sup> See, for example, H. Dwight [9] or B. Peirce and R. Foster [8].

8 B. Peirce and R. Foster, *A Short Table of Integrals*, 4th edition, Ginn and Company, Boston, Mass., 1957.

9 H. Dwight, *Tables of Integrals and Other Mathematical Data*, 4th edition, The Macmillan Company, New York, N. Y., 1961.

10 W. Gross, *Gas-Film Lubrication*, John Wiley & Sons, Inc., New York, N. Y., 1962.

11 J. Booker, "Dynamically Loaded Journal Bearings: Mobility Method of Solution," *JOURNAL OF BASIC ENGINEERING*, TRANS. ASME, Series D, vol. 87, 1965.

**Turbulent Boundary-Layer Growth in Annular Diffusers<sup>1</sup>**

H. R. KUNZ<sup>2</sup>

**Nomenclature**

- $A$  = cross-sectional area of diffuser
- $C_f$  = skin friction coefficient
- $h$  = passage height =  $R_o - R_i$
- $H$  = incompressible shape factor =  $\delta^*/\theta$
- $r$  = radial distance from axis
- $R$  = radius of wall
- $Re$  = Reynolds number based on  $\theta$  and  $U$
- $u$  = local velocity
- $U$  = free-stream velocity
- $x$  = distance in axial direction
- $\alpha$  = 1/2 diffuser included angle
- $\delta$  = boundary-layer thickness
- $\Theta$  = incompressible momentum thickness =  $(1/R) \int_R^{R+\delta} (1 - u/U)(u/U) r dr$
- $\delta^*$  = incompressible displacement thickness =  $(1/R) \int_R^{R+\delta} (1 - u/U) r dr$
- $\psi$  = a function of  $A_2/A_1$  and  $\theta_1/h_1$

**Subscripts**

- 1 = diffuser inlet
- 2 = diffuser exit
- $i$  = inner wall
- $o$  = outer wall

This note summarizes a theoretical and experimental study of the boundary-layer growth in annular subsonic diffusers. Experiments were conducted using air as the working fluid in thirteen diffusers on a rig shown schematically in Fig. 1. For all of these diffusers, the mean diameter was constant and the flow area increased linearly with length. The area ratios and lengths of these diffusers are listed in Table 1.

Tests were conducted at a diffuser inlet free-stream Mach number of approximately 0.35, resulting in measured inlet boundary-layer momentum thicknesses of 0.038 in. on both the inner and outer walls, inlet Reynolds numbers based on momentum thickness of 7700, and diffuser inlet shape factors of 1.3. The diffuser inlet static pressure was approximately 28.2 in. Hg and the stagnation temperature was approximately 570 R. Boundary-layer momentum and displacement thicknesses were measured at the exit of each of these diffusers on both the inner and outer walls. This data and the free-stream inlet Mach numbers are presented in Table 1. None of these diffusers exhibited large-scale separation. A detailed description of the experimental and data-reduction procedures has been presented.<sup>3</sup>

<sup>1</sup> This work was carried out in partial fulfillment of the requirements for the degree of Master of Science at Rensselaer Polytechnic Institute Hartford Graduate Center.

<sup>2</sup> Applied Science Group, Pratt & Whitney Aircraft, Division of United Aircraft Corporation, East Hartford, Conn.

<sup>3</sup> H. R. Kunz, "The Growth of Turbulent Boundary Layers in Annular Passages," MS thesis, Rensselaer Polytechnic Institute, Hartford Graduate Center, January, 1968.

Contributed by the Fluids Engineering Division of THE AMERICAN SOCIETY OF MECHANICAL ENGINEERS. Manuscript received at ASME Headquarters, December 16, 1964.

## Anexo D – Códigos de programación en ANSYS

### D.1 Modelo de rotor de Jeffcott apoyado en chumaceras hidrodinámicas cortas. Código para análisis en estado estable.

! ESTE MODELO SE CONSTRUYE DIRECTAMENTE A PARTIR DE NODOS Y ELEMENTOS. ES UN ROTOR DE JEFFCOTT CON RIGIDEZ Y AMORTIGUAMIENTO CONOCIDOS PARA LOS APOYOS. ESTOS SE PUEDEN AJUSTAR DEPENDIENDO DEL VALOR DE SOMMERFELD CALCULADO PARA LAS CHUMACERAS

```
!*****
!
! CREACION DE LA GEOMETRIA Y PROPIEDADES FISICAS DEL ROTOR
!
//BATCH,LIST
/TITLE, ROTOR DE JEFFCOTT SOBRE CHUMACERAS HIDRODINÁMICAS
!
! DECLARACION DE PARAMETROS DE ENTRADA
!
LX1=0.50          ! LARGO TOTAL DEL EJE
LX2=0.010        ! ESPESOR DEL DISCO
DIA1=0.1         ! DIAMETRO DEL DISCO
DIA2=0.012      ! DIAMETRO DEL EJE
!
RPM= 3600        !VELOCIDAD DE OPERACION RPM
PI=ACOS(-1)     !PI
SPIN=RPM*PI/30  !VELOCIDAD DE OPERACION RAD/S
!
/PREP7          ! INICIALIZACION DE CALCULOS
!
! PROPIEDADES DE EJE
ET,1,188,,2     ! ELEMEN TYPE, (TIPO DE ELEMENTO, VIGA 188)
SECTYPE,1,BEAM,CSOLID ! SELECCION DE SECCION CIRCULAR DEL EJE
SECDATA,DIA2/2,32 ! GEOMETRIA DEL EJE, RADIO
!
! PROPIEDADES DE DISCO
ET,2,188,,2     ! ELEMEN TYPE, (TIPO DE ELEMENTO, VIGA 188)
SECTYPE,2,BEAM,CSOLID ! SELECCION DE SECCION CIRCULAR DEL DISCO
SECDATA,DIA1/2,32 ! GEOMETRIA DEL DISCO, RADIO
!
! CARACTERISTICAS DEL MATERIAL
!
MP,EX,1,2E+11   ! MODULO DE YOUNG DEL EJE
MP,DENS,1,7800 ! DENSIDAD DEL EJE (ACERO)
MP,PRXY,1,0.3  ! COEFICIENTE DE POISSON DEL EJE
!
MP,EX,2,2E+11  ! MODULO DE YOUNG DEL DISCO
MP,DENS,2,7800 ! DENSIDAD DEL DISCO (ACERO)
MP,PRXY,2,0.3  ! MODULO DE POISSON DEL DISCO
!
```

---

```

!RIGIDEZ Y AMORTIGUAMIENTO EN LAS CHUMACERAS
KXX= 7.812808549 E6  !RIGIDEZ EN LA DIRECCIÓN IJ
KYY= 13.92536368 E6
KXY= 38.99999878 E6
KYX=-33.63071372 E6
CXX=0.200627894 E6  !AMORTIGUAMIENTO EN LA DIRECCIÓN IJ
CYY=0.184690003 E6
CXY=0.036998659 E6
CYX=CXY
!
! GENERACION DEL MODELO
!
! LOCALIZACION DE NODOS, PROPIEDADES DEL EJE
!
N,1,0,0,0
N,2,0,0,(LX1)/20
N,3,0,0,2*(LX1)/20
N,4,0,0,3*(LX1)/20
N,5,0,0, 4*(LX1)/20
N,6,0,0,5*(LX1)/20
N,7,0,0,6*(LX1)/20
N,8,0,0,7*(LX1)/20
N,9,0,0,8*(LX1)/20
N,10,0,0,9*(LX1)/20
!EL NODO CENTRAL SE ELIMINA, EL MODELADO DEL DISCO ES APARTE
N,12,0,0,11*(LX1)/20
N,13,0,0,12*(LX1)/20
N,14,0,0,13*(LX1)/20
N,15,0,0,14*(LX1)/20
N,16,0,0,15*(LX1)/20
N,17,0,0,16*(LX1)/20
N,18,0,0,17*(LX1)/20
N,19,0,0,18*(LX1)/20
N,20,0,0,19*(LX1)/20
N,21,0,0,20*(LX1)/20
!
!LOCALIZACION DEL DISCO
N,50 ,0,0,(LX1-LX2)/2  !EL DISCO SE UBICA JUSTO AL CENTRO DEL EJE
N,51,0,0,(Lx1/2)
N,52,0,0,(LX1+LX2)/2
!
! FORMACION DE LOS ELEMENTOS
!
TYPE,1
SECN,1
E,1,2 !LOS ELEMENTOS SE GENERAN DE UNO EN UNO
E,2,3
E,3,4
E,4,5
E,5,6

```

---

---

```
E,6,7
E,7,8
E,8,9
E,9,10
E,10,50
E,52,12
E,12,13
E,13,14
E,14,15
E,15,16
E,16,17
E,17,18
E,18,19
E,19,20
E,20,21
REAL,1
CM,SHAFT,ELEM !SE CONFORMA EL EJE CON LOS ELEMENTOS ANTERIORES
!
TYPE,2
SECN,2
E,50,51
E,51,52
REAL,2
ESEL,U,,,SHAFT
CM,DISK,ELEM
ALLSELL
!
!LOCALIZACION DE LAS CHUMACERAS
N,101,0.05,0,0
N,102,0.05,0,LX1
N,103,0,0.05,0
N,104,0,0.05,LX1
!
ET,3,214
KEYOPT,3,3,1
R,3,KXX,KYY,KXY,KYX,CXX,CYY
RMORE,CXY,CYX
TYPE,3
REAL,3
E,101,1,103
E,102,21,104
!
! CONDICIONES DE RESTRICION EN RESORTES Y MOVIMIENTO
!
D,ALL,UZ,,,,,ROTZ !RESTRICCIONES
D,101,ALL          !SE FIJAN LOS APOYOS DE LAS CHUMACERAS
D,102,ALL
D,103,ALL
D,104,ALL
!
```

---

```

! *****
! INICIALIZACION DE SOLUCION DE ANÁLISIS MODAL PARA OBTENER DIAGRAMA DE
CAMBELL
!
/SOLU
ANTYPE,MODAL           ! TIPO DE ANALISIS PREVIO SOLICITADO
MODEOPT,QRDAMP,8,,,ON !8 MODOS DE VIBRACIÓN A CALCULAR
MXPAND,8,,,YES        ! CON LOS MODOS DE VIBRACION CALCULAR
RESULTADOS
CORIOLIS,ON,,,ON      ! APLICAR EFECTOS DE CORIOLIS
OMEGA,0                !EL ROTOR NO ESTA OPERANDO
SOLVE
!
OMEGA,,,SPIN/2
SOLVE
!
OMEGA,,,SPIN          !EL ROTOR SE ENCUENTRA EN ESTADO ESTABLE Y VELOCIDAD
CONSTANTE
SOLVE
!
OMEGA,,,1047.19
SOLVE
FINISH
!
!DIAGRAMA DE CAMPBELL
/POST1
PLCAMP,,1,RPM
PRCAMP !IMPRIME DIAGRAMA DE CAMPBELL
FINISH
! *****
! INICIALIZACION DE SOLUCION PARA OBTENER ANÁLISIS ARMÓNICO
!
f0 = 10e-5
!
/SOLU
!
f,51,fy,,-f0
f,51,fx,-f0
!
ANTYPE,HARMIC          ! TIPO DE ANALISIS SOLICITADO (ARMÓNICO)
SYNCHRO,1
NSUBST,500             ! SUBPASOS
HARFRQ,,10000/60
KBC,1
DMPRAT,0.01
OMEGA,,,spin !AJUSTAR A LAS FRECUENCIAS NATURALES
CORIOLIS,ON,,,ON
SOLVE
FINISH

```

---

```

! OUTPUT: AMPLITUD EN LOS NODOS 1,50 y 21 CORRESPONDIENTES A LAS
CHUMACERAS
/POST26
NSOL,2,1,U,Y,UY
NSOL,3,1,U,X,UX
REALVAR,4,2,,UYR
REALVAR,5,3,,UXR
PROD,6,4,4,,UYR_2
PROD,7,5,5,,UXR_2
ADD,8,6,7,,UYR_2+UXR_2
SQRT,9,8,,AMPL1
!
NSOL,2,50,U,Y,UY
NSOL,3,50,U,X,UX
REALVAR,4,2,,UYR
REALVAR,5,3,,UXR
PROD,6,4,4,,UYR_2
PROD,7,5,5,,UXR_2
ADD,8,6,7,,UYR_2+UXR_2
SQRT,10,8,,AMPL50
!
NSOL,2,21,U,Y,UY
NSOL,3,21,U,X,UX
REALVAR,4,2,,UYR
REALVAR,5,3,,UXR
PROD,6,4,4,,UYR_2
PROD,7,5,5,,UXR_2
ADD,8,6,7,,UYR_2+UXR_2
SQRT,7,8,,AMPL21
!
/GROPT,LOGY,1
/YRANGE,1.E-8,1.E-6
PLVAR,9,10,7
FINI
!
! OUTPUT: ÓRBITAS EN 3D
/POST1
SET,1,262
/VIEW,,1,1,1
PLOBR!
!
! ANIMACIÓN DE MOVIMIENTO
/POST1
SET,1,500      ! DEFINE EL CONJUNTO DE DATOS QUE SE DEBEN LEER DESDE EL
                ! ARCHIVO DE RESULTADOS.
!
/ESHape,1      ! RECONOCIMIENTO DE MODELO EN 3D
/GLINE,,-1
PLNSOL,U,SUM   ! MODELADO REAL
ANHARM,30

```

---

---

```
/DSCALE,1,0
```

## D.2 Modelo de rotor de Jeffcott apoyado en chumaceras hidrodinámicas cortas. Código para análisis en estado transitorio

```
! ESTE MODELO SE CONSTRUYE POR MEDIO DE LÍNEAS, Y EL ELEMENTO CENTRAL ES
UNA MASA GENÉRICA CUYAS PROPIEDADES DE INERCIA DEBEN SER CALCULADAS. ES
UN ROTOR DE JEFFCOTT CON RIGIDEZ Y AMORTIGUAMIENTO VARIABLES, TABULADOS
RESPECTO AL VALOR DE SOMMERFELD CALCULADO
```

```
/BATCH,LIST
```

```
/TITLE, ROTOR DE JEFFCOTT APOYADO EN CHUMACERAS HIDRODINÁMICAS CORTAS.
AMORTIGUAMIENTO ROTATORIO
```

```
/CONFIG,NRES,4000000
```

```
/NERR,,4000000
```

```
/PREP7
```

```
!
```

```
! ** PARAMETROS
```

```
LENGTH = 0.5           ! LONGITUD DEL EJE
```

```
RO_SHAFT = 0.006       ! RADIO DEL EJE
```

```
RO_DISK = 0.05         ! RADIO DEL DISCO
```

```
MD = 0.618108         ! MASA DEL DISCO
```

```
ID = 0.000391         ! MOMENTOS DE INERCIA DEL DISCO
```

```
IP = 0.000773
```

```
!DEFINE TABLA KXX
```

```
*DIM, KXX, TABLE, 5, 1, 1, OMEGS
```

```
KXX (1,0)= 0.104719755,    52.35987756,    94.24777961,    188.4955592,    376.9911184
```

```
KXX(1,1)= 183501.5388,    3940906.109,    5036478.041,    6770890.757,    10253583.65
```

```
!
```

```
!DEFINE TABLA KYY
```

```
*DIM, KYY, TABLE, 5, 1, 1, OMEGS
```

```
KYY (1,0)= 0.104719755,    52.35987756,    94.24777961,    188.4955592,    376.9911184
```

```
KYY(1,1)= 1813.963671,    1630891.514,    3400044.909,    7848041.103,    16909882.47
```

```
!
```

```
!DEFINE TABLA KXY
```

```
*DIM, KXY, TABLE, 5, 1, 1, OMEGS
```

```
KXY (1,0)= 0.104719755,    52.35987756,    94.24777961,    188.4955592,    376.9911184
```

```
KXY(1,1)= 21270.42566,    3676074.127,    6695070.892,    14998297.63,    41481734.93
```

```
!
```

```
!DEFINE TABLA KYX
```

```
*DIM, KYX, TABLE, 5, 1, 1, OMEGS
```

```
KYX (1,0)= 0.104719755,    52.35987756,    94.24777961,    188.4955592,    376.9911184
```

```
KYX(1,1)= -1221.074223,    -596863.3134,    -1930020.02,    -8065979.476,    -33182332.49
```

```
!
```

```
!DEFINE TABLA CXX
```

```
*DIM, CXX, TABLE, 5, 1, 1, OMEGS
```

```
CXX (1,0)= 0.104719755,    52.35987756,    94.24777961,    188.4955592,    376.9911184
```

```
CXX(1,1)= 428293.1073,    138402.1336,    139506.421,    156697.1893,    218263.7175
```

```
!
```

```
!DEFINE TABLA CYY
```

---

---

```

*DIM, CYY, TABLE, 5, 1, 1, OMEGS
CYY (1,0)= 0.104719755, 52.35987756, 94.24777961, 188.4955592, 376.9911184
CYY(1,1)= 140480.7254, 48517.82402, 61589.31597, 99916.44908, 184732.693
!
!DEFINE TABLA CXY
*DIM, CXY, TABLE, 5, 1, 1, OMEGS
CXY (1,0)= 0.104719755, 52.35987756, 94.24777961, 188.4955592, 376.9911184
CXY(1,1)= 0.031281193, 17658.53131, 26365.8898, 36752.91517, 43168.27256
!
!DEFINE TABLA CYX
*DIM, CYX, TABLE, 5, 1, 1, OMEGS
CYX (1,0)= 0.104719755, 52.35987756, 94.24777961, 188.4955592, 376.9911184
CYX(1,1)= 0.031281193, 17658.53131, 26365.8898, 36752.91517, 43168.27256
!!
! ** MATERIAL = ACERO
MP, EX, 1, 2.0E+11
MP, NUXY, 1, .3
MP, DENS, 1, 7800

! ** ELEMENTS TYPES
ET, 1, 188
SECT, 1, BEAM, CSOLID
SECDATA, RO_SHAFT, 20
ET, 2, 21
R, 2, MD, MD, MD, ID, ID, IP
ET, 3, 214, 0, 0, 1, 1
R, 3, %KXX%, %KYY%, %KXY%, %KYX%, %CXX%, %CYY%
RMORE, %CXY%, %CYX%
ET, 4, 214, 0, 0, 1, 1
R, 4, %KXX%, %KYY%, %KXY%, %KYX%, %CXX%, %CYY%
RMORE, %CXY%, %CYX%
!
! EJE
TYPE, 1
SECN, 1
MAT, 1
K, 1
K, 2, ,, LENGTH
L, 1, 2
LESIZE, 1, ,, 10
LMESH, ALL
!
! DISCO
TYPE, 2
REAL, 2
E, 7
! ** BEARING
N, 21, -0.05, ,,
N, 22, -0.05, ,, LENGTH
N, 23, 0, -0.05, 0,

```

---

---

```

N,24,0,-0.05,LENGTH
TYPE,3
REAL,3
E,21,1,23
TYPE,4
REAL,4
E,22,2,24
! RESTRICCIONES DE MOVIMIENTO
D,ALL,UZ
D,ALL,ROTZ
D,21,ALL
D,22,ALL
D,23,ALL
D,24,ALL
FINISH
! ** FUERZA TRANSITORIA TABULADA (DESBALANCE)
PI = ACOS(-1)
RPM=3600
SPIN = RPM*PI/30
TINC = 0.1E-3
TEND = 8
SPINDOT = SPIN/TEND
NBP = NINT(TEND/TINC) + 1
UNB = 1.E-4
F0 = UNB*RO_DISK
*DIM,SPINTAB, TABLE,NBP,,,TIME
*DIM,ROTTAB, TABLE,NBP,,,TIME
*DIM,FXTAB, TABLE,NBP,,,TIME
*DIM,FYTAB, TABLE,NBP,,,TIME
*VFILL,SPINTAB(1,0),RAMP,0,TINC
*VFILL,ROTTAB(1,0), RAMP,0,TINC
*VFILL,FXTAB(1,0), RAMP,0,TINC
*VFILL,FYTAB(1,0), RAMP,0,TINC
TT = 0
*DO,ILOOP,1,NBP
SPINVAL = SPINDOT*TT
SPINTAB(ILOOP,1) = SPINVAL
SPIN2 = SPINVAL**2
ROTV = SPINDOT*TT**2/2
ROTTAB(ILOOP,1) = ROTVAL
SINR = SIN(ROTV)
COSR = COS(ROTV)
FXTAB(ILOOP,1)= F0*(-SPIN2*SINR + SPINDOT*COSR)
FYTAB(ILOOP,1)= F0*( SPIN2*COSR + SPINDOT*SINR)
TT = TT + TINC
*ENDDO
FINI
! ** ANALISIS TRANSITORIO
/SOLU
ANTYPE,TRANSIENT

```

---

---

```

NLGEOM,ON !! ACTUALIZACION DE LA MATRIZ DE EFECTOS GIROSCOPICOS
TIME,TEND
DELTIM,TINC,TINC/10,TINC*10
KBC,0
CORIOLIS,ON,,,ON
OMEGA,,,SPIN
F,7,FX,%FXTAB%
F,7,FY,%FYTAB%
OUTRES,ALL,ALL
SOLVE
FINI
! ** GENERACION RESPUESTAS GRAFICAS
/POST26
NSOL,2,7,U,X,UxDISK
PROD,3,2,2
NSOL,4,7,U,Y,UyDISK
PROD,5,4,4
ADD,6,3,5
SQRT,7,6,,,AMPL_AT_DISK
/AXLAB,Y,DISPLACEMENT (M)
PLVAR,7

/POST26
INODE = 1          ! NODO DE INTERES
NSOL,2,INODE,U,X   ! DEFINE VARIABLE 2
NSOL,3,INODE,U,Y   ! DEFINE VARIABLE 3
!
/AXLAB,X,DISPLACEMENT UX  !
/AXLAB,Y,DISPLACEMENT UY  !
!
XVAR,2             ! VARIABLE 2 EN EL EJE HORIZONTAL
PLVAR,3

/POST26
INODE = 7          ! NODO DE INTERES
NSOL,2,INODE,U,X   ! DEFINE VARIABLE 2
NSOL,3,INODE,U,Y   ! DEFINE VARIABLE 3
!
/AXLAB,X,DISPLACEMENT UX  ! SPECIFY XAXIS LABEL
/AXLAB,Y,DISPLACEMENT UY  ! SPECIFY YAXIS LABEL
!
XVAR,2             ! VARIABLE 2 EN EL EJE HORIZONTAL
PLVAR,3

```