



"2019, Año del Caudillo del Sur, Emiliano Zapata"

INSTITUTO TECNOLÓGICO DE PACHUCA

**BAJO LA OPCIÓN I:
TESIS**

**CARACTERIZACIÓN DINÁMICA DE UN SOPORTE CON
MULTI-RECESOS. ANÁLISIS DE ESTABILIDAD**

**QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:
MAESTRO EN INGENIERÍA MECÁNICA**

**PRESENTA:
JONNATAN VALDEZ SIERRA**

**DIRECTOR DE TESIS:
DR. IGNACIO RAMÍREZ VARGAS**

**CO-DIRECTOR:
DR. ROQUE JULIO HERNÁNDEZ DONADO**

**SINODALES:
DR. LUIS MANUEL PALACIOS PINEDA
DR. EDGAR ERNESTO VERA CÁRDENAS**

93 páginas

Pachuca de Soto, Hidalgo Noviembre de 2019





EDUCACIÓN
SECRETARÍA DE EDUCACIÓN PÚBLICA



TECNOLÓGICO
NACIONAL DE MÉXICO

Instituto Tecnológico de Pachuca

“2019, Año del Caudillo del Sur, Emiliano Zapata”

**División de Estudios de Posgrado e Investigación
Consejo de Posgrado de la Maestría en Ingeniería Mecánica**

ACTA

Siendo las 13:00 horas del 15 de febrero de 2019, reunidos en el aula U6, el Consejo de Posgrado de la Maestría en Ingeniería Mecánica manifiesta la **APROBACIÓN** del tema de Tesis: **Caracterización dinámica de un soporte con multi-recesos. Análisis de estabilidad**, con el siguiente contenido:

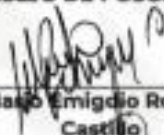


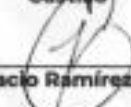


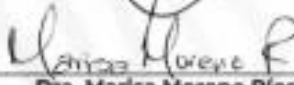

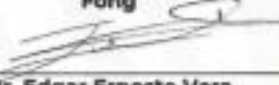
Resumen/Abstract
Nomenclatura
Contenido
Índice de cuadros, gráficas y figuras.
1. Introducción
2. Antecedentes
3. Marco Teórico
4. Materiales y métodos
5. Resultados y discusión
Conclusiones
Bibliografía
Apéndices

Para cubrir el requisito correspondiente a la Tesis para que el Ing. Jonnatan Valdez Sierra obtenga el grado de Maestro en Ingeniería Mecánica, bajo la dirección del Dr. Ignacio Ramírez Vargas, profesor de la Maestría en Ingeniería Mecánica de la División de Estudios de Posgrado e Investigación.

ATENTAMENTE

El Hambre Alimenta el Ingenio en Contacto con la Ciencia

EL CONSEJO DE POSGRADO

 Dr. Mario Emigdio Rodríguez Castillo	 Dr. Luis Manuel Palacios Pineda	 Dra. Erika Osiris Ayala Dávila
 Dr. Ignacio Ramírez Vargas	 Dr. Abdiel Gómez Mercado	 Dr. Hugo Francisco Abundis Fong
 Dra. Marisa Moreno Ríos	 Dr. Rafael Campos Amezcua	 Dr. Edgar Ernesto Vera Cárdenas



Carretera México-Pachuca Km. 87.5, Col. Venta Prieta, Pachuca, Hidalgo, C.P. 42080, A. P. 275.

Tels. : (01 771) 710 52 51, 170 03 45, 170 03 01, 170 06 87

www.tecnm.mx | www.itpachuca.edu.mx



EDUCACIÓN
SECRETARÍA DE EDUCACIÓN PÚBLICA



TECNOLÓGICO
NACIONAL DE MÉXICO

Instituto Tecnológico de Pachuca

“2019, Año del Caudillo del Sur, Emiliano Zapata”

Pachuca, Hidalgo, 5/Noviembre/2019
OFICIO No. DEPI-261-19

**C. ING. JONNATAN VALDEZ SIERRA
PRESENTE**

La que suscribe, jefa de la División de Estudios de Posgrado e Investigación, le comunica que los miembros de la Comisión Revisora, designada por el Consejo de Posgrado de la Maestría en Ingeniería Mecánica para examinar su Tesis:

Caracterización dinámica de un soporte con multi-recesos.
Análisis de estabilidad

se han reunido, y después de intercambiar opiniones manifiestan su aprobación de la Tesis, en virtud que satisface los requisitos señalados por las disposiciones reglamentarias vigentes y, en consecuencia, se autoriza su impresión.

Sin otro particular por el momento, quedo de Usted.

ATENTAMENTE

El Hombre Alimenta el Ingenio en Contacto con la Ciencia

**MTRA. KARLA MARTÍNEZ TAPIA
JEFA DE LA DIVISIÓN DE ESTUDIOS DE POSGRADO E INVESTIGACIÓN**

C.p. Archivo
KMT/lmpp



INSTITUTO TECNOLÓGICO DE PACHUCA
DIVISIÓN DE ESTUDIOS
DE POSGRADO E INVESTIGACIÓN



Carretera México-Pachuca Km. 87.5, Col. Venta Prieta, Pachuca, Hidalgo. C.P. 42080, A. P. 276.
Tels. : (01 771) 710 52 51, 170 03 45, 170 03 01, 170 06 87
www.technm.mx | www.itpachuca.edu.mx

Agradecimientos

A Dios por su inmenso amor para mí, por sus bendiciones, por darme una familia extraordinaria, pero sobre todo por permitirme culminar una etapa más en mi vida.

A mi familia el Sr. Benjamín Valdez Martínez, a la Sra. Angélica Sierra Lugo y a mi hermana Aylin por su gran amor, por ser la mayor motivación en mi vida, por sus consejos en los momentos alegres y complicados, por estar presentes en cada etapa de mi formación académica y profesional.

A CONACYT (Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología) por la beca otorgada durante la maestría y por la oportunidad de realizar una estancia en el extranjero (Colombia).

A mi director de tesis Dr. Ignacio Ramírez Vargas, por su apoyo, por compartirme un poco de su conocimiento y por su interés y gran dedicación para culminar este trabajo de investigación.

A mis sinodales, el Dr. Luis Manuel Palacios Pineda y el Dr. Edgar Ernesto Vera Cárdenas por su apoyo y colaboración en las correcciones de este trabajo.

A todos los Doctores del consejo de posgrado por sus consejos y apoyo en mi formación profesional.

A mis tíos el Sr. David Esparza y la Sra. Olga Sierra quien siempre me han motivado a seguir adelante, por sus consejos y sobre todo por guiarme en el camino de Dios.

A mis compañeros de maestría por haber mostrado un compañerismo incondicional.

Resumen

En el presente trabajo se retomó la teoría de chumaceras presurizadas, la cual está enfocada al análisis dinámico de una chumacera hidrodinámica con inyección de lubricante. Dicha teoría permite determinar de forma analítica las principales características rotodinámicas para predecir el comportamiento de un sistema rotor-chumacera. La presurización externa es una manera artificial de cambiar las propiedades de rigidez y amortiguamiento, dichas propiedades hacen que la conducta de un sistema rotatorio sea modificada (estable o inestable). Se analizan casos donde los puertos de inyección están colocados en dos posiciones angulares distintas. El primer caso; cuando se inyecta aceite lubricante en la parte superior de la chumacera a 120° y el segundo caso cuando existe inyección en la parte inferior a 60° . Se presenta la metodología que se llevó a cabo para obtener los mejores resultados posibles, se muestran los modelos matemáticos y expresiones analíticas para determinar todos los parámetros necesarios para la caracterización de una chumacera hidrodinámica presurizada. Dichos parámetros son: Campo de presión, la posición de equilibrio, coeficientes de rigidez y amortiguamiento y la velocidad umbral de estabilidad. Como primer punto se determinaron los nuevos campos de presión aproximados en dos posiciones distintas a inyectar, dichos campos muestran la distribución de presión que se genera en la película de lubricante. Se determinó las nuevas posiciones de equilibrio que tomará el muñón respecto al centro geométrico de la chumacera cuando existe inyección externa, los datos se muestran en forma de tablas ya que tiene una mejor facilidad de lectura. Cuando se inyecta lubricante en la posición $2\pi/3$ (120°) el desplazamiento del muñón es mayor al incrementar la fuerza de presurización. Caso contrario ocurre cuando se inyecta a una posición de $\pi/3$ (60°) pues el desplazamiento es menor, puesto que el muñón tiende a moverse hacia arriba cada vez más. Se determinó el comportamiento de los coeficientes rotodinámicos (rigidez y amortiguamiento) influenciado por varios factores (fuerza de presurización, excentricidad, ubicación del puerto de inyección). La rigidez en la posición $2\pi/3$ es mayor al aumentar la fuerza de presurización, caso contrario cuando se inyecta a $\pi/3$ donde la rigidez y amortiguamiento disminuyen al incrementar la fuerza de presurización. La velocidad umbral de estabilidad es diferente al inyectar en la posición $2\pi/3$ pues cuando se incrementa la fuerza

de presurización externa la velocidad decrece, esto significa que en esta ubicación puede existir ligera inestabilidad. Sin embargo cuando se inyecta a $\pi/3$ la disminución de la velocidad umbral de estabilidad es mucho mayor, en esta posición el sistema rotatorio es altamente inestable. Por tanto se concluye que para atenuar las vibraciones la mejor posición para inyectar aceite lubricante es en la parte superior de la chumacera.

Abstract

In the present work, the theory of pressurized bearings was taken up, which is focused on the dynamic analysis of a hydrodynamic bearing with lubricant injection. This theory allows to determine analytically the main rotordynamic characteristics to predict the behavior of a rotor-bearing system. External pressurization is an artificial way to change the properties of rigidity and damping, these properties cause the behavior of a rotating system to be modified (stable or unstable). Cases were analyzed where the injection ports are placed in two different angular positions. The first case; when lubricating oil is injected at the top of the bearing block at 120° and the second case when there is injection in the lower part at 60° . The methodology that was carried out to obtain the best possible results is presented, mathematical models and analytical expressions are shown to determine all the necessary parameters for the characterization of a pressurized hydrodynamic bearing. These parameters are: Pressure field, equilibrium position, rigidity and damping coefficients and the threshold speed of stability. As a first point, the new approximate pressure fields in two different positions to be injected were determined, these fields show the pressure distribution generated in the lubricant film. It was determined the new equilibrium positions that the stump will take with respect to the geometric center of the bearing when there is external injection, the data is shown in tables for a better interpolation. When lubricant is injected in the $2\pi/3$ (120°) position the displacement of the stump is greater as the pressurization force increases. Otherwise it happens when injected at a position of $\pi/3$ (60°) because the displacement is less, since the stump tends to move up more and more. The behavior of rotodynamic coefficients (rigidity and damping) influenced by several factors (pressurization force, eccentricity, injection port location) was determined. The rigidity in the $2\pi/3$ position is greater when the pressurization force increases, otherwise occurs when it is injected to $\pi/3$ where the rigidity and damping decrease as the pressurization force increases. The stability threshold speed is different when injecting in the $2\pi/3$ position because when the external pressurization force increases the speed decreases, this means that in this location there may be slight instability. However, when injected at $\pi/3$ the decrease in the stability threshold speed is much greater, in this position the rotary system is highly unstable. Therefore, it is

concluded that to mitigate vibrations, the best position to inject lubricating oil is at the top of the bearings.

Objetivos

Objetivo general

Proporcionar una investigación para chumaceras cortas hidrodinámicas presurizadas (basado en la teoría de chumaceras cortas presurizadas) que permita inyectar aceite lubricante en puertos cuya posición axial y angular sea arbitraria, reduciendo los niveles de vibración en el sistema rotatorio.

Objetivos específicos

- 1) Determinar las posiciones de equilibrio del rotor, hallar los coeficientes rotodinámicos de la película de lubricante y obtener la velocidad umbral de estabilidad de una chumacera corta que ha sido presurizada externamente en diferentes puertos de inyección de lubricante.
- 2) Analizar la influencia que ocasiona el cambio en la posición de la puerta de inyección de lubricante por el efecto causado por la presurización externa.
- 3) Se busca que este trabajo sirva de guía al diseñador de equipo rotatorio que le permita tomar decisiones adecuadas si necesita presurizar las chumaceras; es decir bajo qué condiciones la presurización externa produce buenos resultados o inestabilidades.

Planteamiento del problema y justificación

Los componentes principales de un sistema rotor-dinámico son el eje o rotor con disco, las chumaceras y las juntas. Las chumaceras de película fluida son de gran importancia ya que su función es soportar un sistema rotatorio proporcionando una libre rotación. Estas chumaceras están expuestas a sufrir vibraciones traduciéndolo a que pueden provocar daños considerables en los equipos.

En la literatura científica se encuentra que a medida que la velocidad de operación aumenta, los coeficientes de rigidez pueden tomar valores negativos, los cuales pueden provocar la inestabilidad [1]. Estudios previos han demostrado que, con una adecuada presurización externa, se puede atenuar los niveles de vibración y modificar las propiedades dinámicas de la película de lubricante, al presurizar la chumacera (mediante la inyección de lubricante) los coeficientes de rigidez y amortiguamiento que hay en la película de aceite cambian [2]. Al lograr modificar dichas propiedades dinámicas de la película de aceite, se obtiene como resultado que las vibraciones puedan disminuir de forma considerable. Para poder modificar de manera adecuada estas propiedades se debe estudiar el comportamiento de la película de aceite en el interior de la chumacera [3]. Las propiedades dentro de la película de lubricante cambian dependiendo de su posición angular y de la presurización externa, la cual puede alterar significativamente la velocidad umbral de estabilidad [4], [5]. Existen problemas de inestabilidad de maquinaria rotatoria conocidos en la literatura científica, cada uno de los problemas puede ocasionar vibraciones de alta amplitud. Por lo anterior resulta de gran importancia que las inestabilidades vibratorias se pueden evitar con una adecuada inyección (presurización) de aceite lubricante.

Índice

Capítulo 1. Introducción.....	1
Capítulo 2. Estado del arte	4
2.1 Rotodinámica y sus antecedentes.....	4
2.2 Estudios realizados por BENTLY NEVADA.....	6
Capítulo 3. Marco teórico.....	8
3.1 Documentación de inestabilidad en los equipos rotatorios	8
3.2 Rotor de Jeffcott.....	8
3.3 Efectos giroscópicos	12
3.4 Tribología.....	15
3.4.1 Espesor de la película de lubricación	17
3.5 Tipos de chumaceras.....	17
3.5.1 Diseño de chumaceras hidrodinámicas con presurización externa.....	18
3.6 Ecuación de Reynolds.....	19
3.6.1 La ecuación de la lubricación de Reynolds.....	19
3.7 Modelos clásicos de chumacera.....	23
3.7.1 Chumacera corta	23
3.7.2 Chumacera larga	24
3.8 Nuevo modelo de presurización para una chumacera corta con puertos puntuales de presurización	25
Capítulo 4. Campos de presión y posición de equilibrio.....	29
4.1 Modelo no presurizado, chumacera corta (caso clásico).....	29
4.2 Modelo presurizado, chumacera corta	31
4.3 Nuevos campos de presión para una chumacera corta con los puertos de inyección ubicados a ($\beta = 2\pi/3$ y $\pi/3$)	33
4.4 Locus (posición) de equilibrio de la chumacera híbrida.....	35
4.4.1 Fuerzas en la Película de Aceite	36
4.4.2 Fuerzas de presión en la chumacera corta no presurizada.....	38
4.4.3 Locus de equilibrio para chumaceras no presurizadas	38
4.4.4 Fuerzas de presión en la chumacera corta presurizada.....	39
4.4.5 Locus de equilibrio de una chumacera presurizada.....	41

4.5 Solución del modelo matemático que determina el locus de equilibrio para ($\beta = 2\pi/3$ y $\pi/3$)	42
Capítulo 5. Determinación de los coeficientes rotodinámicos (rigidez y amortiguamiento)	49
5.1 Cálculo analítico para los coeficientes rotodinámicos para el caso clásico	50
5.2 Cálculo analítico para los coeficientes rotodinámicos para el caso presurizado	53
5.3 Coeficientes rotodinámicos de una chumacera hidrodinámica presurizada en las posiciones ($\beta = 2\pi/3$ y $\pi/3$)	57
Capítulo 6. Velocidad umbral de estabilidad.....	72
6.1 Modelo matemático para determinar la velocidad umbral de estabilidad (criterio de Lienard-Chipard)	72
6.2 Velocidad umbral de estabilidad de una chumacera hidrodinámica presurizada para ($\beta = 2\pi/3$ y $\pi/3$)	74
Capítulo 7. Conclusiones.....	79
Referencias.....	81

Índice de figuras

Figura 1. Turbina de vapor de Siemens para generación de energía.....	1
Figura 2. Accidente derivado de una turbina de vapor.....	2
Figura 3. Sistema rotatorio.....	2
Figura 4. Configuración utilizada por BENTLY NEVADA para una chumacera presurizada.	6
Figura 5. Modelo de Rotor de Jeffcott en el plano y-z.....	9
Figura 6. Vista lateral de un Rotor de Jeffcott.	10
Figura 7. Sección transversal de eje.....	10
Figura 8. La amplitud en estado estable.....	12
Figura 9. Ángulos de Euler.	13
Figura 10. Aplicación de la Tribología.	15
Figura 11. Configuración típica de empuje.....	16
Figura 12. Esquema de muñón y chumacera con la película de aceite.	18
Figura 13. Vista transversal de una chumacera hidrodinámica.....	20
Figura 14. Vista de una chumacera, resaltando los valores “D” y “L”; sumamente importante para su clasificación.....	23
Figura 15. Sistema de coordenadas fijo dado por (XYZ) de una chumacera móvil (X', Y', Z') del muñón [1].	26
Figura 16. Ubicación del punto de inyección de aceite lubricante en la chumacera [1].	26
Figura 17. Campo de presión clásico (no presurizado) en una chumacera corta como función de las coordenadas axial y circunferencial respectivamente, para $\epsilon = 0.3$ y $(L/D) = 1/4$	30
Figura 18. Campo de presión aproximado, $\bar{n} = 10$; $\beta=180^\circ$; $S=2.30$; $\epsilon=0.4451$; $f_{prt}=10$; $a = 0$; $\varphi=57.66^\circ$; $L/D=1/4$	32
Figura 19. Campo de presión total aproximado, $\bar{n} = 10$; $\beta=0^\circ$; $S=1.30$; $\epsilon=0.5259$; $f_{prt}=5$; $a=0$; $\varphi=51.78^\circ$; $L/D=1/4$	32
Figura 20. Sección trasversal de una chumacera corta presurizada con los puertos de inyección de lubricante colocados en un plano simétrico.	33
Figura 21. Campo de presión total aproximado (inyección a 120°) $\beta=2\pi/3$; $\epsilon=0.35$; $f_{prt}=10$; $\varphi=58.37^\circ$; $L/D=1/4$	34

Figura 22. Campo de presión total aproximado (inyección a 60°) $\beta=\pi/3$; $\varepsilon=0.5$; $f_{prt}=10$; $\varphi=29.02^\circ$; $L/D=1/4$ 34

Figura 23. Caracterización de una Chumacera [18], [30]. 35

Figura 24. Representación esquemática de los ejes coordenados X-Y para la solución analítica [1].
..... 36

Figura 25. Propiedades dinámicas de rigidez y amortiguamiento (coeficientes rotodinámicos) de la película aceite lubricante de la chumacera hidrodinámica en el sistema coordenado xy [1]. 50

Figura 26. Descomposición de fuerzas de la película de lubricante en una chumacera hidrodinámica [1]. 51

Figura 27. Coeficientes rotodinámicos de **rigidez** para una chumacera corta presurizada. Inyección superior (inyección a 120°); $L/D=1/4$, $f_{prt} = 5$ 61

Figura 28. Coeficientes rotodinámicos de **amortiguamiento** para una chumacera corta presurizada. Inyección superior (inyección a 120°); $L/D=1/4$, $f_{prt} = 5$ 61

Figura 29. Coeficientes rotodinámicos de **rigidez** para una chumacera corta presurizada. Inyección superior (inyección a 120°); $L/D=1/4$, $f_{prt} = 20$ 62

Figura 30. Coeficientes rotodinámicos de **amortiguamiento** para una chumacera corta presurizada. Inyección superior (inyección a 120°); $L/D=1/4$, $f_{prt} = 20$ 62

Figura 31. Coeficientes rotodinámicos de **rigidez** para una chumacera corta presurizada. Inyección superior (inyección a 120°); $L/D=1/4$, $f_{prt} = 100$ 63

Figura 32. Coeficientes rotodinámicos de **amortiguamiento** para una chumacera corta presurizada. Inyección superior (inyección a 120°); $L/D=1/4$, $f_{prt} = 100$ 63

Figura 33. Coeficientes rotodinámicos de **rigidez** para una chumacera corta presurizada. Inyección inferior (inyección a 60°); $L/D=1/4$, $f_{prt} = 5$ 68

Figura 34. Coeficientes rotodinámicos de **amortiguamiento** para una chumacera corta presurizada. Inyección inferior (inyección a 60°); $L/D=1/4$, $f_{prt} = 5$ 68

Figura 35. Coeficientes rotodinámicos de **rigidez** para una chumacera corta presurizada. Inyección inferior (inyección a 60°); $L/D=1/4$, $f_{prt} = 20$ 69

Figura 36. Coeficientes rotodinámicos de **amortiguamiento** para una chumacera corta presurizada. Inyección inferior (inyección a 60°); $L/D=1/4$, $f_{prt} = 20$ 69

Figura 37. Coeficientes rotodinámicos de **rigidez** para una chumacera corta presurizada. Inyección inferior (inyección a 60°); $L/D=1/4$, $f_{prt} = 50$ 70

Figura 38. Coeficientes rotodinámicos de **amortiguamiento** para una chumacera corta presurizada. Inyección inferior (inyección a 60°); $L/D=1/4$, $f_{prt} = 50$ 70

Figura 39. Velocidad umbral de estabilidad contra el número de Sommerferld para un rotor rígido soportado por chumaceras cortas con presurización externa de lubricante, para diversos valores de fuerza de presurización. $L/D = 1/4$ 76

Figura 40. Velocidad umbral de estabilidad contra el número de Sommerferld para un rotor rígido soportado por chumaceras cortas con presurización externa de lubricante, para diversos valores de fuerza de presurización. $L/D = 1/4$ 78

Índice de tablas

Tabla 1. Condiciones necesarias para que una chumacera se considere corta para diversos autores.	25
Tabla 2. Puerto de inyección Superior, $(L/D) = 1/4$. Número de Sommerfeld y ángulo de actitud como función de la excentricidad de equilibrio, y fuerza de presurización de una chumacera corta presurizada.	44
Tabla 3. Puerto de inyección Superior, $(L/D) = 1/4$. Valores de excentricidad y ángulo de actitud como función del número de Sommerfeld de una chumacera corta presurizada en la parte superior. Esta tabla es el resultado de la interpolación de la tabla 2.	45
Tabla 4. Puerto de inyección Inferior, $(L/D) = 1/4$. Número de Sommerfeld y ángulo de actitud como función de la excentricidad de equilibrio, y fuerza de presurización de una chumacera corta presurizada.	46
Tabla 5. Puerto de inyección Inferior, $(L/D) = 1/4$. Valores de excentricidad y ángulo de actitud como función del número de Sommerfeld de una chumacera corta presurizada en la parte inferior. Esta tabla es el resultado de la interpolación de la tabla 4.	47
Tabla 6. Coeficientes rotodinámicos (rigidez y amortiguamiento) de la película de aceite lubricante de una chumacera corta (caso clásico) en el sistema de coordenadas X-Y.....	53
Tabla 7. Coeficientes rotodinámicos (rigidez y amortiguamiento) de la película de aceite lubricante de una chumacera corta (caso presurizado externamente) cuya ubicación axial (a) y angular (β) es arbitraria en el sistema de coordenadas X-Y.....	56
Tabla 8. Puerto de inyección Superior, $(L/D) = 1/4$. $f_{prt} = 0$; $\beta = 2\pi/3$	57
Tabla 9. Puerto de inyección Superior, $(L/D) = 1/4$. $f_{prt} = 1$; $\beta = 2\pi/3$	58
Tabla 10. Puerto de inyección Superior, $(L/D) = 1/4$. $f_{prt} = 5$; $\beta = 2\pi/3$	58
Tabla 11. Puerto de inyección Superior, $(L/D) = 1/4$. $f_{prt} = 10$; $\beta = 2\pi/3$	59
Tabla 12. Puerto de inyección Superior, $(L/D) = 1/4$. $f_{prt} = 20$; $\beta = 2\pi/3$	59
Tabla 13. Puerto de inyección Superior, $(L/D) = 1/4$. $f_{prt} = 50$; $\beta = 2\pi/3$	60
Tabla 14. Puerto de inyección Superior $(L/D) = 1/4$. $f_{prt} = 100$; $\beta = 2\pi/3$	60
Tabla 15. Puerto de inyección Inferior, $(L/D) = 1/4$. $f_{prt} = 0$; $\beta = \pi/3$	64
Tabla 16. Puerto de inyección Inferior, $(L/D) = 1/4$. $f_{prt} = 1$; $\beta = \pi/3$	64
Tabla 17. Puerto de inyección Inferior, $(L/D) = 1/4$. $f_{prt} = 5$; $\beta = \pi/3$	65

Tabla 18. Puerto de inyección Inferior, $(L/D) = 1/4$. $f_{prt} = 10$; $\beta = \pi/3$	65
Tabla 19. Puerto de inyección Inferior, $(L/D) = 1/4$. $f_{prt} = 20$; $\beta = \pi/3$	66
Tabla 20. Puerto de inyección Inferior, $(L/D) = 1/4$. $f_{prt} = 50$; $\beta = \pi/3$	66
Tabla 21. Puerto de inyección Inferior, $(L/D) = 1/4$. $f_{prt} = 100$; $\beta = \pi/3$	67
Tabla 22. Valores de excentricidad de equilibrio (ϵ) y velocidad umbral de estabilidad (P_{umbral}^2) para diferentes fuerzas de presurización (f_{prt}), dado un número de Sommerfeld. Inyección Superior $(L/D) = 1/4$	75
Tabla 23. Valores de excentricidad de equilibrio (ϵ) y velocidad umbral de estabilidad (P_{umbral}^2) para diferentes fuerzas de presurización (f_{prt}), dado un número de Sommerfeld. Inyección Inferior $(L/D) = 1/4$	77

NOMENCLATURA

p : Presión.

θ : Coordenada angular.

h : Espesor adimensional de la película de fluido de lubricante.

R : Radio de chumacera.

W : Peso total del sistema.

z : Coordenada axial de chumacera.

μ : Viscosidad dinámica.

C_r : Claro radial.

ε : Excentricidad adimensional.

ω : Velocidad angular.

φ : Angulo de equilibrio

β : Coordenada angular del puerto de inyección.

$\delta(x)$: Función Delta de Dirac.

m : Masa del disco.

N : Velocidad angular en revoluciones por segundo

L : Longitud axial de la chumacera.

D : Diámetro de la chumacera.

q_{prt} : Presión dimensional en un puerto puntual respecto de la fuerza ficticia característica.

f_{prt} : Fuerza de presión adimensional en un puerto puntual de inyección respecto al peso.

φ_{pres} : Ángulo de equilibrio en una chumacera presurizada.

\bar{z} : Coordenada axial, (adimensional).

\bar{p} : Presión, (adimensional).

p_{dim} : Presión ficticia característica.

ΔF_{pres} : Fuerza total de presurización.

Δ_s : Área del puerto puntual de inyección.

Δ_p : Presión de inyección de lubricante.

\bar{p}_{pres} : Presión adimensional en la película de aceite debido a la inyección de lubricante.

\bar{p}_{ocv} : Presión adimensional de la solución de Ocirk.

p_{fict} : Presión ficticia.

ε_{ocv} : Excentricidad de la solución de Ocirk.

ε_{pres} : Excentricidad en una chumacera presurizada.

F_{dim} : Fuerza ficticia característica.

a : Posición adimensional, arbitraria y axial del puerto de inyección en la chumacera.

S : Número de Sommerfeld.

\bar{q}_{prt} : Presión adimensional en un puerto respecto a la fuerza ficticia característica.

- $F_{X,ocv}$: Componente vertical de la fuerza en la película de aceite en la solución de Ocvirk.
 $F_{Y,ocv}$: Componente horizontal de la fuerza en la película de aceite en la solución de Ocvirk.
 $F_{X,pres}$: Componente vertical de la fuerza en la película de aceite debida a la presurización.
 $F_{Y,pres}$: Componente horizontal de la fuerza en la película de aceite debida a la presurización.
 $F_{X,result}$: Fuerza resultante vertical en la película de aceite.
 $F_{Y,result}$: Fuerza resultante horizontal en la película de aceite.
 F_R : Componente radial de la fuerza de presión en la película de aceite.
 F_T : Componente tangencial de la fuerza de presión en la película de aceite.
 \bar{F}_R : Componente radial de la fuerza adimensional de presión en la película de aceite.
 \bar{F}_T : Componente tangencial de la fuerza adimensional de presión en la película de aceite.
 f_{prt} : Fuerza de presión adimensional en un puerto puntual de inyección respecto del peso.
 f_T : Componente tangencial de la fuerza adimensional de presión en la película de aceite.
 f_R : Componente radial de la fuerza adimensional de presión en la película de aceite.
 \hat{f}_T : Componente tangencial de la fuerza adimensional debida a la presurización externa.
 \hat{f}_R : Componente radial de la fuerza adimensional debida a la presurización externa.
 \hat{f}_x : Componente vertical de la fuerza adimensional debida a la presurización externa.
 \hat{f}_y : Componente horizontal de la fuerza adimensional debida a la presurización externa.
 K : Coeficientes de rigidez directos y acoplados en las direcciones radiales y tangenciales.
 C : Coeficientes de amortiguamiento directos y acoplados en las direcciones radiales y tangenciales.
 \bar{K} : Coeficientes adimensionales de rigidez directos y acoplados en las direcciones horizontales y verticales.
 \bar{C} : Coeficientes adimensionales de amortiguamiento directos y acoplados en las direcciones horizontales y verticales.
 \tilde{K}_{ocv} : Coeficientes adimensionales de rigidez directos y acoplados en las direcciones horizontales y verticales, debido a la presurización clásica.
 \tilde{C}_{ocv} : Coeficientes adimensionales de amortiguamiento directos y acoplados en las direcciones horizontales y verticales, debido a la presurización clásica.
 \tilde{K}_{pres} : Coeficientes adimensionales de rigidez directos y acoplados en las direcciones horizontales y verticales, debido a la presurización externa.
 \tilde{C}_{pres} : Coeficientes adimensionales de amortiguamiento directos y acoplados en las direcciones horizontales y verticales, debido a la presurización externa.
 λ : Valor propio.
 p^2 : Cuadrado de la velocidad de estabilidad.
 p_{umbral} : Velocidad umbral de estabilidad.

Capítulo 1. Introducción

En la actualidad la industria automotriz, petrolera, nuclear, mareomotriz, eólica ha incrementado con el propósito de satisfacer la demanda energética. Esto conlleva al diseño de grandes máquinas rotatorias las cuales desarrollan grandes velocidades de operación. Debido a lo anterior toda máquina rotatoria montada sobre chumaceras hidrodinámicas (bombas, turbinas, compresores, etc.), está expuesta a sufrir vibraciones causando desgaste excesivo y daños considerables en los equipos, los mantenimientos correctivos de estos, generan costos elevados para la industria, esto debido al incremento en el uso de equipo rotatorio o turbomáquinas [1]. Es por ello que la industria requiere de métodos eficaces para el estudio de equipos rotatorios, ya que un accidente derivado de la ruptura de un rotor sería un daño severo. Un ejemplo muy claro es: una turbina de vapor (figura 1) puede llegar a pesar más de 30 toneladas y tener una velocidad de giro de 3000 -3600 rpm, si algún elemento de dicha turbina saliera expulsado debido a las vibraciones (entre más inestable sea un equipo, es más susceptible a tener altas vibraciones), la energía contenida en el elemento expulsado sería suficientemente grande para causar daños irreversibles (figura 2).



Figura 1. Turbina de vapor de Siemens para generación de energía.





Figura 2. Accidente derivado de una turbina de vapor.

Debido a la importancia que esto genera han surgido nuevas especialidades que buscan la mejora en esta área, la Rotodinámica es una de ellas. En términos generales se entiende que la rotodinámica es la disciplina que analiza el comportamiento dinámico de maquinaria rotatoria o turbo-maquinaria, la cual es la combinación de áreas tales como: vibraciones, dinámica y mecánica de fluidos, figura 3

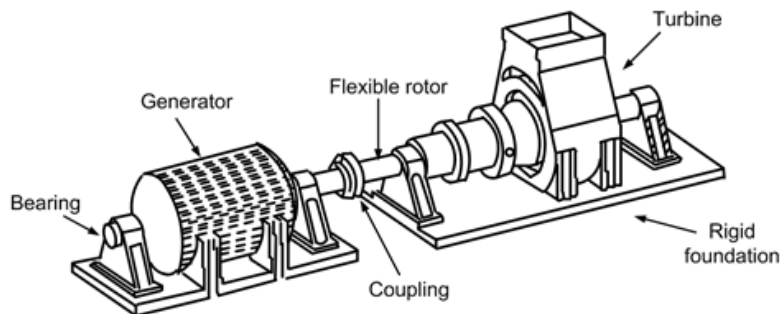


Figura 3. Sistema rotatorio.

Las características rotodinámicas de una turbo-máquina son influenciadas fuertemente por las chumaceras sobre las cuales se soporta para operar. Las chumaceras de película fluida son utilizadas para la operación industrial de maquinaria rotatoria pesada. La película de lubricante que se encuentra dentro de la chumacera presenta propiedades de amortiguamiento y rigidez; las cuales pueden alterar significativamente a la máquina en sus velocidades críticas y además pueden inducir inestabilidades [1]. Todas las inestabilidades vibratorias



pueden evitarse cuando la maquinaria es operada adecuadamente junto con un buen diseño mecánico, sin embargo el deterioro del equipo sumado aun mantenimiento inadecuado o poco frecuente pueden ser los principales responsables de que maquinaria que opera normal y estable se convierta en una problemática para la industria. Con este propósito y con la investigación en los años siguientes este trabajo tiene la oportunidad de mejora en el diseño de chumaceras hidrodinámicas.



Capítulo 2. Estado del arte

2.1 Rotodinámica y sus antecedentes

La rotodinámica estudia el comportamiento de los rotores, pero al igual que toda investigación ha pasado por un proceso para alcanzar un mejor conocimiento de los fenómenos que se presentan al trabajar con turbomaquinaria.

A finales del siglo XIX la teoría de vibraciones inicio su desarrollo. En ese tiempo también comenzó la construcción de maquinaria de alta velocidad, principalmente en el desarrollo de locomotoras y turbinas de vapor. DeLaval fue el primer investigador que experimento con rotores de turbinas a velocidades de hasta 30,000 rpm (revoluciones por minuto), es decir, a una velocidad de operación por arriba de la primera velocidad critica de la máquina. Diversos investigadores han publicado análisis y conclusiones con relación a la rotodinámica. La publicación “Centrifugal force in the rotation axes” publicado en The Engineer en 1869 por Rankine [6] es considerado la primera publicación completamente dedicada a la rotodinámica. La explicación de la teoría de velocidades críticas fue dada primero por Föppl (1895) [7].

La vibración lateral en ejes fue anticipada por W.A. Rankine, quien mencionó erróneamente que la operación del eje por arriba de la velocidad critica era imposible [6]. Durkeley y Reynolds realizaron extensas investigaciones analíticas [8]. Fue entonces a finales del siglo XIX cuando DeLaval construyó la primera etapa de una turbina de vapor de reacción. Él fue el primero en utilizar un rotor rígido y posteriormente usó un rotor flexible y observó que era posible operar por encima de la velocidad crítica, operando a una velocidad de siete veces la velocidad crítica [9], contradiciendo en la práctica las predicciones de Rankine.

Henry Homan Jeffcott (1877-1937) publica un artículo relacionado con la teoría fundamental en rotodinámica en el año de 1919 [10], es acreditado como el desarrollador de las ecuaciones modernas en un rotor dinámico, mejor conocido como “Modelo de Jeffcott” el cual es usado en el análisis de vibraciones de ejes rotatorios. El modelo consiste de un eje uniforme y simétrico soportado por chumaceras rígidas en cada extremo, con una masa en el centro [11].



En 1920 las industrias de las turbinas diseñaron máquinas para operar con cargas más altas, y por ende a velocidades por arriba de la velocidad crítica fundamental; debido a esto los problemas modernos de la rotodinámica aparecieron, algunos de ellos fueron estudiados por B.L. Newkirk [12] y por A.T. Kimball [13].

En 1924, Stodola [14] presentó la influencia de los efectos giroscópicos. Green 1948, dio continuidad a trabajos con un rotor de 4grados de libertad donde se presentaban efectos giroscópicos [15].

En la actualidad (2004), Nossov, V., Ramírez, I., Rivera, D. y Gómez, J. analizaron el comportamiento de una chumacera corta que se presuriza externamente, por consecuencia las propiedades dinámicas de la película de aceite son distintas. La presurización fue modelada con la función Delta de Dirac cuyas propiedades hacen una simplificación notable de los cálculos. Así será posible determinar las características dinámicas y los diferentes campos de presión generados por la película de lubricante dentro de la chumacera hidrodinámica [16].

En 2006, Antonio, G.A [17] propone expresiones de la velocidad de estabilidad en función de la excentricidad cuando es utilizado el modelo de Jeffcott para rotores de eje rígido flexible. Para la determinación de las velocidades de umbral, se utilizó el criterio de estabilidad de Lienard-Chipard.

En 2007, Ramírez, I., desarrolló una teoría de chumaceras presurizadas con puertos puntuales, la cual predice el comportamiento de soportes con inyección de lubricante [1].

En 2012 Nossov, V., Ramírez, I., Rivera, D. y Gómez, J. presentaron un artículo sobre el análisis de estabilidad para una chumacera híbrida corta con puertos de inyección de lubricante colocados horizontalmente en Y. Por medio de métodos analíticos y con ayuda de soluciones de nuevos modelos matemáticos representando el comportamiento dinámico de los cojinetes, obtuvieron la velocidad máxima de operación que puede alcanzar el rotor antes de que ocurra la inestabilidad en el sistema. Obteniendo los campos de presión que se generan en la película de lubricante dentro de la chumacera hidrodinámica [18].



Actualmente existen trabajos de análisis de vibración a un rotor apoyado en chumaceras hidrodinámicas, dicha investigación fue realizado por Ramírez, I., Palacios, L. y Corro. H. [19], donde se propone un modelo de elemento finito (FEM) para la obtención de la respuesta vibratoria de un rotor y se prueba mediante el caso clásico del rotor de Jeffcott (2013).

En el año 2013 Ramírez, I., García, A. y De La Rosa. C. [20] desarrollaron un método alternativo para caracterizar una chumacera hidrodinámica. Partiendo de la ecuación general de la lubricación de Reynolds. Dicho método consistió en inducir una perturbación en el centro del muñón que permitió encontrar presiones parciales, con la intención de poder manipularlas para determinar los coeficientes rotodinámicos de rigidez y amortiguamiento.

2.2 Estudios realizados por BENTLY NEVADA.

Actualmente existen compañías dedicadas a la fabricación e investigación experimental del equipo rotatorio, una de ellas es BENTLY-NEVADA en EUA; de gran importancia ha sido este trabajo ya que ha realizado experimentos con rotores de laboratorio que consisten en presurizar externamente a una chumacera colocando los puertos de inyección en forma simétrica [21].

En la figura 4 se muestra una chumacera presurizada con cuatro puertos de inyección, esta configuración es la que BENTLY usa para realizar sus experimentos.

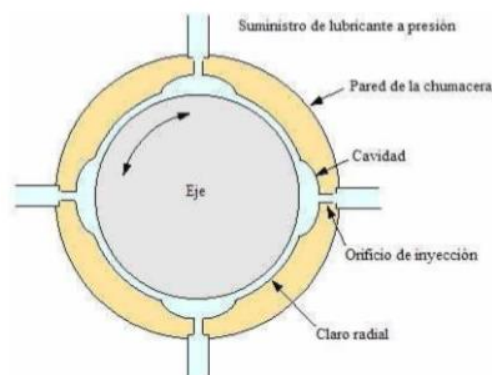


Figura 4. Configuración utilizada por BENTLY NEVADA para una chumacera presurizada.



El objetivo principal de Donald Bently (actualmente es responsable de esta compañía) al usar este arreglo es tratar de que la presurización externa haga que el muñón se mantenga lo más cerca del centro geométrico de la chumacera y de esta manera el eje no tenga oscilaciones importantes [1].

En el año 2002 Bently junto con Hatch y Grissom publicaron el libro: *Fundamentals of Rotating Machinery Diagnostics* [21], el cual tiene por objetivo mostrar los aspectos prácticos más relevantes de la rotodinámica, haciendo énfasis en el diagnóstico de turbomáquinas.

En este libro hay un capítulo que por primera vez aparece como tal en la literatura internacional, el cual lleva por título: *Externally Pressurized and Machinery Diagnostic*; entre las conclusiones más destacadas que aparecen, se pueden citar:

- 1) Al presurizar externamente, las rigideces de las chumaceras se incrementan notablemente.
- 2) La presurización puede producir inestabilidad.
- 3) Bajo ciertas condiciones la presurización externa puede modificar las velocidades de resonancia.
- 4) Si se ajustan adecuadamente los puertos de inyección, se puede modificar la excentricidad de equilibrio.
- 5) La variación de la presión puede permitir establecer un control adecuado de las rigideces en la chumacera, el control se puede hacer en uno más puertos de inyección [21].



Capítulo 3. Marco teórico

3.1 Documentación de inestabilidad en los equipos rotatorios

En esta sección se tratan algunas causas que generan las vibraciones en los equipos rotatorios, algunas de ellas son:

- ✓ Desequilibrio de elementos rotativos; esta es una de las causas más probable de que exista vibración en las máquinas.
- ✓ Desalineación: es un problema muy común debido a la dificultad que supone alinear dos ejes y sus rodamientos de forma que no se originen fuerzas que produzcan vibraciones.
- ✓ Engranajes: Los problemas de engranaje que dan esta vibración son, desgaste excesivo de los dientes, fallos de lubricación, elementos extraños entre dientes.
- ✓ Problemas eléctricos: la vibración es creada por fuerzas que pueden ser causadas por la forma interna del elemento.
- ✓ Rodamientos: fallos en elementos del rodamiento dan vibración a unas frecuencias altas no relacionadas con la velocidad de rotación.

Los rodamientos son elementos importantes en la máquina y cuyo fallo puede dar problemas más graves, por eso es necesario tener un especial cuidado con ellos. Pueden fallar por errores en el montaje, lubricación inadecuada, defectos internos en la fabricación, corriente eléctrica, desalineación, rodamiento no preparado para la carga que soporta. Estas son las causas más comunes de fallo.

3.2 Rotor de Jeffcott

Los sistemas dinámicos de rotor tienen dinámicas complejas para las cuales las soluciones analíticas solo se pueden obtener en los casos más simples. Con la potencia de cálculo que está fácilmente disponible en los días modernos, las soluciones numéricas para el análisis rotodinámico 2D e incluso 3D se han convertido en el estándar. La teoría de la vibración para



el sistema de dinámica del rotor fue desarrollada por August Föppl en 1895 y Henry Homan Jeffcot en 1919 [10]. Empleando un sistema simplificado de rotor / cojinete desarrollaron la teoría básica sobre predicción y atenuación de la vibración del rotor. Este sistema simplificado de rotor / cojinete, que comúnmente se conoce como rotor Föppl / Jeffcot, o simplemente rotor Jeffcot (modelo fundamental de un rotor simplificado con un disco a la mitad de la flecha) es utilizado como modelo teórico-experimental para el estudio de turbomaquinaria, figura 5.

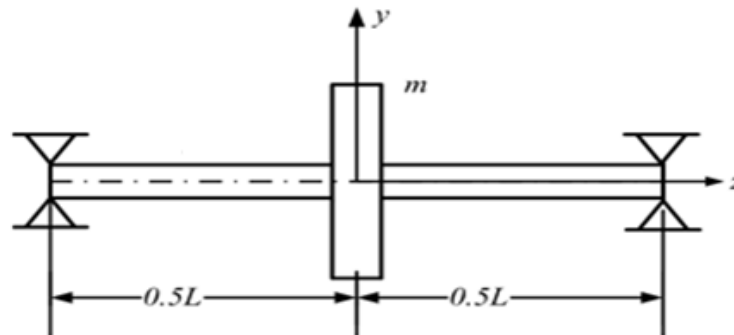


Figura 5. Modelo de Rotor de Jeffcott en el plano y-z.

La figura 6 y 7 ilustra el rotor Jeffcott de masa única con rodamientos rígidos. El disco del rotor con masa m se encuentra en el centro axial del eje. Se supone que la masa del eje en el rotor Jeffcot es insignificante en comparación con la del disco, y por lo tanto se considera que no tiene masa durante el análisis, el radio r es pequeño.

El centro geométrico del disco C está ubicado en el punto (U_{xC}, U_{yC}) a lo largo del eje de coordenadas definido sobre la línea central del rodamiento, y la masa G del centro del disco está ubicada en (U_{xG}, U_{yG}) . La excentricidad de desequilibrio e_u es el vector que, conecta el punto C y G , y representa el desequilibrio en el disco del rotor. La velocidad de rotación del disco / eje viene dada por ω , y sin pérdida de generalidad supondremos que e_u es paralelo con el eje x en el tiempo inicial $t = 0$. [1], [22], [23].



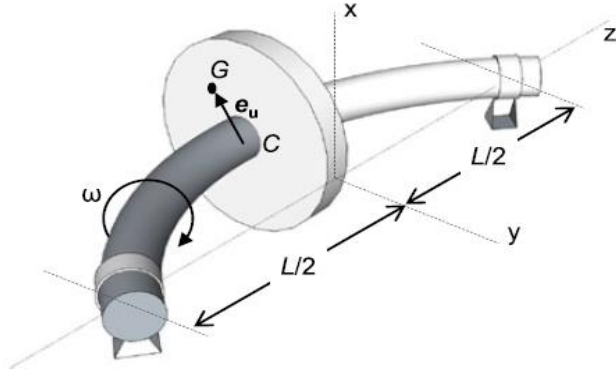


Figura 6. Vista lateral de un Rotor de Jeffcott.

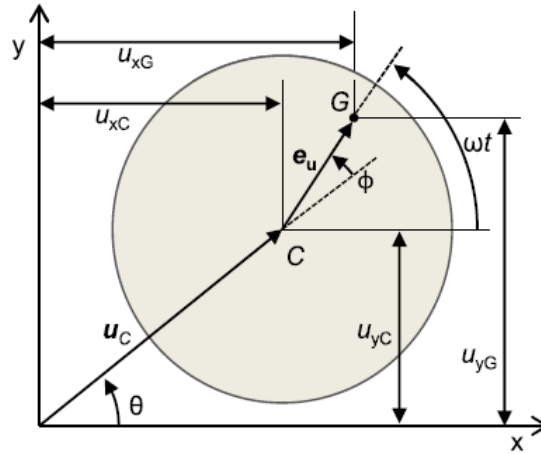


Figura 7. Sección transversal de eje.

Finalmente, U_C es el vector de desplazamiento con el ángulo de fase θ que conecta el origen y el punto C, y ϕ se definen como el ángulo entre los vectores U_C y e_u .

Las ecuaciones dinámicas para el rotor Föppl / Jeffcott se obtienen aplicando la ley de Newton al disco del rotor [22], [23]. Con la suposición de que el eje no tiene masa, la fuerza que actúa sobre el disco es la fuerza de inercia y la fuerza de rigidez / amortiguación generada por la deformación lateral del eje. Las ecuaciones laterales del movimiento en los ejes x y como se muestra en la figura 7, entonces las ecuaciones de movimiento quedan:

$$m\ddot{u}_{xG} = -k_s u_{xC} - c_s \dot{u}_{xC} \quad (3.1)$$

$$m\ddot{u}_{yG} = -k_s u_{yC} - c_s \dot{u}_{yC} \quad (3.2)$$



Donde (U_{xC}, U_{yC}) y (U_{xG}, U_{yG}) son las coordenadas del centro geométrico y el centro de masa, respectivamente. Las coordenadas del centro de masa del disco pueden reescribirse en términos de su centro geométrico C y el ángulo de rotación del rotor ωt en el tiempo t . Entonces la solución del sistema es:

$$u_{xG} = u_{xC} + e_u \cos(\omega t) \quad (3.3)$$

$$u_{yG} = u_{yC} + e_u \sin(\omega t) \quad (3.4)$$

Sustituyendo la segunda derivada de las ecuaciones (3.3) y (3.4) en las ecuaciones (3.1) y (3.2), obtenemos las ecuaciones de movimiento para el rotor Föppl / Jeffcott (con desbalance) en términos del centro geométrico del disco como:

$$m\ddot{u}_{xC} + k_s u_{xC} + c_s \dot{u}_{xC} = m e_u \omega^2 \cos(\omega t) \quad (3.5)$$

$$m\ddot{u}_{yC} + k_s u_{yC} + c_s \dot{u}_{yC} = m e_u \omega^2 \sin(\omega t) \quad (3.6)$$

Finalmente, consideramos la respuesta forzada del rotor Jeffcott con una excentricidad de masa distinta de cero.

La relación de amplitud adimensional $|U| / e_u$ se representa gráficamente en la figura 8. Sobre la relación de frecuencia fr para diferentes valores de relación de amortiguamiento. Para frecuencias muy bajas, la relación de amplitud es casi cero ya que las fuerzas de desequilibrio son pequeñas.



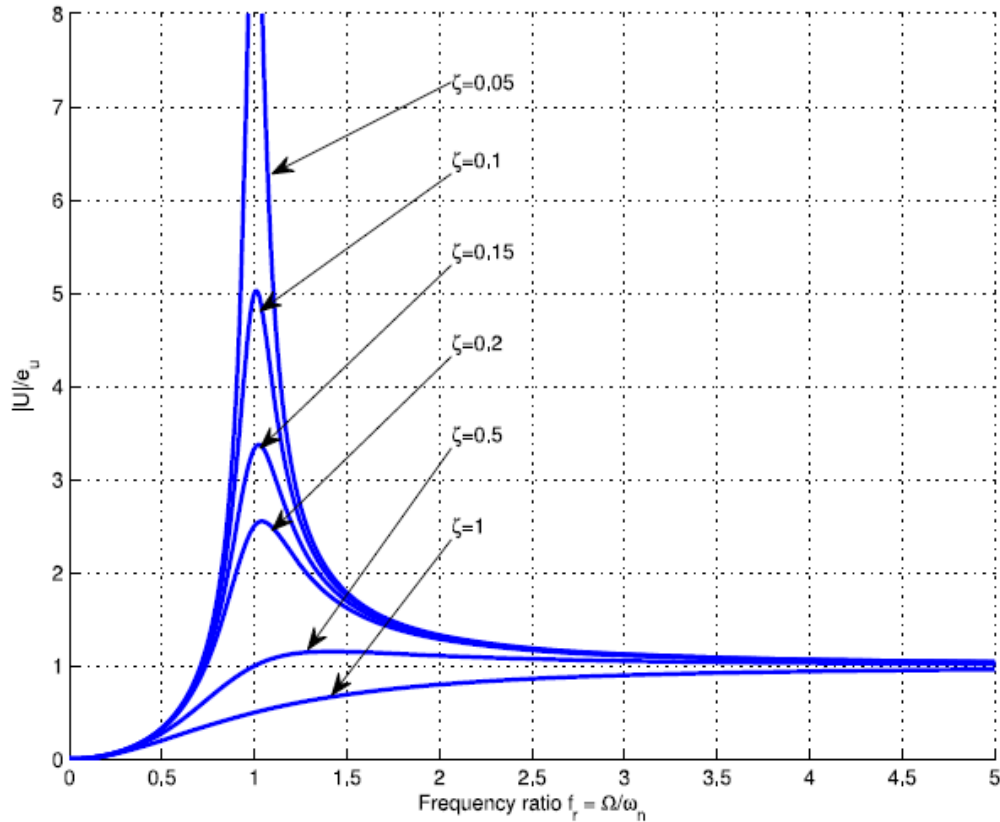


Figura 8. La amplitud en estado estable.

A medida que aumenta la velocidad del eje, la amplitud muestra un pico cada vez más grande cerca de $f_r = 1$ cuando ω está cerca de la frecuencia de resonancia del sistema.

3.3 Efectos giroscópicos

Si el rotor tiene un momento de inercia sustancial sobre su diámetro y un movimiento de cuerpo rígido general, cambiar la orientación de su eje requiere la aplicación de momentos considerables a altas velocidades. Se sabe que esto influye en las velocidades críticas de los rotores de alta velocidad, convirtiéndolos en funciones de la velocidad de rotación y generando velocidades nuevas. Los momentos giroscópicos afectan la dinámica del sistema, ya que la adición de rodamientos flexibles permite que el eje de rotación del eje se desvíe de la línea central del rodamiento [22].



Se sabe por dinámica que la posición del disco se puede definir por medio de las coordenadas de su centro de masa, más los tres ángulos, llamados ángulos de Euler (figura 9).

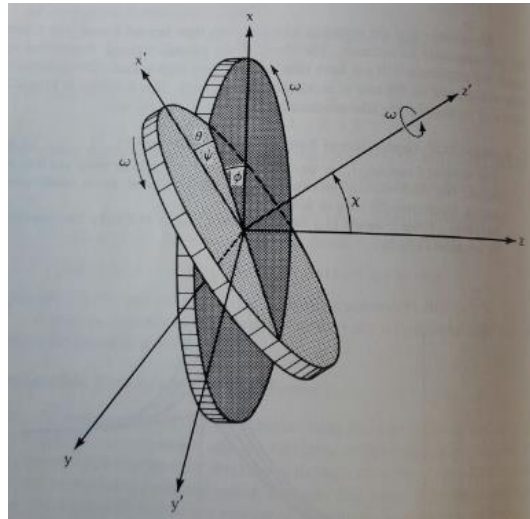


Figura 9. Ángulos de Euler.

La inclinación de un eje giratorio en relación con el eje de rotación genera fuerzas de perturbación giroscópicas.

Las ecuaciones de movimiento para la traslación y rotación del rotor sobre su centro de masa pueden encontrarse una vez más como en la Sección 3.2 mediante el uso de la ley de movimiento de Newton. Las ecuaciones resultantes son [22]:

$$m\ddot{x}_G + \alpha x_G - \gamma\theta_{yG} = 0 \quad (3.7a)$$

$$m\ddot{y}_G + \alpha y_G - \gamma\theta_{xG} = 0 \quad (3.7b)$$

$$J_t\ddot{\theta}_{xG} + J_p\omega\dot{\theta}_{yG} + \gamma x_g + \delta\theta_{xG} = 0 \quad (3.7c)$$

$$J_t\ddot{\theta}_{yG} - J_p\omega\dot{\theta}_{xG} + \gamma y_g + \delta\theta_{yG} = 0 \quad (3.7d)$$

Las primeras dos ecuaciones (3.7a) - (3.7d) describen la traslación lateral del rotor, y las dos últimas ecuaciones describen la dinámica angular. El segundo término en el lado izquierdo de la ecuación (3.7c) y ecuación (3.7d) es el momento giroscópico linealizado alrededor de los ejes x y respectivamente. Una característica importante de las ecuaciones dinámicas anteriores es que las dos ecuaciones de movimiento traslacional están desacopladas de las



ecuaciones de movimiento angular cuando γ es 0, en cuyo caso pueden resolverse por separado.

Las ecuaciones diferenciales (7a) - (7d) a veces se escriben en forma vectorial

$$M\ddot{X} + \omega G\dot{X} + KX = 0 \quad (3.8)$$

Donde el vector de estado generalizado es dado por:

$$X = \begin{bmatrix} x_G \\ y_g \\ \theta_{xG} \\ \theta_{yG} \end{bmatrix}, \quad (3.9)$$

Y la matriz de masa M, la matriz giroscópica G y la matriz de rigidez K están dadas por:

$$M = \begin{bmatrix} m & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & J_t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & J_t \end{bmatrix}, \quad (3.10)$$

$$G = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & J_p \\ 0 & 0 & -J_p & 0 \end{bmatrix}, \quad (3.11)$$

$$K = \begin{bmatrix} \alpha & 0 & 0 & \gamma \\ 0 & \alpha & \gamma & 0 \\ 0 & \gamma & \delta & 0 \\ \gamma & 0 & 0 & \delta \end{bmatrix}, \quad (3.12)$$

Respectivamente.

Notamos aquí que la matriz de masa siempre es diagonal, y la matriz de rigidez es diagonal cuando γ es cero. Por otro lado, la matriz giroscópica es sesgada simétrica, y representa el acoplamiento entre los movimientos en los ejes x y.



3.4 Tribología

La palabra tribología viene del griego tribos que significa “rozamiento”, el término de esta palabra se debe a tres factores en los materiales como: 1) Fricción, 2) Desgaste y 3) Lubricación, entre partes deslizantes, abarcando desde la tecnología aeroespacial hasta aplicaciones domésticas.

La tribología en una forma tradicional ha existido desde el comienzo de la historia registrada. Hay muchos ejemplos bien documentados de cómo las primeras civilizaciones desarrollaron rodamientos y superficies de baja fricción. El estudio científico de la tribología también tiene una larga historia, y se cree que muchas de las leyes básicas de la fricción, como la proporcionalidad entre la fuerza normal y la fuerza de fricción limitante, fueron desarrolladas por Leonardo Da Vinci a fines del siglo XV.

La tribología, que se centra en la fricción, que es la fuerza entre dos superficies en contacto, el desgaste como efecto natural de este fenómeno y la lubricación es un medio efectivo para controlar el desgaste y reducir la fricción [24].

Cabe mencionar que la tribología es una ciencia multidisciplinaria pues participan áreas como son la rotodinámica, física, química, matemáticas aplicadas, mecánica de sólidos, mecánica de fluidos, termodinámica, transferencia de calor, en pocas palabras la tribología está presente en todas partes donde existe contacto (figura 10).



Figura 10. Aplicación de la Tribología.

Tipos de lubricación

Se pueden distinguir tres tipos de lubricación.



- 1) **Lubricación Hidrostática:** consiste en bombear aceite a presión entre dos superficies, con el fin de separarlas de tal forma que no se requiere el movimiento relativo entre ellas para mantener la película lubricante. Este tipo de lubricación se emplea con mucha frecuencia en cojinetes lentos que soportan grandes cargas con ejes verticales y reciben el nombre de cojinetes hidrostáticos. Este tipo de lubricación se aplica en rodamientos de máquinas herramientas, taladros, giroscopios etc.

- 2) **Lubricación Hidrodinámica:** corresponde al presente caso de estudio ya que su aplicación se puede observar en las turbomáquinas. La lubricación hidrodinámica a veces se denomina lubricación por película fluida o película gruesa. Cuando un rodamiento comienza a moverse en la dirección longitudinal desde el reposo, una fina capa de fluido es atraída por el arrastre viscoso y luego se comprime entre las superficies del rodamiento, creando una presión suficiente (hidrodinámica) para soportar la carga sin un bombeo externo, este es el principio de la lubricación hidrodinámica, figura 11.

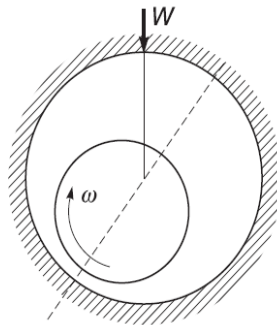


Figura 11. Configuración típica de empuje.

- 3) **Lubricación Elastohidrodinámica:** este tipo de lubricación ocurre en elementos altamente cargados donde la presión es tal que la deformación elástica de las superficies metálicas influye considerablemente en la formación del espesor de película.



3.4.1 Espesor de la película de lubricación

La lubricación de película fluida se divide en dos categorías:

Lubricación de película delgada: Es usualmente conocida como un contacto contra forma (este tipo de contacto provoca pérdida de material), principalmente en los rodamientos y engranes. El espesor de la película en estos contactos es del orden de 1 μm o menos y las condiciones son tales que la presión depende de la viscosidad y de la deformación elástica de las superficies de delimitación, ambos deben tenerse en cuenta.

Lubricación de película gruesa: Se encuentra en chumaceras con presurización externa, también llamadas chumaceras hidrostáticas, y en las chumaceras de acción automática, también llamadas chumaceras hidrodinámicas. De estas hay dos tipos de deslizamiento y chumaceras de empuje.

El espesor de la película en estas chumaceras de contacto conforme es por lo menos en el orden de magnitud mayor que en las chumaceras contra formales. En consecuencia, las presiones que prevalecen son de órdenes de magnitud pequeña, por lo que ni la dependencia de la presión respecto a la viscosidad ni a la deformación elástica de las superficies juega un papel importante. La disposición viscosa y el consiguiente calentamiento del lubricante siempre están presentes, y el cambio en la viscosidad debe tenerse en cuenta al analizar los problemas de lubricación de la película gruesa [25].

3.5 Tipos de chumaceras

Actualmente existen diversos tipos de cojinetes utilizados en maquinaria rotatoria. Su diseño depende del tipo de operación, carga y temperatura del sistema, se debe mencionar que actualmente no existe ningún diseño que funcione perfectamente pues los problemas vibratorios se presentan durante su puesta en marcha. Se mencionan los tipos de chumaceras existentes:

Chumacera hidrodinámica: son las chumaceras donde el lubricante se suministra en forma externa, la presión de soporte es generada por el movimiento del muñón, la inyección de lubricante regula las propiedades rotodinámicas de la chumacera. Las chumaceras operan



gracias a la película de aceite que ocupa el claro entre el muñón del eje y la propia chumacera. Esta película evita el roce de las piezas durante la operación y también carga el peso del rotor [1], tal y como se muestra en la Figura 12. Al diseñar las chumaceras hidrodinámicas los problemas de transmitir movimiento entre dos superficies concordantes, disminuir el desgaste, atenuar los fenómenos vibratorios producidos en las turbomáquinas y sustentar el peso total del sistema fueron solucionados.

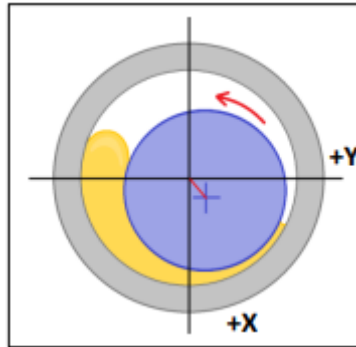


Figura 12. Esquema de muñón y chumacera con la película de aceite.

Chumaceras híbridas: una chumacera híbrida es un dispositivo mecánico de geometría cilíndrica que soporta esfuerzos radiales con recesos y que puede trabajar en ambos regímenes de presurización. El grado en el cual la chumacera híbrida exhibe una predominación entre características hidrostáticas o hidrodinámicas depende de la velocidad de rotación y de la excentricidad en la cual está operando.

3.5.1 Diseño de chumaceras hidrodinámicas con presurización externa

Las primeras teorías de comportamiento de las chumaceras de película fluida, asumían erróneamente que la carga del eje de rotación únicamente se aplicaba directamente a la parte estacionaria de la chumacera, el papel que tenía el fluido lubricante era solamente para disminuir la fricción. A finales del siglo XIX Beauchamp Tower desarrolló una serie de experimentos precisos para medir la presión del fluido (lubricante) en diferentes partes de la chumacera. Él llegó a la siguiente conclusión: “la distribución de presiones dentro de la película de aceite ocurre de tal manera que la película de aceite ejerce fuerzas de carga”. Así fue como se consideró por primera vez las chumaceras de película fluida como un sistema dinámico con características de rigidez y esto se debió a la primera medición de la película de aceite [26], [27].



3.6 Ecuación de Reynolds

3.6.1 La ecuación de la lubricación de Reynolds

Una de las causas principales de la reducción de la vida útil y la falla de disponibilidad de la maquinaria rotatoria son las vibraciones, las cuales son responsables de los desgastes prematuros y de los daños mecánicos severos a los equipos; una forma de poder controlar la amplitud vibracional radica en modelar correctamente la conducta dinámica de los soportes (chumaceras) y junto con ello caracterizar correctamente la película de lubricante. Una chumacera es un cuerpo cilíndrico alrededor del cual gira un eje y que se usa en casi todos los tipos de maquinaria para soportar cargas radiales o simplemente como una guía para la suave transmisión de un par con un mínimo de pérdida de carga y desgaste. La capacidad para soportar carga se debe a la generación de un campo de presión en la película de lubricante, debido al movimiento relativo entre el muñón y la chumacera. Dicho campo es la forma de representar la distribución de la presión en el lubricante. Su conocimiento es fundamental ya que permite determinar el lugar donde el lubricante puede cavitarse [28]. El campo de presión se genera por la formación de una cuña de lubricante, el cual es arrastrado hacia el claro entre dos superficies convergentes. Esta cuña convergente se crea porque el eje no gira en forma concéntrica con respecto a la chumacera, sino que existe un desplazamiento relativo del centro del eje con respecto al centro de la chumacera y que se conoce como excentricidad. La cantidad de excentricidad se autoajusta hasta que la carga se equilibra con la presión generada en la parte convergente de la película del lubricante [29].

En la figura 13 se muestra un esquema de una vista transversal de una chumacera hidrodinámica junto con el campo de presión generado por la película de lubricante, notar como el muñón está ligeramente colocado hacia la derecha, generando una excentricidad.



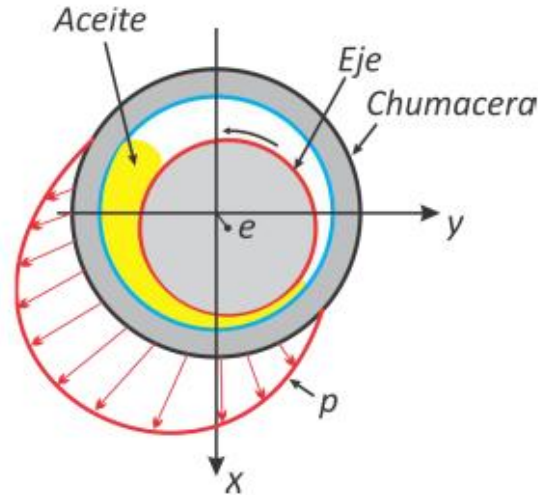


Figura 13. Vista transversal de una chumacera hidrodinámica.

La ecuación de Reynolds es una simplificación especial de las ecuaciones de Navier-Stokes las cuales son fundamentales en mecánica de fluidos [1], [25]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + v \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + w \cdot \frac{\partial u}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \gamma \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u \cdot \frac{\partial v}{\partial x} + v \cdot \frac{\partial v}{\partial y} + w \cdot \frac{\partial v}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \gamma \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) \\ \frac{\partial w}{\partial t} + u \cdot \frac{\partial w}{\partial x} + v \cdot \frac{\partial w}{\partial y} + w \cdot \frac{\partial w}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \gamma \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) \end{aligned} \quad (3.13)$$

Donde ρ y γ son la densidad y la viscosidad absoluta del fluido, p es la presión y u , v y w son las componentes de la velocidad del fluido en las direcciones x , y , z , respectivamente.

La ecuación de Reynolds da su nombre gracias a Osborne Reynolds (1842-1912), Ingeniero y físico irlandés que realizó contribuciones de suma importancia en la hidrodinámica y dinámica de fluidos en donde en el año de 1886 publicó su teoría de la ecuación en el Proceeding of the Royald Society de Londres [29].



La ecuación de Reynolds simplificada de las ecuaciones (3.13) permite determinar el campo de presión $p(z, \theta)$ dentro de una chumacera como función de su movimiento, tal ecuación se puede escribir como [25]:

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \left(h^3 \frac{\partial p}{\partial \theta} \right) + R^2 \frac{\partial}{\partial z} \left(h^3 \frac{\partial p}{\partial z} \right) = 12 \frac{\mu R^2}{C_r^3} [C_r \dot{\varepsilon} \cos \theta + C_r \varepsilon \left(\dot{\varphi} - \frac{\omega}{2} \right) \sin \theta] \quad (3.14)$$

$$-\frac{L}{2} \leq z \leq \frac{L}{2}, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi, \quad h(\theta) = 1 + \varepsilon \cos \theta \quad (3.15)$$

$$p\left(\frac{L}{2}\right) = 0, \quad p\left(-\frac{L}{2}\right) = 0, \quad p(\theta + 2\pi) = p(\theta) \quad (3.16)$$

Donde p es la presión, θ es la coordenada circunferencial media a partir de centros, z es la coordenada axial a lo largo de la chumacera, φ es el ángulo de altitud (o equilibrio), C_r es el claro radial, ε es la excentricidad adimensional, R es el radio de la chumacera, μ es la viscosidad dinámica, h es el espesor de la película del fluido en forma adimensional y ω es la velocidad angular del muñón.

En general ε y φ son diferentes de cero, pero en la posición de equilibrio estas cantidades tienen valor de cero; sin embargo, si se requiere calcular la estabilidad del movimiento del muñón o la respuesta vibratoria del sistema considerando cargas, entonces ε y ϕ deberán considerarse.

Los siguientes puntos teóricos se consideran para el uso de la ecuación general de Reynolds [30]:

- ✓ El lubricante es un fluido Newtoniano.
- ✓ El flujo es incompresible.
- ✓ La viscosidad es constante.
- ✓ El flujo es laminar.

El uso de la ecuación 3.14 es de gran importancia en aplicación teórica para turbomaquinaria, corresponde a una ecuación diferencial de segundo orden en derivadas parciales, su solución analítica directa no se ha podido determinar.



Para trabajar de forma general es necesario presentar la ecuación de Reynolds en forma adimensional y así facilitar los cálculos.

En donde se puede definir [3].

$$V_s^2 = (C_r \dot{\varepsilon}) + \left[C_r \varepsilon \left(\dot{\varphi} - \frac{\omega}{2} \right) \right]^2, \quad \text{Cos } \alpha = \frac{C_r \dot{\varepsilon}}{V_s}, \quad \text{Sen } \theta = \frac{C_r \varepsilon \left(\dot{\varphi} - \frac{\omega}{2} \right)}{V_s} \quad (3.17)$$

Entonces la ecuación de Reynolds queda:

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \left(h^3 \frac{\partial p}{\partial \theta} \right) + R^2 \frac{\partial}{\partial z} \left(h^3 \frac{\partial p}{\partial z} \right) = 12 \frac{\mu R^2}{C_r^3} V_s \text{Cos}(\theta + \alpha) \quad (3.18)$$

En la posición de equilibrio se tiene: $\dot{\varphi} = \dot{\varepsilon} = 0$, entonces la ecuación 3.17 puede escribirse:

$$\alpha = \frac{\pi}{2}, \quad \text{Cos} \left(\theta + \frac{\pi}{2} \right) = -\text{Sen } \theta; \quad V_s = \frac{C_r \varepsilon \omega}{2}$$

Sustituyendo las relaciones anteriores en ecuación 3.18, la ecuación de Reynolds en estado estacionario (equilibrio) queda como:

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \left(h^3 \frac{\partial p}{\partial \theta} \right) + R^2 \frac{\partial}{\partial z} \left(h^3 \frac{\partial p}{\partial z} \right) = \frac{6\mu R^2 \omega}{C_r^2} (-\varepsilon \text{Sen} \theta) \quad (3.19)$$

Para tener mayor generalidad, se usarán las siguientes sustituciones para adimensionalizar la ecuación 3.19:

$$z = \frac{L}{2} \bar{z}, \quad \bar{p} = \frac{p}{p_{dim}}, \quad p_{dim} = \mu N \left(\frac{R}{C_r} \right)^2 = \mu \left(\frac{\omega}{2\pi} \right) \left(\frac{R}{C_r} \right)^2 \quad (3.20)$$

Sustituyendo ecuación 3.20 en ecuación 3.19 se tiene:

$$\mu N \left(\frac{R}{C_r} \right)^2 \left[\frac{\partial}{\partial \theta} \left(h^3(\theta) \frac{\partial \bar{p}}{\partial \theta} \right) + R^2 \cdot \frac{1}{\left(\frac{L}{2} \right)^2} \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \left(h^3(\theta) \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{z}} \right) \right] = \frac{6\mu R^2 (2\pi N)}{C_r^2} (-\varepsilon \text{Sen} \theta) \quad (3.21)$$

Simplificando se tiene la ecuación adimensional de Reynolds en estado estable [1]:



$$\frac{\partial}{\partial \theta} \left(h^3(\theta) \frac{\partial \bar{p}}{\partial \theta} \right) + \left(\frac{L}{D} \right)^2 \frac{\partial}{\partial z} \left(h^3(\theta) \frac{\partial \bar{p}}{\partial z} \right) = 12 \pi (-\varepsilon S \sin \theta) \quad (3.22)$$

3.7 Modelos clásicos de chumacera

De acuerdo a la ecuación de Reynolds, una chumacera puede ser simplificada y tener así una solución más simple, puede ser clasificada de acuerdo a una relación establecida por la longitud axial y el diámetro, tal relación es fundamental para considerarla como chumaceras cortas, intermedias o largas, pues esto propicia algunas simplificaciones en la ecuación de Reynolds que la caracteriza [31].

En la figura 14, se aprecia un esquema simplificado de una chumacera y el sistema de coordenadas que se empleara para la relación de la clasificación.

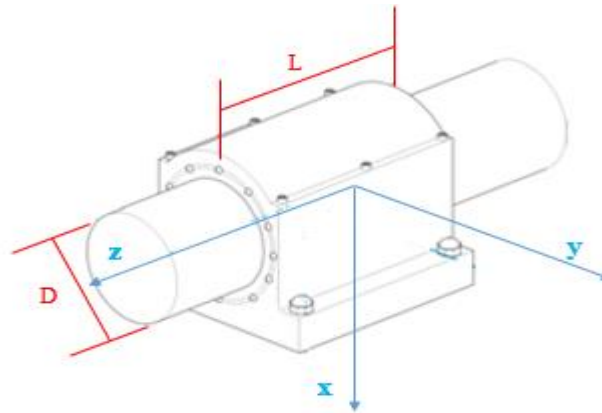


Figura 14. Vista de una chumacera, resaltando los valores “D” y “L”; sumamente importante para su clasificación.

3.7.1 Chumacera corta

Una chumacera será corta si la longitud L es muy pequeña en comparación con su diámetro D, o sea que se debe cumplir que: $L \ll D$, en términos numéricos se considera corta si $L/D \leq 1/4$ [25]. Las chumaceras cortas son ampliamente usadas y operan exitosamente en diversas máquinas, particularmente en máquinas automotrices.

Estas chumaceras son ampliamente usadas y por lo consiguiente estudiadas y analizadas por Dubois y Ocvirk [32], [33], quienes asumieron que el gradiente de presión radial de la chumacera es mucho menor que el gradiente de presión en la dirección axial. Por lo



consiguiente recordando la ecuación de Reynolds (ec. 3.22), y despreciando el término donde corresponde la presión angular, se tiene el modelo clásico de una chumacera corta:

$$\left(\frac{L}{D}\right)^2 \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \left(h^3(\theta) \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{z}} \right) = 12 \pi (-\varepsilon \text{Sen} \theta) \quad (3.23)$$

La simplificación anterior, permite obtener soluciones analíticas cerradas de la ecuación 3.23 y así poder determinar el campo de presión y predecir el comportamiento de una chumacera corta.

3.7.2 Chumacera larga

Una chumacera será considerada larga si la longitud axial L es muy grande en comparación con el diámetro D , en términos matemáticos: $D \gg L$, en términos numéricos se considera larga si $L/D \geq 2$ [3], [25]. Cuando una chumacera es larga, la solución de la ecuación de Reynolds se vuelve más complicada que la usada en chumaceras cortas.

En la chumacera larga se asume que el gradiente de presión es pequeño y se puede despreciar cuando se compara con los gradientes de presión alrededor de la chumacera, lo anterior es porque la distribución de presión no depende de los valores en la frontera. Recordando la ecuación de Reynolds (ec. 3.22) y despreciando el segundo término del lado izquierdo (término donde corresponde la presión axial) se tiene el modelo clásico de una chumacera larga.

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \left(h^3(\theta) \frac{\partial \bar{p}}{\partial \theta} \right) = 12 \pi (-\varepsilon \text{Sen} \theta) \quad (3.24)$$

La solución de la ecuación anterior (3.24) es más complicada a comparación de la ecuación (3.23) que aparece en una chumacera corta, debido a que las integrales que aparecen en el desarrollo de la solución son de una mayor dificultad, sin embargo en el año de 1904 Arnold Sommerfeld (1868 – 1951) solucionó estos problemas introduciendo su sustitución, la cual permite determinar el campo de presión en la película de lubricante [1], [25].

En la literatura se mencionan diferentes condiciones para determinar si una chumacera es corta, intermedia o larga dependiendo de la relación entre la longitud y su diámetro. En la



tabla 1 se enlista la relación L/D de diferentes autores para determinar cuándo una chumacera se considera corta.

Tabla 1. Condiciones necesarias para que una chumacera se considere corta para diversos autores.

M. Khonsari, Bosser [31]	$L/D \rightarrow 0$
A. Szeri [25]	$L/D < 0.25$
D. Childs [3]	$L/D < 0.5$
B. Hamrock [34]	$L/D < 1$

3.8 Nuevo modelo de presurización para una chumacera corta con puertos puntuales de presurización

En esta sección se presenta el modelo de presurización cuya posición axial y angular son arbitrarias, antes mencionado en la tesis del Dr. Ramírez, I. (Teoría de chumaceras presurizadas con puertos puntuales: Caso de la chumacera corta) [1]. Es importante mencionar que la tesis antes mencionada se centra en el desarrollo de un nuevo modelo de presurización en un puerto puntual adimensional usando la función generalizada **Delta de Dirac** (utilizada para resolver problemas de física) [16], [29], [35], cuyas propiedades simplifican notablemente los cálculos. Todo esto fue aplicado a la teoría de una chumacera corta.

La ubicación del puerto de inyección se muestra en la figura 15 en donde aparecen dos sistemas de coordenadas; el sistema fijo XOY en el cual el punto O representa el centro de la chumacera y el sistema móvil X'JY' en el cual J es el centro de muñón, el ángulo entre el sistema de coordenadas es llamado ángulo de equilibrio φ de actitud, la posición angular del puerto de inyección está dada por el ángulo β en el sistema fijo y $\theta_\beta = \pi - \varphi + \beta$ en el sistema móvil; los vectores \bar{U}_R y \bar{U}_T son vectores unitarios en la dirección radial y transversal.



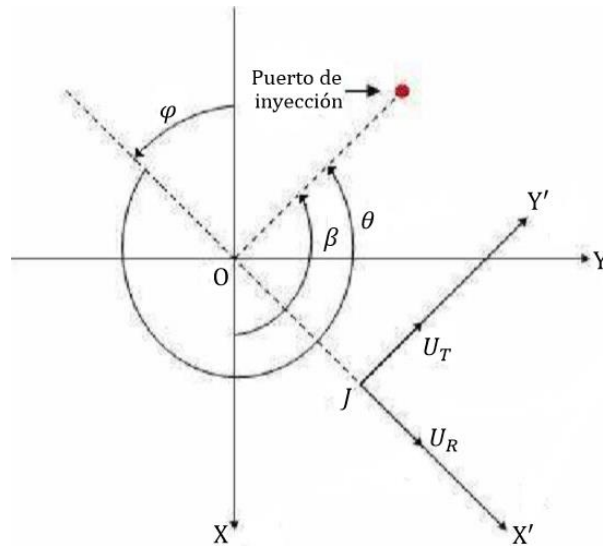


Figura 15. Sistema de coordenadas fijo dado por (XYZ) de una chumacera móvil (X', Y', Z') del muñón [1].

Los sistemas coordenados descritos anteriormente muestran que la posición del centro del muñón J está en función del ángulo de actitud φ y de la distancia OJ tiene por nombre excentricidad, estos valores se verán modificados con la presurización de tal modo que el centro del muñón pueda tomar cualquier posición dentro de algún cuadrante.

Ahora se considera el esquema de una chumacera (figura 16), en la cual aparece el puerto puntual de presurización externa con ubicación axial ($\bar{z} = a$) y angular (β) arbitraria. Notar que se definen los valores de las coordenadas axial y circunferencial (a, β).

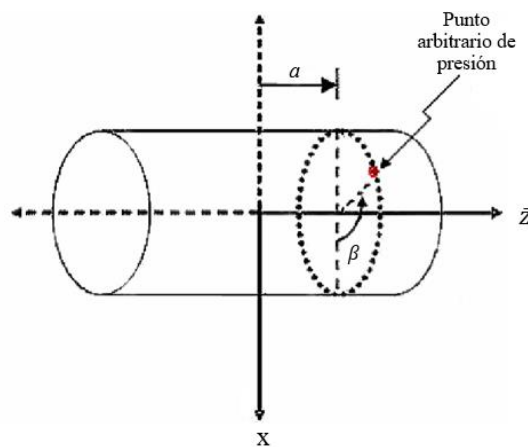


Figura 16. Ubicación del punto de inyección de aceite lubricante en la chumacera [1].



Entonces, si se define el área del puerto de inyección como Δs , la cual es una superficie establecida y donde la presión de inyección será Δp , entonces la fuerza total de presión será igual a:

$$\Delta F_{pres} = \Delta p \cdot \Delta s \quad (3.25)$$

Se debe tener en cuenta que si $\Delta s \rightarrow 0$, se tiene que $\Delta p \rightarrow \infty$

Entonces:

$$\Delta F_{pres} = \Delta p \cdot \Delta s = q = \text{constante} \quad (3.26)$$

Bajo estas condiciones es posible, y con la función de **Delta de Dirac** δ , proponer un modelo de presurización puntual adimensional [1], [35]:

$$(\Delta \bar{p})_{prt} = \bar{q}_{prt} \delta [\theta - (\pi + \beta - \varphi_{pres})] \quad (3.27)$$

Donde:

$$\bar{q}_{prt} = \frac{P_{fict}}{P_{dim}} \quad (3.28)$$

$$P_{fict} = \frac{\Delta F_{pres}}{DL}, \quad P_{dim} = \mu N \left(\frac{R}{C_r} \right)^2 \quad (3.29)$$

Donde; P_{dim} es la presión dimensional, P_{fict} es la presión ficticia y \bar{q}_{prt} la intensidad de presión adimensional, ver que la ecuación 3.27 se define como un impulso infinito, pero la fuerza de presurización es finita e igual a una constante (3.26). Las consideraciones anteriores pueden ser generalizadas para el caso de “n” puertos de inyección con ubicación axial y angular arbitraria.

Por tanto, el modelo que describe el campo de presión en una chumacera hidrodinámica presurizada en un puerto con ubicación (a, β) será:

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \left(h^3(\theta) \frac{\partial \bar{p}}{\partial \theta} \right) + \left(\frac{D}{L} \right)^2 \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \left(h^3(\theta) \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{z}} \right) = \bar{q}_{prt} \delta(\bar{z}-a) \delta[\theta - (\pi + \beta - \varphi_{pres})] \quad (3.30)$$



Para el caso de la chumacera corta:

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}} \left(h^3(\theta) \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{z}} \right) = \left(\frac{L}{D} \right)^2 \bar{q}_{prt} \delta(\bar{z}-a) \delta[\theta - (\pi + \beta - \varphi_{pres})] \quad (3.31)$$

Donde:

$$-1 < \bar{z} < 1, \quad p(\bar{z} = \pm 1) = 0, \quad h = 1 + \varepsilon \cos \theta, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi, \quad \hat{p}(\theta) = \hat{p}(\theta + 2\pi)$$



Capítulo 4. Campos de presión y posición de equilibrio

4.1 Modelo no presurizado, chumacera corta (caso clásico)

Conocer los campos de presión $p(z, \theta)$ que se forman al presurizar una chumacera, es de gran importancia ya que permite encontrar las regiones donde la película de lubricante puede romperse, así como el lugar donde la presión alcanza su valor máximo y de igual manera permite determinar los efectos de rigidez y amortiguamiento (conocidos como coeficientes rotodinámicos) que hay en el lubricante [3]. Una vez conocido el campo, se puede caracterizar por completo a una chumacera hidrodinámica.

A continuación se describe la metodología utilizada en la solución de la ecuación de Reynolds, que define el campo de presión en una chumacera hidrodinámica, recordar que la ecuación general de Reynolds se puede escribir como [3] [25]:

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \left(h^3 \frac{\partial p}{\partial \theta} \right) + R^2 \frac{\partial}{\partial z} \left(h^3 \frac{\partial p}{\partial z} \right) = 12 \frac{\mu R^2}{Cr^3} [C_r \dot{\varepsilon} \cos \theta + C_r \varepsilon \left(\dot{\varphi} - \frac{\omega}{2} \right) \text{Sen} \theta] \quad (4.1)$$

En donde:

$$-\frac{L}{2} \leq z \leq \frac{L}{2}, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi, \quad h(\theta) = 1 + \varepsilon \cos \theta \quad (4.2)$$

$$p\left(\frac{L}{2}\right) = 0, \quad p\left(-\frac{L}{2}\right) = 0, \quad p(\theta + 2\pi) = p(\theta) \quad (4.3)$$

Para chumaceras hidrodinámicas cortas en estado estacionario, la ecuación (4.1) toma la forma:

$$R^2 \frac{\partial}{\partial z} \left(h^3 \frac{\partial p}{\partial z} \right) = 12 \frac{\mu R^2}{Cr^2} \left(-\varepsilon \frac{\omega}{2} \text{Sen} \theta \right) \quad (4.4)$$

Para trabajar de forma general es necesario presentar la ecuación de Reynolds en forma adimensional y así facilitar los cálculos, usando las siguientes variables adimensionales:

$$z = \frac{L}{2} \bar{z}, \quad \bar{p} = \frac{p}{p_{dim}}, \quad p_{dim} = \mu \left(\frac{\omega}{2\pi} \right) \left(\frac{R}{Cr} \right)^2 \quad (4.5)$$



Donde \bar{z} es la coordenada axial, (adimensional), \bar{p} es la presión (adimensional).

Se obtiene la ecuación de Reynolds adimensional considerando (4.5) para chumaceras cortas:

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \left(h^3 \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{z}} \right) = -12\pi \left(\frac{L}{D} \right)^2 \varepsilon \text{Sen}\theta \quad (4.6)$$

$$-1 < \bar{z} < 1, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi, \quad \bar{p}(\bar{z} = \pm 1) = 0$$

Donde “D” es el diámetro y “L” es la longitud de la chumacera.

Resolviendo la ecuación (4.6) para \bar{p} es posible calcular el campo de presión de una chumacera corta sin presurización externa en su forma adimensional. Dicha expresión se conoce como solución de Ocvirk y está definida por [25]:

$$\bar{p}_{ocv} = -6\pi \left(\frac{L}{D} \right)^2 \frac{\varepsilon_{ocv} \text{Sen}\theta}{(1 + \varepsilon_{ocv} \text{Cos}\theta)^3} (1 - \bar{z}^2) \quad (4.7)$$

El subíndice Ocv de la presión y la excentricidad, indica que es el resultado de la solución de Ocvirk y está definida por [25], [31]. En la figura 17 se muestra el campo clásico de una chumacera no presurizada (ec. 4.7).

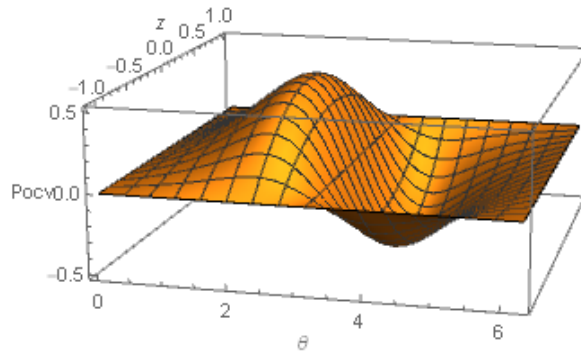


Figura 17. Campo de presión clásico (no presurizado) en una chumacera corta como función de las coordenadas axial y circunferencial respectivamente, para $\varepsilon = 0.3$ y $(L/D) = 1/4$.



4.2 Modelo presurizado, chumacera corta

La solución del modelo de presurización puntual es diferente al caso clásico, pues contiene funciones Delta de Dirac: las cuales tienen que ser tratadas de manera diferente usando propiedades de la teoría de distribuciones [36]. Recordar que el modelo para el caso de puerto puntual que determina el campo de presión para una chumacera hidrodinámica presurizada (C.H.P) con un puerto de inyección de lubricante con ubicación (a, β) es [2]:

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}} \left(h^3 \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{z}} \right) = \left(\frac{L}{D} \right)^2 \bar{q}_{prt} \delta(\bar{z}-a) \delta[\theta - (\pi + \beta - \varphi_{pres})] \quad (4.8)$$

Donde:

$$-1 < \bar{z} < 1, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi, \quad \bar{p}(\bar{z}=\pm 1) = 0, \quad \bar{p}(\theta+2\pi) = \bar{p}(\theta)$$

Se obtiene el campo de presión resultante para una posición arbitraria de inyección (a, β) [16], la solución de (ec. 4.8) para \bar{p}_{pres} es:

$$\bar{p}_{pres}(\bar{z}, \theta) = \left(\frac{L}{D} \right)^2 \bar{q}_{prt} \frac{\delta[\theta - (\pi + \beta - \varphi)]}{2(1 + \varepsilon \cos \theta)^3} (1 - a\bar{z} - |\bar{z} - a|) \quad (4.9)$$

La solución (4.9) está definida en los términos de la función Delta de Dirac, por lo que no es posible graficar el campo de presión, sin embargo si se utiliza una aproximación adecuada se puede encontrar un campo; esto para conocer la distribución de presión de la película de lubricante. La siguiente expresión muestra una aproximación de Delta de Dirac para el campo de (4.9) [1].

$$\delta[\theta - (\pi + \beta - \varphi)] = \frac{\bar{n}}{\sqrt{\pi}} e^{-\bar{n}^2 [\theta - (\pi + \beta - \varphi)]^2} \quad (4.10)$$

La ecuación (4.11) permite graficar el campo de presión resultante, el cual estará dado por la suma del campo clásico no presurizado (caso clásico) ecuación (4.7), más la solución del campo presurizado (caso presurizado) ecuación (4.9). Tomando en cuenta estas condiciones se obtuvo la siguiente expresión en su forma adimensional:

$$p_{ocv} + \bar{p}_{pres} = -6\pi \left(\frac{L}{D} \right)^2 \frac{\varepsilon_{ocv} \operatorname{Sen} \theta}{(1 + \varepsilon_{ocv} \operatorname{Cos} \theta)^3} (1 - \bar{z}^2) + \left(\frac{L}{D} \right)^2 \bar{q}_{prt} \frac{\delta[\theta - (\pi + \beta - \varphi)]}{2(1 + \varepsilon \operatorname{Cos} \theta)^3} (1 - a\bar{z} - |\bar{z} - a|) \quad (4.11)$$



Las figuras 18 y 19 son ejemplos donde se muestra los campos de presión aproximados de una chumacera hidrodinámica cuando se presuriza a 180° y 0° . Empleando el programa computacional Wolfram Mathematica 11 y usando la aproximación (4.10) para Delta de Dirac se graficó el campo de presión, para diversos valores de número de Sommerfeld y de presurización [1] [25].

- ✓ Inyección superior ($180^\circ = \pi$)
- ✓ Inyección inferior (0°)

Puerto de inyección superior.

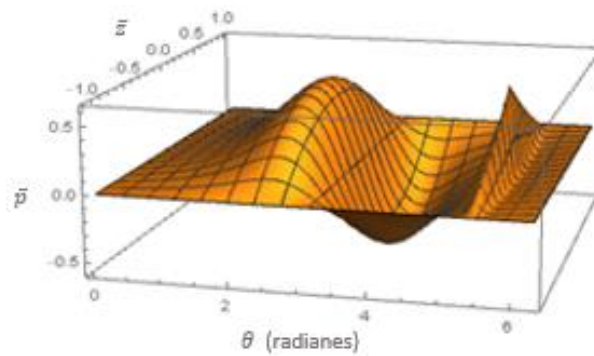


Figura 18. Campo de presión aproximado, $\bar{n} = 10$; $\beta=180^\circ$; $S=2.30$; $\varepsilon=0.4451$; $f_{prt}=10$; $a = 0$; $\varphi=57.66^\circ$; $L/D=1/4$.

Puerto de inyección inferior.

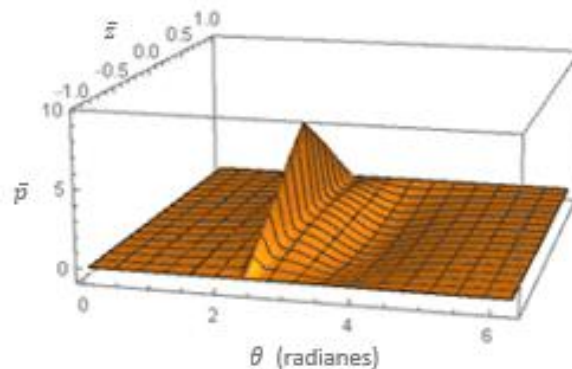


Figura 19. Campo de presión total aproximado, $\bar{n} = 10$; $\beta=0^\circ$; $S=1.30$; $\varepsilon=0.5259$; $f_{prt}=5$; $a = 0$; $\varphi=51.78^\circ$; $L/D=1/4$.



Las figuras anteriores representan los campos de presión aproximados, se aprecia que existen cambios considerables al inyectar lubricante en la chumacera.

4.3 Nuevos campos de presión para una chumacera corta con los puertos de inyección ubicados a ($\beta = 2\pi/3$ y $\pi/3$)

La figura 20 muestra la ubicación de los nuevos puertos de inyección de aceite lubricante (objetivo del presente trabajo), los cuales se encuentran ubicados en las posiciones: $2\pi/3$ y $\pi/3$, se considera el efecto provocado por la presurización externa.

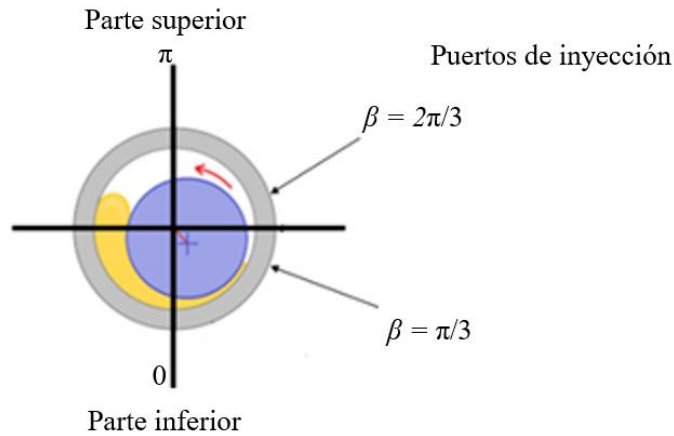


Figura 20. Sección transversal de una chumacera corta presurizada con los puertos de inyección de lubricante colocados en un plano simétrico.

Recordando que el modelo matemático que calcula el campo de presión total es la suma del caso clásico y el caso presurizado, para una chumacera corta hidrodinámica con puertos puntuales fue presentado en el capítulo anterior, ecuación (4.11):

$$p_{ocv} + \bar{p}_{pres} = -6\pi \left(\frac{L}{D}\right)^2 \frac{\varepsilon_{ocv} \text{Sen}\theta}{(1 + \varepsilon_{ocv} \text{Cos}\theta)^3} (1 - \bar{z}^2) + \left(\frac{L}{D}\right)^2 \bar{q}_{prt} \frac{\delta[\theta - (\pi + \beta - \varphi)]}{2(1 + \varepsilon \text{Cos}\theta)^3} (1 - a\bar{z} - |\bar{z} - a|)$$

De la ecuación (4.11) y sustituyendo los valores ($2\pi/3$ y $\pi/3$) en la variable β , se determinaron los nuevos campos de presión aproximados para los diferentes casos de estudio de esta tesis,



tales gráficos se obtuvieron empleando el software Wolfram Mathematica 11. El campo de presión adimensional para cada caso es:

✓ *Caso 1: $\beta=2\pi/3$*

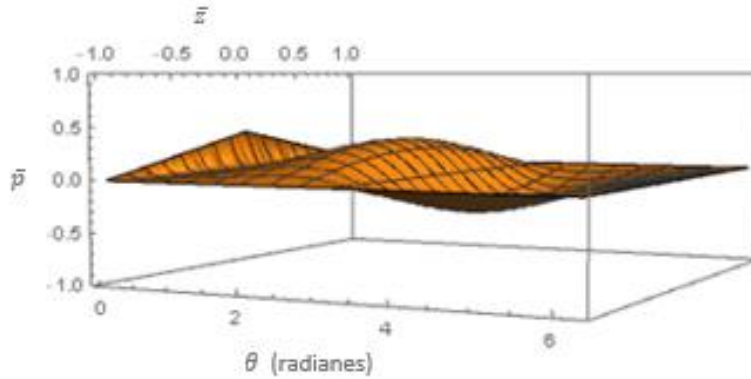


Figura 21. Campo de presión total aproximado (inyección a 120°) $\beta=2\pi/3$; $\varepsilon=0.35$; $fprt=10$; $\varphi=58.37^\circ$; $L/D=1/4$.

La figura 21 muestra la distribución de la película de aceite lubricante a lo largo de los tres ejes coordenados \bar{z} , \bar{p} y θ respectivamente (donde \bar{z} es la coordenada axial, \bar{p} es la presión y θ es la coordenada angular dada en radianes). El campo de presión es mayor debido a que acumula mayor presión por lo que el pico disminuye (el pico representa el puerto de inyección de lubricante)

✓ *Caso 2: $\beta=\pi/3$*

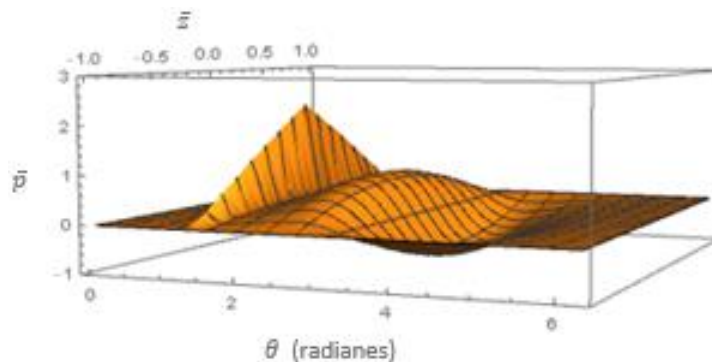


Figura 22. Campo de presión total aproximado (inyección a 60°) $\beta=\pi/3$; $\varepsilon=0.5$; $fprt=10$; $\varphi=29.02^\circ$; $L/D=1/4$



En la figura 22 se observa que el campo de presión es menor, incrementando el desplazamiento del rotor, por consecuencia el pico aumenta. Es importante notar que los campos de presión anteriores, solo son aproximaciones del campo real.

4.4 Locus (posición) de equilibrio de la chumacera híbrida

La obtención del campo de presión que se genera en una chumacera hidrodinámica permite determinar los principales parámetros rotodinámicos. La figura 23 muestra una representación esquemática de una chumacera hidrodinámica.

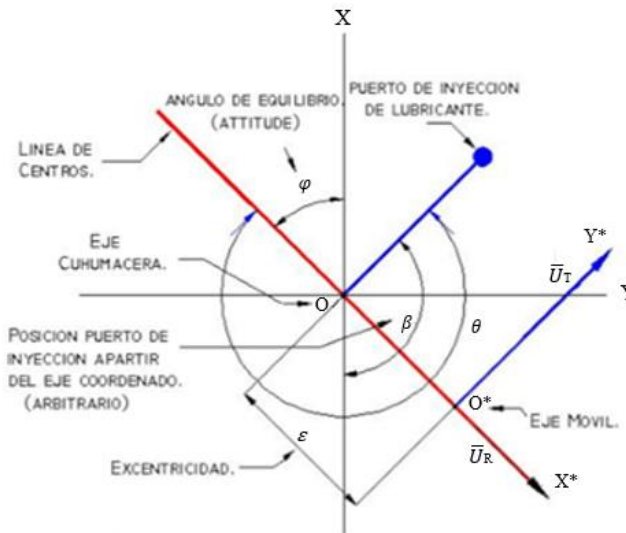


Figura 23. Caracterización de una Chumacera [18], [30].

La línea de centros que aparece en color rojo, es la recta de la cual parten todas las mediciones, esta línea se traza a partir del centro de la chumacera al centro del muñón.

En la figura 23, la letra O representa el centro geométrico de la chumacera, O* es el centro del muñón, X e Y son los ejes fijos y X* e Y* son los ejes móviles del sistema, \bar{U}_R y \bar{U}_T son las componentes radial y tangencial respectivamente, φ es el ángulo de attitude, β es la ubicación angular del puerto de inyección de lubricante, θ es la distancia angular que va desde la línea de centros al puerto de inyección de lubricante y ε es la distancia que va desde el centro del muñón al centro de la chumacera [1].



El ángulo de actitud ó locus de equilibrio denotado por φ , es el ángulo formado entre el plano principal eje X a la línea de centros. Se usa para conocer la ubicación exacta del muñón respecto del centro geométrico de la chumacera. Calculando el ángulo de actitud, pueden calcularse los parámetros restantes.

Para determinar analíticamente el ángulo de actitud dependiente de la excentricidad estacionaria y respecto de la carga es necesario determinar las fuerzas radial y tangencial que se producen, en breve se presentan los modelos matemáticos.

4.4.1 Fuerzas en la Película de Aceite

Una vez determinado el campo de presión que se genera dentro de una chumacera hidrodinámica, es necesario conocer la capacidad de carga que puede tener, es decir la carga total que puede soportar. La carga se calcula usualmente a partir de dos componentes de fuerza que genera el campo de presión en el lubricante. La figura 24 muestra los componentes radial y tangencial de la fuerza de la película respecto de los ejes coordenados X y Y, junto con la línea de carga.

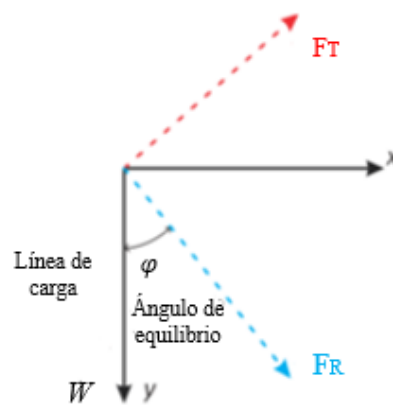


Figura 24. Representación esquemática de los ejes coordenados X-Y para la solución analítica [1].

A continuación, se muestran las ecuaciones principales para calcular la posición de equilibrio, es importante mencionar que la deducción detallada aparece en las referencias correspondientes [1].

En la posición de equilibrio estático las fuerzas que actúan son [1], [37].

$$\bar{W} + \bar{F}_{pres} = \bar{0} \quad (4.12)$$



O bien en componentes radiales y transversales se tiene; ver figura (24):

$$\begin{aligned} W \cos \varphi + F_R &= 0 \\ -W \sin \varphi + F_T &= 0 \end{aligned} \quad (4.13)$$

Por lo tanto las componentes en las direcciones radial y tangencial de las fuerzas de presión están dadas por:

$$F_R = \int_{-L/2}^{L/2} \int_0^{R\theta} p \cos \theta \, dx \, dz \quad (4.14)$$

$$F_T = \int_{-L/2}^{L/2} \int_0^{R\theta} p \sin \theta \, dx \, dz \quad (4.15)$$

Donde:

$$x = R\theta; \quad dx = R d\theta; \quad z = \frac{L}{2} \bar{z}; \quad dz = \frac{L}{2} d\bar{z}; \quad p = m N \left(\frac{R}{C_r} \right)^2 \bar{p} \quad (4.16)$$

En su forma adimensional (4.14) y (4.15) se escriben como:

$$f_R = \frac{1}{4} \int_{-1}^1 \int_0^\pi \bar{p} \cos \theta \, d\theta \, d\bar{z} \quad (4.17)$$

$$f_T = \frac{1}{4} \int_{-1}^1 \int_0^\pi \bar{p} \sin \theta \, d\theta \, d\bar{z} \quad (4.18)$$

Las ecuaciones (4.17) y (4.18) determinan las componentes radiales y transversales de las fuerzas de la película de aceite lubricante conociendo el campo de presión, el cual ha sido obtenido a partir de la ecuación de Reynolds [1].

En rotodinámica existe un parámetro adimensional que tiene que ver con la capacidad de carga, este está definido por [1], [25].

$$S = \frac{1}{f} = \frac{\mu NLD}{W} \left(\frac{R}{C_r} \right)^2 \quad (4.19)$$



Este parámetro “S” se conoce como numero de Sommerfeld y relaciona, el peso las características geométricas, velocidad de operación y la viscosidad del lubricante. Se puede decir que si el número de Sommerfeld aumenta entonces la capacidad de carga disminuye y viceversa.

4.4.2 Fuerzas de presión en la chumacera corta no presurizada

A partir del campo (4.7) las fuerzas de presión en una chumacera corta pueden ser calculadas a partir de las ecuaciones (4.17) y (4.18). Recordar que el campo de presión es [25]:

$$\bar{p}_{ocv} = -6\pi \left(\frac{L}{D}\right)^2 \frac{\varepsilon_{ocv} \text{Sen}\theta}{(1 + \varepsilon_{ocv} \text{Cos}\theta)^3} (1 - \bar{z}^2) \quad (4.20)$$

Por lo tanto, las fuerzas de presión de una chumacera corta no presurizada serán [1]:

$$f_R = \frac{1}{4} \int_{-1}^1 \int_0^\pi -6\pi \left(\frac{L}{D}\right)^2 \frac{\varepsilon_{ocv} \text{Sen}\theta}{(1 + \varepsilon_{ocv} \text{Cos}\theta)^3} \text{cos}\theta (\bar{z}^2 - 1) d\theta d\bar{z} \quad (4.21)$$

$$f_T = \frac{1}{4} \int_{-1}^1 \int_0^\pi -6\pi \left(\frac{L}{D}\right)^2 \frac{\varepsilon_{ocv} \text{Sen}\theta}{(1 + \varepsilon_{ocv} \text{Cos}\theta)^3} \text{sen}\theta (\bar{z}^2 - 1) d\theta d\bar{z} \quad (4.22)$$

En trabajos anteriores [1] se ha definido de forma analítica las ecuaciones (4.21) y (4.22) mediante la sustitución de Sommerfeld, donde se obtienen las fuerzas radiales y tangenciales en la película de lubricante de una chumacera corta, las cuales están dadas por [25]:

$$f_R = - \left(\frac{L}{D}\right)^2 \frac{4 \pi \varepsilon^2}{(1 + \varepsilon^2)^2} \quad (4.23)$$

$$f_T = \left(\frac{L}{D}\right)^2 \frac{\pi^2 \varepsilon}{(1 + \varepsilon^2)^{3/2}} \quad (4.24)$$

4.4.3 Locus de equilibrio para chumaceras no presurizadas

Ahora que se conocen las fuerzas en la película de lubricante, será posible determinar el ángulo de equilibrio que permitirá establecer la posición en la cual el centro del muñón orbitará.

$$\text{Tan } \varphi_{ocv} = \frac{\pi \sqrt{1 - \varepsilon_{ocv}^2}}{4 \varepsilon_{ocv}} \quad (4.25)$$



la ecuación (4.25) permite determinar que para un valor dado de excentricidad, la posición angular de equilibrio está perfectamente determinada, a esta trayectoria generada se le conoce en la literatura como locus de equilibrio. Una vez conocido el ángulo de actitud, las componentes de la fuerza de la película de lubricante (4.23) y (4.24) pueden escribirse en el sistema coordenado xy , mediante la matriz de rotación correspondiente [1]:

$$\begin{pmatrix} f_x \\ f_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{Cos } \varphi_{ocv} & -\text{Sen } \varphi_{ocv} \\ \text{Sen } \varphi_{ocv} & \text{Cos } \varphi_{ocv} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_R \\ f_T \end{pmatrix} \quad (4.26)$$

Donde:

$$\text{Sen } \varphi_{ocv} = \frac{\pi \sqrt{1 - \varepsilon_{ocv}^2}}{\sqrt{16 \varepsilon_{ocv}^2 + \pi^2 (1 - \varepsilon_{ocv}^2)}} \quad (4.27)$$

$$\text{Cos } \varphi_{ocv} = \frac{4 \varepsilon_{ocv}}{\sqrt{16 \varepsilon_{ocv}^2 + \pi^2 (1 - \varepsilon_{ocv}^2)}} \quad (4.28)$$

Finalmente, las fuerzas en el sistema xy que determinan el locus de equilibrio de una chumacera corta hidrodinámica en el caso clásico no presurizada o solución de Ocvirk son:

$$f_{x \text{ ocv}} = - \left(\frac{L}{D} \right)^2 \left[\frac{4\pi\varepsilon_{ocv}^2}{(1-\varepsilon_{ocv}^2)^2} \text{Cos } \varphi_{ocv} + \frac{\pi^2 \varepsilon_{ocv}}{(1-\varepsilon_{ocv}^2)^{3/2}} \text{Sen } \varphi_{ocv} \right] \quad (4.29)$$

$$f_{y \text{ ocv}} = - \left(\frac{L}{D} \right)^2 \left[-\frac{4\pi\varepsilon_{ocv}^2}{(1-\varepsilon_{ocv}^2)^2} \text{Sen } \varphi_{ocv} + \frac{\pi^2 \varepsilon_{ocv}}{(1-\varepsilon_{ocv}^2)^{3/2}} \text{Cos } \varphi_{ocv} \right] \quad (4.30)$$

4.4.4 Fuerzas de presión en la chumacera corta presurizada

Al presurizar una chumacera, la posición de equilibrio que adopte el muñón dependerá de las fuerzas que se generan en la película de aceite lubricante. Se analizan dos casos especiales:

1. Si se presuriza en la parte superior; la inyección hará que la excentricidad aumente, ya que la fuerza está en la misma dirección del peso del sistema, pero sentido contrario a las fuerzas del sistema.
2. Si se presuriza en la parte inferior; la excentricidad disminuirá debido a que la fuerza está en sentido contrario al peso del sistema [1].



Lo siguiente es calcular las fuerzas en la película de aceite lubricante de una chumacera presurizada. De igual manera que en la chumacera no presurizada (caso clásico), las fuerzas de presión pueden ser calculadas por (4.17) y (4.18). Recordar que el campo de presión, ecuación (4.9) quedó definido por [1], [16]:

$$\bar{p}_{pres}(\bar{z}, \theta) = \left(\frac{L}{D}\right)^2 \bar{q}_{prt} \frac{\delta[\theta - (\pi + \beta - \varphi)]}{2(1 + \varepsilon \cos \theta)^3} (1 - a\bar{z} - |\bar{z} - a|) \quad (4.31)$$

Las fuerzas de presión de una chumacera corta presurizada son:

$$\hat{f}_R = \frac{1}{4} \int_{-1}^1 \int_0^{2\pi} \left(\frac{L}{D}\right)^2 \bar{q}_{prt} \frac{\delta[\theta - (\pi + \beta - \varphi)]}{2(1 + \varepsilon \cos \theta)^3} (1 - a\bar{z} - |\bar{z} - a|) \cdot \cos \theta \, d\theta \, d\bar{z} \quad (4.32)$$

$$\hat{f}_T = \frac{1}{4} \int_{-1}^1 \int_0^{2\pi} \left(\frac{L}{D}\right)^2 \bar{q}_{prt} \frac{\delta[\theta - (\pi + \beta - \varphi)]}{2(1 + \varepsilon \cos \theta)^3} (1 - a\bar{z} - |\bar{z} - a|) \cdot \sin \theta \, d\theta \, d\bar{z} \quad (4.33)$$

Sustituyendo (4.32) y (4.33) en (4.31), y usando la teoría de distribuciones aplicada a la función Delta de Dirac resulta:

$$\hat{f}_R = - \left(\frac{L}{D}\right)^2 \bar{q}_{prt} \frac{(1 - a^2) \cos(\beta - \varphi)}{8[1 - \varepsilon \cos(\beta - \varphi)]^3} \quad (4.34)$$

$$\hat{f}_T = - \left(\frac{L}{D}\right)^2 \bar{q}_{prt} \frac{(1 - a^2) \sin(\beta - \varphi)}{8[1 - \varepsilon \cos(\beta - \varphi)]^3} \quad (4.35)$$

Las ecuaciones (4.34) y (4.35) representan las fuerzas de la película de lubricante cuando se presuriza externamente en un puerto, cuya ubicación axial y angular es arbitraria. Multiplicando (4.34) y (4.35) por la matriz de rotación (4.26) para pasar al plano xy [1], [25].

$$\begin{pmatrix} \hat{f}_x \\ \hat{f}_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varphi_{pres} & -\sin \varphi_{pres} \\ \sin \varphi_{pres} & \cos \varphi_{pres} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{f}_R \\ \hat{f}_T \end{pmatrix} \quad (4.36)$$

Se obtienen las fuerzas en la película de aceite lubricante en el sistema xy presurizadas para una chumacera corta, después de realizar multiplicaciones y utilizando algunas identidades trigonométricas, se puede escribir [1]:



$$\hat{f}_x = - \left(\frac{L}{D}\right)^2 \bar{q}_{prt} \frac{(1-a^2)\cos \beta}{8[1-\varepsilon \cos(\beta-\varphi)]^3} \quad (4.37)$$

$$\hat{f}_y = - \left(\frac{L}{D}\right)^2 \bar{q}_{prt} \frac{(1-a^2)\text{Sen} \beta}{8[1-\varepsilon \cos(\beta-\varphi)]^3} \quad (4.38)$$

Una vez encontradas las fuerzas en la película de aceite lubricante, será posible aplicar las condiciones de equilibrio estático en el sistema xy, y posteriormente determinar las nuevas posiciones que tomará el muñón en la chumacera como función de la presurización externa.

4.4.5 Locus de equilibrio de una chumacera presurizada

Para calcular las fuerzas totales de la película de aceite lubricante y poder determinar el locus de equilibrio, es necesario llevar a cabo una sumatoria de fuerzas.

$$W + F_{x, result} = 0 \quad (4.39)$$

$$F_{y, result} = 0 \quad (4.40)$$

O bien:

$$F_{x, result} = F_{x,ocv} + F_{x, pres} \quad (4.41)$$

$$F_{y, result} = F_{y,ocv} + F_{y, pres} \quad (4.42)$$

Sustituyendo (4.29), (4.30), (4.37) y (4.38) en (4.41) y (4.42) se puede escribir de forma adimensional [1], [38], [39]:

$$W - F_{dim} \left(\frac{L}{D}\right)^2 \left[\frac{4\pi\varepsilon_{pres}^2}{(1-\varepsilon_{pres}^2)^2} \cos \varphi_{pres} + \frac{\pi^2\varepsilon_{pres}}{(1-\varepsilon_{pres}^2)^{3/2}} \text{sen} \varphi_{pres} \right] + \Delta F_{pres} \left(\frac{L}{D}\right)^2 \frac{(1-a^2)\cos(\pi+\beta)}{8[1+\varepsilon_{pres} \cos(\pi+\beta-\varphi)]^3} = 0 \quad (4.43)$$

$$F_{dim} \left(\frac{L}{D}\right)^2 \left[-\frac{4\pi\varepsilon_{pres}^2}{(1-\varepsilon_{pres}^2)^2} \text{sen} \varphi_{pres} + \frac{\pi^2\varepsilon_{pres}}{(1-\varepsilon_{pres}^2)^{3/2}} \cos \varphi_{pres} \right] + \Delta F_{pres} \left(\frac{L}{D}\right)^2 \frac{(1-a^2)\text{sen}(\pi+\beta)}{8[1+\varepsilon_{pres} \cos(\pi+\beta-\varphi)]^3} = 0 \quad (4.44)$$

Donde:

$$P_{dim} = \mu N \left(\frac{R}{C_r}\right)^2, \quad \bar{q}_{prt} = \frac{\Delta F_{pres}}{DL P_{dim}} = \frac{\Delta F_{pres}}{F_{dim}} \quad (4.45)$$



Las ecuaciones (4.43) y (4.44) representan un sistema de ecuaciones no lineales con respecto a la excentricidad de equilibrio ε_{pres} y al ángulo de actitud φ_{pres} . Cabe mencionar que la solución de este sistema puede encontrarse mediante cálculos numéricos; cuando se conoce la ubicación donde se inyectará aceite lubricante las ecuaciones (4.43) y (4.44) pueden simplificarse.

4.5 Solución del modelo matemático que determina el locus de equilibrio para $(\beta = 2\pi/3$ y $\pi/3)$

Ahora se explicará de una forma muy breve la solución de los modelos matemáticos presentados con anterioridad. Como primer paso se simplifican algunos términos para ambas ecuaciones (4.43) y (4.44): esto para las posiciones $\beta = 2\pi/3, a = 0$ y $\beta = \pi/3, a = 0$

Donde:

$$f_{prt} = \frac{\Delta F_{pres}}{W}, \quad S = \frac{\Delta F_{dim}}{W}, \quad q_{prt} = \frac{f_{prt}}{S} \quad q_{prt} = \frac{\Delta F_{pres}}{F_{dim}}, \quad F_{dim} = DL P_{dim},$$

$$P_{dim} = \mu N \left(\frac{R}{Cr} \right)^2 \quad (4.46)$$

Cabe mencionar que para encontrar el nuevo valor de φ (ángulo de actitud) y S (Número de Sommerfeld) se simplifican algunos términos para sustituirlos en el comando (4.48), mediante Wolfram Mathematica 11, y así poder determinar los valores requeridos.

Haciendo cambios de variable de las ecuaciones (4.43) y (4.44):

$$M = \frac{4 \pi \varepsilon^2}{(1-\varepsilon^2)^2}; \quad N = \frac{\pi^2 \varepsilon}{(1-\varepsilon^2)^{3/2}} \quad (4.47)$$

$$r = (8 * (1 + e * \cos[Pi + beta - fi])^3); \quad s = \text{sen}[Pi + beta]; \quad t = \text{Cos}[Pi + beta]$$

Y dando valores fijos a la excentricidad ($\varepsilon=0.05-0.95$), fuerza de presurización ($f_{prt}=0, 1, 5, 10, 20, 50$ y 100) y posición angular ($\beta = 2\pi/3$ y $\pi/3$), se puede sustituir dichos valores en el siguiente comando (4.48), y así poder determinar el ángulo de actitud.



$$NSolve[16 * r + \frac{fp\text{rt}(s)(M * \text{Cos}[fi] + N * \text{Sin}[fi])}{(N * \text{cos}[fi] - M * \text{sen}[fi])} + (fp\text{rt} * (t)) == 0, fi] \quad (4.48)$$

Una vez conociendo los nuevos valores de “ φ ”, se sustituirán en el comando (4.49) para determinar el número de Sommerfeld “ S ”. Se tomarán los mismos valores de excentricidad, fuerza de presurización y posición angular.

$$NSolve[1 - S * 0.0625(M * \text{cos}[fi] + N * \text{sen}[fi]) + (fp\text{rt}(0.0625) * t/r) == 0, S] \quad (4.49)$$

Los comandos (4.48) y (4.49) son la forma simplificada de las ecuaciones (4.43) y (4.44). Ahora, resolviendo numéricamente [1] para diferentes presurizaciones y excentricidades (ya dadas), se construyeron las tablas 2 y 4 con ayuda de los comandos (4.48) y (4.49) en Wolfram Mathematica, en la cual aparece la dependencia del número de Sommerfeld y el ángulo de actitud con la excentricidad de equilibrio y fuerza de presurización.

Las tablas 2 y 4 permiten determinar el número de Sommerfeld y el ángulo de actitud para una excentricidad y fuerza de presurización dada. Sin embargo, en un caso real lo que se conoce como dato de entrada es la velocidad de operación la cual se relaciona con el número de Sommerfeld, lo que se desea conocer son los valores de excentricidad y ángulo de equilibrio. Para un valor dado de excentricidad existe un solo número de Sommerfeld, por tanto, interpolando las tablas 2 y 4 de tal forma que permita tener una mejor información, la cual sea manejable y de mayor utilidad, se obtienen las tablas 3 y 5, las cuales cumple con todo lo necesario para encontrar las nuevas posiciones de equilibrio dado un número de Sommerfeld y una fuerza de presurización [1].

Es importante mencionar que las tablas siguientes no se encuentran en la literatura, por ello la importancia de este trabajo, el cual ayudara al diseñador a tomar decisiones sobre en que parte se inyectara lubricante para disminuir las vibraciones.



✓ Caso 1: $\beta= 2\pi/3$

Tabla 2. Puerto de inyección Superior, $(L/D) = 1/4$. Número de Sommerfeld y ángulo de actitud como función de la excentricidad de equilibrio, y fuerza de presurización de una chumacera corta presurizada.

$\beta=2\pi/3$														
Excentricidad "ε"	fprt=0		fprt=1		fprt=5		fprt=10		fprt=20		fprt=50		fprt=100	
	S	φ	S	φ	S	φ	S	φ	S	φ	S	φ	S	φ
0.05	32.23580	86.35	32.37220	85.9	32.97190	84.2	33.74670	82.17	35.39880	78.41	40.97010	69.3	51.46820	59.2
0.1	15.83970	82.7	15.91950	82.21	16.24731	80.3	16.64470	78.05	17.57810	74	20.54410	64.59	25.91210	54.67
0.15	10.25530	79.06	10.31312	78.51	10.54950	76.4	10.85550	73.96	11.49320	69.66	13.52020	60.13	17.04270	50.47
0.2	7.37910	76.57	7.42499	74.82	7.61170	72.52	7.85062	69.92	8.33983	65.44	9.84017	55.92	12.34911	46.59
0.25	5.59181	71.8	5.62963	71.14	5.78221	68.67	5.97459	65.95	6.36049	61.38	7.50218	52	9.34609	43
0.3	4.35482	68.17	4.38629	67.47	4.51180	64.88	4.66755	62.07	4.97310	57.49	5.84311	48.57	7.21574	39.68
0.35	3.43813	64.55	3.46414	63.82	3.56670	61.15	3.69154	58.32	3.93140	53.79	4.59688	44.92	5.61220	36.59
0.4	2.72730	60.93	2.74851	60.18	2.83077	57.49	2.92917	54.68	3.11459	50.25	3.61570	41.72	4.36351	33.7
0.45	2.15945	57.31	2.17619	56.56	2.24057	53.89	2.31637	51.15	2.45687	46.88	2.82851	38.7	3.37270	30.99
0.5	1.69679	53.67	1.70963	52.94	1.75854	50.36	1.81537	47.72	1.91933	43.63	2.18970	35.83	2.57961	28.4
0.55	1.31570	50.02	1.32519	49.31	1.36105	46.86	1.40234	44.36	1.47715	40.49	1.66931	33.06	1.94310	25.92
0.6	1.00050	46.32	1.00718	45.66	1.03244	43.37	1.06134	41.04	1.11344	37.4	1.24615	30.37	1.43350	23.5
0.65	0.74023	42.55	0.74480	41.96	0.76180	39.87	0.78112	37.72	0.81596	34.34	0.90438	27.7	1.02851	21.11
0.7	0.52743	38.7	0.53027	38.17	0.54100	36.3	0.55329	34.34	0.57544	31.24	0.63166	25.01	0.71039	18.71
0.75	0.35616	34.7	0.35782	34.25	0.36413	32.63	0.37139	30.85	0.38455	28.03	0.41810	22.24	0.46514	16.24
0.8	0.22215	30.49	0.22303	30.11	0.22637	28.69	0.23027	27.16	0.23737	24.64	0.25566	19.3	0.28142	13.62
0.85	0.12202	25.94	0.12241	25.63	0.12394	24.44	0.12573	23.13	0.12905	20.92	0.13769	16.07	0.14998	10.74
0.9	0.05304	20.82	0.05318	20.57	0.05371	19.6	0.05434	18.51	0.05563	16.62	0.05870	12.31	0.06326	7.37
0.95	0.01299	14.47	0.01301	14.28	0.01311	13.53	0.01323	12.68	0.01346	11.12	0.01409	7.42	0.01502	2.97



Tabla 3. Puerto de inyección Superior, $(L/D) = 1/4$. Valores de excentricidad y ángulo de actitud como función del número de Sommerfeld de una chumacera corta presurizada en la parte superior. Esta tabla es el resultado de la interpolación de la tabla 2.

S	$\theta=2\pi/3$													
	$f_{prt}=0$		$f_{prt}=1$		$f_{prt}=5$		$f_{prt}=10$		$f_{prt}=20$		$f_{prt}=50$		$f_{prt}=100$	
	ϵ_{pres}	φ_{pres}	ϵ_{pres}	φ_{pres}	ϵ_{pres}	φ_{pres}	ϵ_{pres}	φ_{pres}	ϵ_{pres}	φ_{pres}	ϵ_{pres}	φ_{pres}	ϵ_{pres}	φ_{pres}
0.013	0.9499	14.47	0.9500	14.28	0.9502	13.51	0.9503	12.63	0.9507	11.04	0.9515	7.27	0.9525	2.73
0.02	0.9397	15.82	0.9398	15.61	0.9401	14.86	0.9403	13.86	0.9409	12.17	0.9422	8.23	0.9438	3.54
0.05	0.9031	20.44	0.9033	20.19	0.9038	19.20	0.9044	18.03	0.9055	16.04	0.9082	11.56	0.9117	6.39
0.1	0.8624	24.85	0.8627	24.53	0.8634	23.08	0.8642	22.02	0.8657	19.78	0.8693	14.84	0.8740	9.33
0.2	0.8129	29.05	0.8134	28.64	0.8149	27.13	0.8167	25.52	0.8194	22.88	0.8258	17.32	0.8326	11.50
0.3	0.7706	32.91	0.7711	32.45	0.7729	30.76	0.7749	28.97	0.7782	26.07	0.7857	20.11	0.7945	13.90
0.5	0.7072	38.13	0.7079	37.56	0.7105	35.55	0.7133	33.43	0.7182	30.09	0.7291	23.42	0.7423	16.62
0.8	0.6375	43.49	0.6386	42.81	0.6423	40.41	0.6463	37.97	0.6530	34.16	0.6677	26.76	0.6845	19.46
1	0.6000	46.31	0.6012	45.57	0.6055	42.98	0.6101	40.37	0.6178	36.31	0.6348	28.51	0.6539	20.92
1.3	0.5522	49.85	0.5536	49.05	0.5586	46.26	0.5640	43.43	0.5731	39.06	0.5930	30.75	0.6150	22.78
1.4	0.5380	50.89	0.5395	50.08	0.5446	47.23	0.5503	44.34	0.5598	39.88	0.5805	31.41	0.6036	23.32
1.5	0.5245	51.88	0.5260	51.05	0.5314	48.16	0.5372	45.21	0.5472	40.67	0.5687	32.05	0.5927	23.84
2	0.4660	56.14	0.4677	55.28	0.4737	52.21	0.4804	49.06	0.4918	44.15	0.5170	34.88	0.5450	26.16
2.3	0.4365	58.28	0.4382	57.41	0.4444	54.28	0.4515	51.06	0.4636	45.99	0.4906	36.36	0.5205	27.37
2.5	0.4187	59.57	0.4204	58.70	0.4267	55.56	0.4339	52.29	0.4464	47.11	0.4744	37.29	0.5056	28.11
3	0.3793	62.42	0.3810	61.56	0.3874	58.41	0.3948	55.05	0.4080	49.70	0.4381	39.40	0.4721	29.83
3.5	0.3461	64.82	0.3478	63.98	0.3541	60.85	0.3615	57.47	0.3749	52.00	0.4067	41.30	0.4429	31.36
4	0.3176	66.88	0.3192	66.06	0.3253	62.98	0.3327	59.60	0.3463	54.06	0.3790	43.03	0.4170	32.76
5	0.2720	70.19	0.2735	69.41	0.2790	66.47	0.2858	63.16	0.2989	57.57	0.3323	46.17	0.3730	35.23
7	0.2092	74.75	0.2104	74.06	0.2149	71.37	0.2205	68.30	0.2318	62.85	0.2637	51.19	0.3060	39.29
8	0.1870	76.30	0.1880	75.70	0.1918	73.15	0.1969	70.17	0.2075	64.84	0.2378	52.85	0.2799	40.98
10	0.1538	78.78	0.1547	78.16	0.1581	75.78	0.1624	72.96	0.1710	67.89	0.1973	56.15	0.2375	43.87
15	0.1073	82.16	0.1079	81.62	0.1104	79.50	0.1132	76.99	0.1191	72.39	0.1368	61.33	0.1692	48.97
30	0.0661	85.14	0.0673	84.63	0.0702	82.65	0.0729	80.35	0.0775	76.17	0.0830	66.49	0.0902	55.64



Como en el caso de presurización superior, se construye la tabla 4 con ayuda de los comandos (4.48) y (4.49), la cual muestra la dependencia del número de Sommerfeld y el ángulo de actitud para una excentricidad y fuerza de presurización dada.

✓ **Caso 2: $\beta = \pi/3$**

Tabla 4. Puerto de inyección Inferior, $(L/D) = 1/4$. Número de Sommerfeld y ángulo de actitud como función de la excentricidad de equilibrio, y fuerza de presurización de una chumacera corta presurizada.

$\beta = \pi/3$														
Excentricidad "ε"	fp _{rt} =0		fp _{rt} =1		fp _{rt} =5		fp _{rt} =10		fp _{rt} =20		fp _{rt} =50		fp _{rt} =100	
	S	φ	S	φ	S	φ	S	φ	S	φ	S	φ	S	φ
0.05	32.23580	86.35	32.09230	85.9	31.53650	84.07	30.88610	81.68	29.75020	76.57	27.95370	59.28	30.67630	31.86
0.1	15.83970	82.7	15.75750	82.18	15.44060	80	15.07320	77.18	14.45110	71.04	13.72780	50.49	15.85230	22.62
0.15	10.25530	79.06	10.19240	78.44	9.95107	75.87	9.67560	72.43	9.23291	64.92	8.96421	41.27	10.75671	14.72
0.2	7.37910	76.57	7.32478	74.68	7.11807	71.56	6.88810	67.33	6.55040	58.11	6.56064	32.34	8.03490	8.11
0.25	5.59181	71.8	5.54166	70.88	5.35340	67.03	5.15281	61.78	4.90074	50.62	5.07604	24.35	6.24799	2.61
0.3	4.35482	68.17	4.30654	67.04	4.12944	62.21	3.95442	55.67	3.78359	42.77	4.03110	17.49	-	-
0.35	3.43813	64.55	3.39040	63.13	3.22198	57.02	3.07530	49.03	2.97765	35.11	3.23134	11.69	-	-
0.4	2.72730	60.93	2.67942	59.11	2.52106	51.4	2.40764	42.11	2.36485	28.11	2.58850	6.78	-	-
0.45	2.15945	57.31	2.11102	54.95	1.96737	45.4	1.88852	35.31	1.87830	21.97	2.05869	2.6	-	-
0.5	1.69679	53.67	1.64821	50.61	1.52540	39.24	1.47589	29.02	1.48055	16.66	-	-	-	-
0.55	1.31570	50.02	1.26803	46.04	1.17048	33.24	1.14143	23.46	1.15046	12.08	-	-	-	-
0.6	1.00050	46.32	0.95563	41.27	0.88374	27.67	0.86705	18.46	0.87546	8.08	-	-	-	-
0.65	0.74023	42.55	0.70079	37	0.65118	22.64	0.64137	14.12	0.64739	4.57	-	-	-	-
0.7	0.52743	38.70°	0.49531	31.45	0.46027	18.13	0.45694	10.27	0.46047	1.43	-	-	-	-
0.75	0.35616	34.7	0.33264	26.69	0.31261	14.07	0.30865	6.81	-	-	-	-	-	-
0.8	0.22215	30.49	0.20698	22.14	0.19528	10.37	0.19268	3.63	-	-	-	-	-	-
0.85	0.12202	25.94	0.11382	17.76	0.10762	6.89	0.10603	0.63	-	-	-	-	-	-
0.9	0.05304	20.82	0.04974	13.37	0.04707	3.46	-	-	-	-	-	-	-	-
0.95	0.01299	14.47	0.01231	8.47	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-



Recordando que en la practica el dato de entrada es el número de Sommerfeld, es posible interpolar la tabla 4 la cual muestra las nuevas posiciones de equilibrio dado un numero de Sommerfeld y una fuerza de presurización, entonces se obtiene la tabla 5 [1].

Tabla 5. Puerto de inyección Inferior, $(L/D) = 1/4$. Valores de excentricidad y ángulo de actitud como función del número de Sommerfeld de una chumacera corta presurizada en la parte inferior. Esta tabla es el resultado de la interpolación de la tabla 4.

$\beta = \pi/3$														
S	$f_{prt}=0$		$f_{prt}=1$		$f_{prt}=5$		$f_{prt}=10$		$f_{prt}=20$		$f_{prt}=50$		$f_{prt}=100$	
	ϵ_{pres}	φ_{pres}	ϵ_{pres}	φ_{pres}	ϵ_{pres}	φ_{pres}	ϵ_{pres}	φ_{pres}	ϵ_{pres}	φ_{pres}	ϵ_{pres}	φ_{pres}	ϵ_{pres}	φ_{pres}
0.013	0.9499	14.47	0.9489	8.58	0.9359	1.00	0.9208	-3.47	0.8676	-7.66	0.7483	-14.22	0.5891	-25.56
0.02	0.9397	15.82	0.9380	9.67	0.9280	1.54	0.9147	-3.12	0.8643	-7.49	0.7469	-14.16	0.5885	-25.52
0.05	0.9031	20.44	0.8997	13.40	0.8972	3.65	0.8902	-1.71	0.8506	-6.80	0.7411	-13.91	0.5861	-25.34
0.1	0.8624	24.85	0.8582	17.09	0.8555	6.51	0.8540	0.39	0.8287	-5.67	0.7315	-13.49	0.5822	-25.05
0.2	0.8129	29.05	0.8046	21.67	0.7977	10.54	0.7963	3.85	0.7880	-3.53	0.7126	-12.65	0.5742	-24.48
0.3	0.7706	32.91	0.7629	25.48	0.7547	13.70	0.7535	6.60	0.7514	-1.53	0.6943	-11.82	0.5664	-23.91
0.5	0.7072	38.13	0.6987	31.59	0.6884	19.12	0.6873	11.20	0.6886	2.11	0.6593	-10.15	0.5511	-22.79
0.8	0.6375	43.49	0.6292	38.88	0.6168	25.91	0.6138	17.20	0.6154	6.94	0.6106	-7.67	0.5288	-21.13
1	0.6000	46.31	0.5922	41.99	0.5784	30.01	0.5745	20.92	0.5762	9.91	0.5805	-6.01	0.5144	-20.05
1.3	0.5522	49.85	0.5453	46.47	0.5304	35.54	0.5250	26.16	0.5262	14.18	0.5389	-3.54	0.4935	-18.45
1.4	0.5380	50.89	0.5315	47.76	0.5164	37.23	0.5104	27.80	0.5113	15.56	0.5258	-2.72	0.4867	-17.93
1.5	0.5245	51.88	0.5183	48.96	0.5032	38.84	0.4967	29.40	0.4973	16.92	0.5132	-1.91	0.4800	-17.42
2	0.4660	56.14	0.4611	54.00	0.4467	45.80	0.4382	36.87	0.4364	23.54	0.4561	2.13	0.4478	-14.90
2.3	0.4365	58.28	0.4321	56.46	0.4185	49.20	0.4094	40.80	0.4060	27.32	0.4261	4.52	0.4294	-13.43
2.5	0.4187	59.57	0.4146	57.91	0.4017	51.20	0.3922	43.18	0.3878	29.73	0.4077	6.08	0.4176	-12.48
3	0.3793	62.42	0.3759	61.06	0.3645	55.43	0.3550	48.34	0.3484	35.34	0.3668	9.94	0.3894	-10.16
3.5	0.3461	64.82	0.3432	63.66	0.3331	58.82	0.3243	52.53	0.3160	40.30	0.3318	13.68	0.3632	-7.94
4	0.3176	66.88	0.3152	65.86	0.3062	61.58	0.2978	55.95	0.2889	44.53	0.3017	17.27	0.3388	-5.82
5	0.2720	70.19	0.2701	69.33	0.2630	65.78	0.2557	61.11	0.2464	51.18	0.2532	23.88	0.2953	-1.85
7	0.2092	74.75	0.2079	74.07	0.2029	71.29	0.1975	67.59	0.1899	59.55	0.1888	34.33	0.2270	5.05
8	0.1870	76.30	0.1860	75.73	0.1819	73.11	0.1774	69.60	0.1707	62.17	0.1673	38.25	0.2008	8.01
10	0.1538	78.78	0.1529	78.22	0.1494	75.92	0.1459	72.81	0.1406	66.05	0.1365	43.95	0.1613	13.07
15	0.1073	82.16	0.1067	81.67	0.1040	79.64	0.1007	77.10	0.0974	71.29	0.0944	51.59	0.1071	21.62
30	0.0661	85.14	0.0658	84.71	0.0623	82.93	0.0576	80.81	0.0475	76.97	0.0200	64.09	0.0555	31.34



En la tabla 2 se observa que al aumentar la fuerza de presurización, el desplazamiento es mayor. Caso contrario ocurre en la tabla 4 donde se inyecta lubricante en la parte inferior de la chumacera, dicha tabla muestra que al incrementar la fuerza de presurización el desplazamiento del rotor es menor, pues el muñón tiende a moverse hacia arriba cada vez más. Es importante mencionar que en las tablas 3 y 5 las excentricidades “ ε ” y ángulos de actitud “ φ ” muestran una variación cuando las fuerzas de presurización “ f_{prt} ” se incrementa. Esto indica que la estabilidad del rotor puede ser alterada por el efecto de la presurización externa y ubicación del puerto de inyección de aceite lubricante.



Capítulo 5. Determinación de los coeficientes rotodinámicos (rigidez y amortiguamiento)

Los coeficientes rotodinámicos de la película de aceite definen la rigidez y amortiguación que se produce en la película de lubricante que separa al muñón y chumacera, es en una forma similar a un sistema resorte-amortiguador, el cual disipa la energía producida por movimientos oscilatorios. El comportamiento de un rotor está fuertemente influenciado por las características de sus soportes. Las fuerzas que se generan sobre el muñón por la película de lubricante de la chumacera hidrodinámica, son funciones no lineales de la posición y velocidad del centro del eje. Para llevar a cabo el cálculo de las velocidades críticas, las amplitudes de vibración del rotor, así como examinar su estabilidad contra vibraciones auto-excitadas, es fundamental conocer la respuesta que la película de aceite en la chumacera añade a los desplazamientos y velocidades del muñón [40]. Estudios previos han demostrado que el comportamiento dinámico del muñón es influenciado por la película de aceite lubricante ya que debido al movimiento y peso del sistema la película reacciona, produciendo pequeños desplazamientos conocidos como rigideces y velocidades o amortiguamientos [40], [41].

La figura 25 es la representación esquemática de una chumacera hidrodinámica donde se muestran las propiedades dinámicas de rigidez y amortiguamiento de la película de aceite lubricante que evita el contacto entre el muñón y la chumacera.



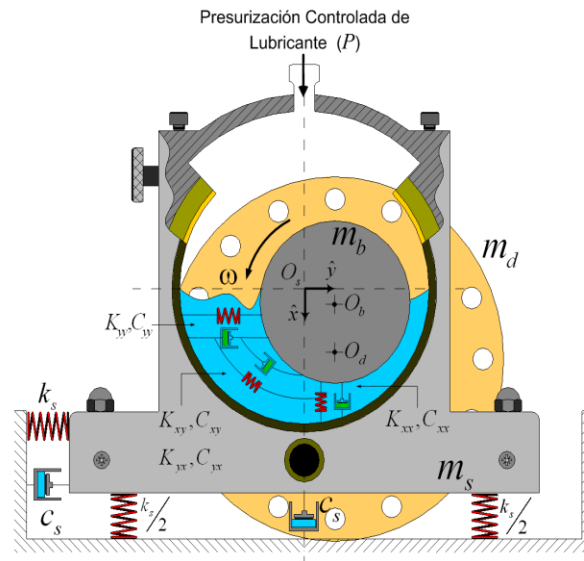


Figura 25. Propiedades dinámicas de rigidez y amortiguamiento (coeficientes rotodinámicos) de la película aceite lubricante de la chumacera hidrodinámica en el sistema coordinado xy [1].

En su tesis Doctoral, Ramírez, I. [1] elaboró de forma detallada el procedimiento matemático para determinar de forma analítica los coeficientes rotodinámicos de rigidez y amortiguamiento.

5.1 Cálculo analítico para los coeficientes rotodinámicos para el caso clásico

En la figura 26 muestran las fuerzas radial y tangencial que genera el movimiento del muñón.



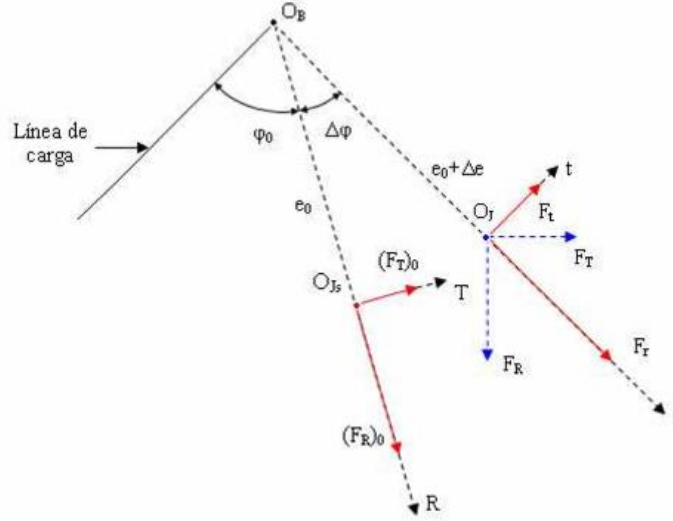


Figura 26. Descomposición de fuerzas de la película de lubricante en una chumacera hidrodinámica [1].

De la figura anterior se obtienen cuatro ecuaciones (el procedimiento está definido en trabajos anteriores), las cuales dos de ellas son para el caso sin presurización donde se define las fuerzas radial y tangencial en forma adimensional, las cuales son [1]:

$$f_{R_{ocv}} = \left(\frac{L}{D}\right)^2 \left[\frac{-4\pi\varepsilon^2}{(1-\varepsilon^2)^2} - \frac{2\pi^2(1+2\varepsilon^2)}{(1-\varepsilon^2)^{5/2}} \frac{\frac{\dot{\varepsilon}}{\omega}}{\left(1-\frac{2\varphi}{\omega}\right)} \right] \quad (5.1)$$

$$f_{T_{ocv}} = \left(\frac{L}{D}\right)^2 \left[\frac{\varepsilon\pi^2}{(1-\varepsilon^2)^{3/2}} - \frac{8\pi\varepsilon}{(1-\varepsilon^2)^2} \frac{\frac{\dot{\varepsilon}}{\omega}}{\left(1-\frac{2\varphi}{\omega}\right)} \right] \quad (5.2)$$

La matriz que determina los coeficientes rotodinámicos de rigidez \bar{K} de modo analítico en su forma adimensional corresponde a la siguiente matriz de rigidez adimensional [25]:

$$\bar{K} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_{R_{ocv}}}{\partial \varepsilon} & \frac{\partial f_{R_{ocv}}}{\varepsilon \partial \varphi} & -\frac{f_{T_{ocv}}}{\varepsilon} \\ \frac{\partial f_{T_{ocv}}}{\partial \varepsilon} & \frac{\partial f_{T_{ocv}}}{\varepsilon \partial \varphi} & +\frac{f_{R_{ocv}}}{\varepsilon} \end{bmatrix} \quad (5.3)$$

La matriz siguiente se conoce como matriz de amortiguamiento adimensional \bar{C} [25] y calcula los coeficientes rotodinámicos de amortiguamiento:



$$\bar{C} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_{R_{ocv}}}{\partial \left(\frac{\dot{\varepsilon}}{\omega_j}\right)} & -\frac{2f_{R_{ocv}}}{\varepsilon} \\ \frac{\partial f_{T_{ocv}}}{\partial \left(\frac{\dot{\varepsilon}}{\omega_j}\right)} & -\frac{2f_{T_{ocv}}}{\varepsilon} \end{bmatrix} \quad (5.4)$$

Sustituyendo las fuerzas adimensionales radial y tangencial en ecuaciones (5.1) y (5.2) en las matrices (5.3) y (5.4) y multiplicando por el número de Sommerfeld para simplificar algunos términos, queda:

$$\bar{K} = \begin{bmatrix} \bar{K}_{RR_{ocv}} & \bar{K}_{RT_{ocv}} \\ \bar{K}_{TR_{ocv}} & \bar{K}_{TT_{ocv}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{K}_{RR_{ocv}} * S & \bar{K}_{RT_{ocv}} * S \\ \bar{K}_{TR_{ocv}} * S & \bar{K}_{TT_{ocv}} * S \end{bmatrix} \quad (5.5)$$

$$\bar{C} = \begin{bmatrix} \bar{C}_{RR_{ocv}} & \bar{C}_{RT_{ocv}} \\ \bar{C}_{TR_{ocv}} & \bar{C}_{TT_{ocv}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{C}_{RR_{ocv}} * S & \bar{C}_{RT_{ocv}} * S \\ \bar{C}_{TR_{ocv}} * S & \bar{C}_{TT_{ocv}} * S \end{bmatrix} \quad (5.6)$$

Donde [1]:

$$S = \left(\frac{D}{L}\right)^2 \frac{(1-\varepsilon)^2}{\varepsilon\pi\sqrt{16\varepsilon^3 + \pi^2(1-\varepsilon^2)}} \quad (5.7)$$

Finalmente, es conveniente expresar a los coeficientes rotodinámicos en el sistema coordenado (xy) mediante la matriz de rotación Q (5.10) [1]:

$$\tilde{K}_{ocv} = - [Q][\bar{K}][Q]^T \quad (5.8)$$

$$\tilde{C}_{ocv} = - [Q][\bar{C}][Q]^T \quad (5.9)$$

Donde:

$$Q = \begin{bmatrix} \cos \varphi & -\text{sen} \varphi \\ \text{sen} \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix} \quad (5.10)$$

$$Q^T = \begin{bmatrix} \cos \varphi & -\text{sen} \varphi \\ \text{sen} \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix} \quad (5.11)$$



La tabla 6 muestra los coeficientes rotodinámicos de la película de aceite lubricante para el caso clásico (solución Ocvirk) [1].

Tabla 6. Coeficientes rotodinámicos (rigidez y amortiguamiento) de la película de aceite lubricante de una chumacera corta (caso clásico) en el sistema de coordenadas X-Y.

$\tilde{K}_{xx\ ocv} = \frac{4[\pi^2 + (32 + \pi^2)\varepsilon^2 + 2(16 - \pi^2)\varepsilon^4]}{(1 - \varepsilon^2)[\pi^2 + (16 - \pi^2)\varepsilon^2]^{3/2}}$	$\tilde{C}_{xx\ ocv} = \frac{2\pi[\pi^2 + 2(24 - \pi^2)\varepsilon^2 + \pi^2\varepsilon^4]}{\varepsilon\sqrt{1 - \varepsilon^2}[\pi^2 + (16 - \pi^2)\varepsilon^2]^{3/2}}$
$\tilde{K}_{xy\ ocv} = \frac{\pi[\pi^2 + (32 + \pi^2)\varepsilon^2 + 2(16 - \pi^2)\varepsilon^4]}{\varepsilon\sqrt{1 - \varepsilon^2}[\pi^2 + (16 - \pi^2)\varepsilon^2]^{3/2}}$	$\tilde{C}_{xy\ ocv} = \frac{8[\pi^2 + 2(\pi^2 - 8)\varepsilon^2]}{[\pi^2 + (16 - \pi^2)\varepsilon^2]^{3/2}}$
$\tilde{K}_{yx\ ocv} = \frac{\pi[-\pi^2 + 2\pi^2\varepsilon^2 + (16 - \pi^2)\varepsilon^4]}{\varepsilon\sqrt{1 - \varepsilon^2}[\pi^2 + (16 - \pi^2)\varepsilon^2]^{3/2}}$	$\tilde{C}_{yx\ ocv} = \frac{8[\pi^2 + 2(\pi^2 - 8)\varepsilon^2]}{[\pi^2 + (16 - \pi^2)\varepsilon^2]^{3/2}}$
$\tilde{K}_{yy\ ocv} = \frac{4[2\pi^2 + (16 - \pi^2)\varepsilon^2]}{[\pi^2 + (16 - \pi^2)\varepsilon^2]^{3/2}}$	$\tilde{C}_{yy\ ocv} = \frac{2\pi(1 - \varepsilon^2)^{1/2}[\pi^2 + 2(\pi^2 - 8)\varepsilon^2]}{\varepsilon[\pi^2 + (16 - \pi^2)\varepsilon^2]^{3/2}}$

5.2 Cálculo analítico para los coeficientes rotodinámicos para el caso presurizado

Las fuerzas radial y tangencial correspondientes para el caso presurizado son [1], [37].

$$f_R = - \left(\frac{L}{D}\right)^2 \bar{q}_{prt} \frac{(1-a^2)\cos(\beta-\varphi)}{8[1-\varepsilon\cos(\beta-\varphi)]^3} \cdot \frac{1}{\left(1-\frac{2\varphi}{\omega}\right)} \quad (5.12)$$

$$f_T = - \left(\frac{L}{D}\right)^2 \bar{q}_{prt} \frac{(1-a^2)\sen(\beta-\varphi)}{8[1-\varepsilon\cos(\beta-\varphi)]^3} \cdot \frac{1}{\left(1-\frac{2\varphi}{\omega}\right)} \quad (5.13)$$

Las ecuaciones anteriores determinan las fuerzas adimensionales radiales y transversales para una chumacera corta presurizada, cuya ubicación axial y angular es arbitraria respectivamente.



La matriz que determina los coeficientes rotodinámicos de rigidez \bar{K} de modo analítico en su forma adimensional corresponde a la siguiente matriz de rigidez adimensional [25]:

$$\bar{K} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_{R_{pres}}}{\partial \varepsilon} & \frac{\partial f_{R_{pres}}}{\varepsilon \partial \varphi} - \frac{f_{T_{pres}}}{\varepsilon} \\ \frac{\partial f_{T_{pres}}}{\partial \varepsilon} & \frac{\partial f_{T_{pres}}}{\varepsilon \partial \varphi} + \frac{f_{R_{pres}}}{\varepsilon} \end{bmatrix} \quad (5.14)$$

La matriz siguiente se conoce como matriz de amortiguamiento adimensional \bar{C} [25] y calcula los coeficientes rotodinámicos de amortiguamiento:

$$\bar{C} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_{R_{pres}}}{\partial \left(\frac{\dot{\varepsilon}}{\omega_j}\right)} & -\frac{2f_{R_{pres}}}{\varepsilon} \\ \frac{\partial f_{T_{pres}}}{\partial \left(\frac{\dot{\varepsilon}}{\omega_j}\right)} & -\frac{2f_{T_{pres}}}{\varepsilon} \end{bmatrix} \quad (5.15)$$

Sustituyendo las fuerzas adimensionales radial y tangencial (5.12) y (5.13) en las matrices (5.14) y (5.15) y multiplicando por el número de Sommerfeld para simplificar algunos términos, queda [18]:

$$\bar{\bar{K}} = \begin{bmatrix} \bar{\bar{K}}_{RR_{pres}} & \bar{\bar{K}}_{RT_{pres}} \\ \bar{\bar{K}}_{TR_{pres}} & \bar{\bar{K}}_{TT_{pres}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{K}_{RR_{pres}} * S & \bar{K}_{RT_{pres}} * S \\ \bar{K}_{TR_{pres}} * S & \bar{K}_{TT_{pres}} * S \end{bmatrix} \quad (5.16)$$

$$\bar{\bar{C}} = \begin{bmatrix} \bar{\bar{C}}_{RR_{pres}} & \bar{\bar{C}}_{RT_{pres}} \\ \bar{\bar{C}}_{TR_{pres}} & \bar{\bar{C}}_{TT_{pres}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{C}_{RR_{pres}} * S & \bar{C}_{RT_{pres}} * S \\ \bar{C}_{TR_{pres}} * S & \bar{C}_{TT_{pres}} * S \end{bmatrix} \quad (5.17)$$

Donde:

$$S = \left(\frac{D}{L}\right)^2 \frac{(1-\varepsilon)^2}{\varepsilon \pi \sqrt{16\varepsilon^3 + \pi^2(1-\varepsilon^2)}} \quad (5.18)$$

Finalmente se multiplica por la matriz de rotación Q (5.10), todo ello para poder trasladarse al plano xy:

$$\tilde{K}_{pres} = -[Q][\bar{\bar{K}}][Q]^T \quad (5.19)$$



$$\tilde{C}_{pres} = - [Q][\bar{C}][Q]^T \quad (5.20)$$

Los resultados obtenidos del caso clásico (solución de Ocvirk) más el caso presurizado (solución presurizada) de la matriz de total de rigidez \bar{K} puede escribirse como [1], [25]:

$$\bar{K}_{TOT} = \begin{bmatrix} \tilde{K}_{xx-ocv} & \tilde{K}_{xy-ocv} \\ \tilde{K}_{yx-ocv} & \tilde{K}_{yy-ocv} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \tilde{K}_{xx-pres} & \tilde{K}_{xy-pres} \\ \tilde{K}_{yx-pres} & \tilde{K}_{yy-pres} \end{bmatrix} \quad (5.21)$$

O bien:

$$\bar{K}_{TOT} = [\tilde{K}_{ocv} + \tilde{K}_{pres}] = \begin{bmatrix} K_{xx} & K_{xy} \\ K_{yx} & K_{yy} \end{bmatrix} \quad (5.22)$$

En forma semejante los coeficientes de amortiguamiento totales \bar{C} puede escribirse como:

$$\bar{C}_{TOT} = \begin{bmatrix} \tilde{C}_{xx-ocv} & \tilde{C}_{xy-ocv} \\ \tilde{C}_{yx-ocv} & \tilde{C}_{yy-ocv} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \tilde{C}_{xx-pres} & \tilde{C}_{xy-pres} \\ \tilde{C}_{yx-pres} & \tilde{C}_{yy-pres} \end{bmatrix} \quad (5.23)$$

O bien:

$$\bar{C}_{TOT} = [\tilde{C}_{ocv} + \tilde{C}_{pres}] = \begin{bmatrix} C_{xx} & C_{xy} \\ C_{yx} & C_{yy} \end{bmatrix} \quad (5.24)$$

La tabla 7 muestra los coeficientes rotodinámicos de la película de aceite lubricante para el caso presurizado (solución preusrizado) [1].



Tabla 7. Coeficientes rotodinámicos (rigidez y amortiguamiento) de la película de aceite lubricante de una chumacera corta (caso presurizado externamente) cuya ubicación axial (a) y angular (β) es arbitraria en el sistema de coordenadas X-Y.

$\tilde{K}_{XX\ pres} = - \frac{3(-1+a^2)(-1+\varepsilon^2)^2 \bar{q}_{prt} \{16\varepsilon^2 + \pi^2 - \varepsilon^2 \pi^2 + [-\pi^2 + \varepsilon^2(16+\pi^2)] \cos 2(\beta-\varphi) - 8\varepsilon\sqrt{1-\varepsilon^2} \pi \operatorname{sen} 2(\beta-\varphi)\}}{16\varepsilon\pi[\pi^2 - \varepsilon^2(-16+\pi^2)]^{\frac{3}{2}} [-1+\varepsilon \cos(\beta-\varphi)]^4}$
$\tilde{K}_{XY\ pres} = - \frac{3(-1+a^2)(-1+\varepsilon^2)^2 \bar{q}_{prt} \{8\varepsilon\sqrt{1-\varepsilon^2} \pi \cos 2(\beta-\varphi) + [-\pi^2 + \varepsilon^2(16+\pi^2)] \operatorname{sen} 2(\beta-\varphi)\}}{16\varepsilon\pi[\pi^2 - \varepsilon^2(-16+\pi^2)]^{\frac{3}{2}} [-1+\varepsilon \cos(\beta-\varphi)]^4}$
$\tilde{K}_{YX\ pres} = - \frac{3(-1+a^2)(-1+\varepsilon^2)^2 \bar{q}_{prt} \{8\varepsilon\sqrt{1-\varepsilon^2} \pi \cos 2(\beta-\varphi) + [-\pi^2 + \varepsilon^2(16+\pi^2)] \operatorname{sen} 2(\beta-\varphi)\}}{16\varepsilon\pi[\pi^2 - \varepsilon^2(-16+\pi^2)]^{\frac{3}{2}} [-1+\varepsilon \cos(\beta-\varphi)]^4}$
$\tilde{K}_{YY\ pres} = \frac{3(-1+a^2)(-1+\varepsilon^2)^2 \bar{q}_{prt} \{-16\varepsilon^2 - \pi^2 + \varepsilon^2 \pi^2 + [-\pi^2 + \varepsilon^2(16+\pi^2)] \cos 2(\beta-\varphi) - 8\varepsilon\sqrt{1-\varepsilon^2} \pi \operatorname{sen} 2(\beta-\varphi)\}}{16\varepsilon\pi[\pi^2 - \varepsilon^2(-16+\pi^2)]^{\frac{3}{2}} [-1+\varepsilon \cos(\beta-\varphi)]^4}$
$\tilde{C}_{XX\ pres} = \frac{(-1+a^2)(-1+\varepsilon^2)^{\frac{5}{2}} \bar{q}_{prt} [4\varepsilon \cos(\beta-\varphi) - \sqrt{1-\varepsilon^2} \pi \operatorname{sen}(\beta-\varphi)]}{4\varepsilon^2[\pi^2 - \varepsilon^2(-16+\pi^2)]^{\frac{3}{2}} [-1+\varepsilon \cos(\beta-\varphi)]^3}$
$\tilde{C}_{XY\ pres} = - \frac{(-1+a^2)(-1+\varepsilon^2)^2 \bar{q}_{prt} [4\varepsilon \cos(\beta-\varphi) - \sqrt{1-\varepsilon^2} \pi \operatorname{sen}(\beta-\varphi)]}{\varepsilon\pi[\pi^2 - \varepsilon^2(-16+\pi^2)]^{\frac{3}{2}} [-1+\varepsilon \cos(\beta-\varphi)]^3}$
$\tilde{C}_{YX\ pres} = \frac{(-1+a^2)(-1+\varepsilon^2)^{\frac{5}{2}} \bar{q}_{prt} [\sqrt{1-\varepsilon^2} \pi \cos(\beta-\varphi) + 4\varepsilon \operatorname{sen}(\beta-\varphi)]}{4\varepsilon^2[\pi^2 - \varepsilon^2(-16+\pi^2)]^{\frac{3}{2}} [-1+\varepsilon \cos(\beta-\varphi)]^3}$
$\tilde{C}_{YY\ pres} = \frac{(-1+a^2)(-1+\varepsilon^2)^2 \bar{q}_{prt} \{\sqrt{1-\varepsilon^2} \pi \cos[(\beta-\varphi) + 4\varepsilon \operatorname{sen}(\beta-\varphi)]\}}{\varepsilon\pi[\pi^2 - \varepsilon^2(-16+\pi^2)]^{\frac{3}{2}} [-1+\varepsilon \cos(\beta-\varphi)]^3}$

Las formulas establecidas en la tabla 7 son las responsables de determinar los coeficientes rotodinámicos, que son de gran importancia pues son válidos para inyectar lubricante en un puerto cuya ubicación axial (a) y angular sea arbitraria (β). Una vez conociendo la dependencia entre la excentricidad de equilibrio (ε) y el nuevo ángulo de actitud (φ) y el número de Sommerfeld (s) se sustituirán en las formulas dadas (tabla 7) para obtener los



coeficientes rotodinámicos como función de la excentricidad y de la intensidad de presurización \bar{q}_{prt} .

5.3 Coeficientes rotodinámicos de una chumacera hidrodinámica presurizada en las posiciones ($\beta = 2\pi/3$ y $\pi/3$)

Las siguientes tablas (las cuales no se encuentran en la literatura y determinarlas es uno de los objetivos del presente trabajo) muestran los valores de los coeficientes rotodinámicos (cuando se presuriza a una posición de $\beta=2\pi/3$) obtenidos de las formulas dadas en las tablas 6 y 7 para diversos valores de fuerza de presurización. De igual manera se observa como los coeficientes rotodinámicos van cambiando como función de la excentricidad de equilibrio y fuerza de presurización.

Caso 1. $\beta=2\pi/3$ inyección superior, ver figura 20.

Tabla 8. Puerto de inyección Superior, $(L/D) = 1/4$, $f_{prt} = 0$; $\beta = 2\pi/3$.

Excentricidad "ε"	$\beta=2\pi/3$									
	$f_{prt}=0$		k_{xx}	k_{xy}	k_{yx}	k_{yy}	C_{xx}	C_{xy}	C_{yx}	C_{yy}
	S	φ								
0.05	32.23580	86.35	1.287	20.191	-19.879	2.542	40.243	2.543	2.523	39.895
0.1	15.83970	82.7	1.328	10.38	-9.757	2.53	20.487	2.532	2.532	19.79
0.15	10.25530	79.06	1.398	7.238	-6.304	2.511	14.066	2.5153	2.5153	13.021
0.2	7.37910	75.43	1.497	5.763	-4.52	2.484	10.98	2.491	2.491	9.586
0.25	5.59181	71.8	1.629	4.955	-3.404	2.451	9.23	2.462	2.462	7.489
0.3	4.35482	68.17	1.794	4.482	-2.624	2.412	8.153	2.427	2.427	6.061
0.35	3.43813	64.55	1.999	4.203	-2.037	2.368	7.463	2.387	2.387	5.017
0.4	2.72737	60.93	2.249	4.047	-1.571	2.318	7.022	2.343	2.343	4.216
0.45	2.15945	57.31	2.552	3.976	-1.186	2.265	6.753	2.295	2.295	3.577
0.5	1.69679	53.68	2.923	3.976	-0.857	2.209	6.614	2.245	2.245	3.053
0.55	1.31570	50.02	3.379	4.03	-0.568	2.151	6.583	2.192	2.192	2.614
0.6	1.00048	46.32	3.951	4.137	-0.307	2.091	6.65	2.138	2.138	2.238
0.65	0.74299	42.55	4.685	4.301	-0.062	2.03	6.817	2.082	2.082	1.912
0.7	0.52743	38.7	5.659	4.534	0.173	1.969	7.098	2.026	2.026	1.624
0.75	0.35611	34.7	7.016	4.86	0.413	1.908	7.528	1.97	1.97	1.365
0.8	0.22215	30.5	9.042	5.326	0.673	1.847	8.176	1.915	1.915	1.128
0.85	0.12202	25.95	12.402	6.036	0.985	1.788	9.197	1.86	1.86	0.905
0.9	0.05304	20.82	19.096	7.263	1.421	1.729	10.998	1.805	1.805	0.686
0.95	0.01299	14.47	39.123	10.099	2.2668	1.672	15.213	1.752	1.752	0.4524



Tabla 9. Puerto de inyección Superior, $(L/D) = 1/4$. $f_{prt} = 1$; $\beta = 2\pi/3$

Excentricidad "ε"	$\beta=2\pi/3$									
	$f_{prt}=1$		k_{xx}	k_{xy}	k_{yx}	k_{yy}	C_{xx}	C_{xy}	C_{yx}	C_{yy}
	S	φ								
0.05	32.37220	85.9	1.2941	20.1780	-19.8910	2.5631	40.0650	2.5544	2.8469	39.8750
0.1	15.91950	82.21	1.3368	10.3670	-9.7719	2.5548	20.3870	2.5453	2.7026	19.7690
0.15	10.31312	78.51	1.4080	7.2221	-6.3212	2.5393	13.9920	2.5296	2.6405	12.9970
0.2	7.42499	74.82	1.5089	5.7443	-4.5390	2.5166	10.9190	2.5073	2.5937	9.5604
0.25	5.62963	71.14	1.6415	4.9343	-3.4255	2.4871	9.1790	2.4790	2.5490	7.4605
0.3	4.38629	67.47	1.8084	4.4596	-2.6475	2.4511	8.1082	2.4449	2.5025	6.0309
0.35	3.46414	63.82	2.0140	4.1789	-2.0618	2.4089	7.4244	2.4057	2.4530	4.9865
0.4	2.74851	60.18	2.2642	4.0227	-1.5966	2.3610	6.9881	2.3619	2.4001	4.1847
0.45	2.17619	56.56	2.5678	3.9539	-1.2116	2.3081	6.7242	2.3141	2.3443	3.5463
0.5	1.70963	52.94	2.9377	3.9523	-0.8820	2.2508	6.5903	2.2629	2.2861	3.0237
0.55	1.32519	49.31	3.3931	4.0077	-0.5914	2.1900	6.5636	2.2092	2.2262	2.5861
0.6	1.00718	45.66	3.9635	4.1170	-0.3278	2.1266	6.6344	2.1535	2.1653	2.2128
0.65	0.74480	41.96	4.6957	4.2837	-0.0812	2.0616	6.8047	2.0965	2.1041	1.8890
0.7	0.53027	38.17	5.6686	4.5192	0.1579	1.9958	7.0890	2.0388	2.0431	1.6035
0.75	0.35782	34.25	7.0244	4.8474	0.4007	1.9301	7.5214	1.9810	1.9828	1.3476
0.8	0.22303	30.11	9.0483	5.3161	0.6637	1.8652	8.1718	1.9236	1.9236	1.1135
0.85	0.12241	25.63	12.4070	6.0287	0.9773	1.8015	9.1942	1.8669	1.8657	0.8936
0.9	0.05318	20.57	19.0990	7.2578	1.4154	1.7395	10.9960	1.8113	1.8094	0.6777
0.95	0.01301	14.28	39.1250	10.0950	2.2628	1.6793	15.2120	1.7568	1.7546	0.4456

Tabla 10. Puerto de inyección Superior, $(L/D) = 1/4$. $f_{prt} = 5$; $\beta = 2\pi/3$.

Excentricidad "ε"	$\beta=2\pi/3$									
	$f_{prt}=5$		k_{xx}	k_{xy}	k_{yx}	k_{yy}	C_{xx}	C_{xy}	C_{yx}	C_{yy}
	S	φ								
0.05	32.97190	84.2	1.3253	20.1300	-19.9390	2.6394	39.3250	2.6015	4.0044	39.8020
0.1	16.24731	80.3	1.3736	10.3110	-9.8289	2.6429	19.9720	2.5984	3.3435	19.6870
0.15	10.54950	76.4	1.4509	7.1566	-6.3868	2.6393	13.6870	2.5885	3.1062	12.9070
0.2	7.61170	72.52	1.5578	5.6705	-4.6129	2.6281	10.6720	2.5717	2.9673	9.4633
0.25	5.78221	68.67	1.6959	4.8529	-3.5069	2.6085	8.9694	2.5479	2.8622	7.3575
0.3	4.51180	64.88	1.8672	4.3723	-2.7348	2.5803	7.9277	2.5172	2.7700	5.9238
0.35	3.56670	61.15	2.0757	4.0878	-2.1529	2.5430	7.2688	2.4798	2.6824	4.8773
0.4	2.83077	57.49	2.3269	3.9303	-1.6890	2.4967	6.8548	2.4360	2.5962	4.0757
0.45	2.24057	53.89	2.6295	3.8629	-1.3026	2.4419	6.6114	2.3864	2.5104	3.4398
0.5	1.75854	50.36	2.9965	3.8652	-0.9692	2.3795	6.4964	2.3320	2.4250	2.9215
0.55	1.36105	46.86	3.4475	3.9266	-0.6726	2.3017	6.4868	2.2736	2.3406	2.4901
0.6	1.03244	43.37	4.0123	4.0435	-0.4013	2.2371	6.5730	2.2122	2.2575	2.1244
0.65	0.76180	39.87	4.7383	4.2189	-0.1459	2.1599	6.7566	2.1488	2.1773	1.8093
0.7	0.54100	36.3	5.7046	4.4636	0.1022	2.0817	7.0523	2.0846	2.0997	1.5328
0.75	0.36413	32.63	7.0540	4.8009	0.3542	2.0030	7.4943	2.0202	2.0254	1.2862
0.8	0.22637	28.69	9.0720	5.2784	0.6260	1.9249	8.1526	1.9563	1.9542	1.0616
0.85	0.12394	24.44	12.4250	5.9992	0.9477	1.8491	9.1812	1.8936	1.8866	0.8507
0.9	0.05371	19.6	19.1130	7.2356	1.3932	1.7758	10.9880	1.8323	1.8224	0.6433
0.95	0.01311	13.53	39.1340	10.0800	2.2471	1.7052	15.2080	1.7727	1.7614	0.4194



Tabla 11. Puerto de inyección Superior, $(L/D) = 1/4$. $f_{prt} = 10$; $\beta = 2\pi/3$.

Excentricidad "ε"	$\beta=2\pi/3$									
	$f_{prt}=10$		k _{xx}	k _{xy}	k _{yx}	k _{yy}	C _{xx}	C _{xy}	C _{yx}	C _{yy}
	S	φ								
0.05	33.74670	82.17	1.37	20.068	-20.001	2.7225	38.354	2.6634	5.324	39.718
0.1	16.64470	78.05	1.4267	10.239	-9.8998	2.7363	19.43	2.6678	4.0623	19.595
0.15	10.85550	73.96	1.512	7.0768	-6.4665	2.7415	13.293	2.6646	3.6146	12.809
0.2	7.85062	69.92	1.6266	5.5827	-4.7007	2.7378	10.356	2.6536	3.3652	9.3599
0.25	5.97459	65.95	1.771	4.7588	-3.6011	2.7237	8.7066	2.6343	3.1872	7.2507
0.3	4.66755	62.07	1.9469	4.2741	-2.833	2.6983	7.7057	2.6061	3.0403	5.8156
0.35	3.69154	58.32	2.1573	3.9881	-2.2526	2.6616	7.0809	2.5691	2.9092	4.7694
0.4	2.92917	54.68	2.4079	3.8316	-1.7877	2.6136	6.6968	2.5238	2.7866	3.97
0.45	2.31637	51.15	2.7075	3.7676	-1.3979	2.5552	6.4797	2.4709	2.6697	3.3376
0.5	1.81537	47.72	3.0695	3.7751	-1.0592	2.4877	6.388	2.4117	2.5575	2.8241
0.55	1.40234	44.36	3.5139	3.8432	-0.75588	2.4126	6.3989	2.3473	2.4499	2.3985
0.6	1.06134	41.04	4.0713	3.968	-0.4768	2.3316	6.5028	2.2792	2.347	2.0393
0.65	0.78112	37.72	4.7894	4.1518	-0.21307	2.2465	6.7016	2.2087	2.249	1.7312
0.7	0.55329	34.34	5.7479	4.4053	0.043989	2.1588	7.0103	2.1371	2.1561	1.4626
0.75	0.37139	30.85	7.0898	4.7515	0.30474	2.0704	7.4629	2.0654	2.0685	1.224
0.8	0.23027	27.16	9.1008	5.2375	0.58503	1.9828	8.1301	1.9945	1.9862	1.0074
0.85	0.12573	23.13	12.447	5.9663	0.91483	1.897	9.1659	1.925	1.9091	0.80454
0.9	0.05434	18.51	19.129	7.2102	1.3679	1.8139	10.978	1.8575	1.8369	0.60531
0.95	0.01323	12.68	39.146	10.061	2.2288	1.7337	15.203	1.7918	1.7691	0.38956

Tabla 12. Puerto de inyección Superior, $(L/D) = 1/4$. $f_{prt} = 20$; $\beta = 2\pi/3$.

Excentricidad "ε"	$\beta=2\pi/3$									
	$f_{prt}=20$		k _{xx}	k _{xy}	k _{yx}	k _{yy}	C _{xx}	C _{xy}	C _{yx}	C _{yy}
	S	φ								
0.05	35.39880	78.41	1.4749	19.949	-20.12	2.8517	36.328	2.7925	7.565	39.575
0.1	17.57810	74	1.5487	10.106	-10.033	2.8738	18.319	2.8099	5.2376	19.444
0.15	11.49320	69.66	1.6504	6.9317	-6.6116	2.8849	12.499	2.818	4.4525	12.653
0.2	8.33983	65.44	1.7783	5.4287	-4.8546	2.8835	9.7351	2.8151	3.9755	9.2013
0.25	6.36049	61.38	1.9317	4.5999	-3.76	2.869	8.202	2.8002	3.6697	7.0921
0.3	4.97310	57.549	2.1116	4.1142	-2.9929	2.841	7.2897	2.7727	3.4311	5.6591
0.35	3.93140	53.79	2.3209	3.8305	-2.4101	2.8002	6.7366	2.7329	3.2302	4.6168
0.4	3.11459	50.25	2.566	3.6795	-1.9398	2.7472	6.4125	2.6818	3.0521	3.8224
0.45	2.45687	46.88	2.8564	3.6229	-1.5426	2.6838	6.2461	2.6208	2.8906	3.1959
0.5	1.91933	43.63	3.2065	3.6396	-1.1947	2.6109	6.1975	2.5517	2.7413	2.689
0.55	1.47715	40.49	3.6375	3.7179	-0.88121	2.5304	6.245	2.4763	2.6027	2.2703
0.6	1.11344	37.4	4.1805	3.8537	-0.59107	2.4434	6.38	2.3964	2.4732	1.9188
0.65	0.81596	34.34	4.8841	4.049	-0.3159	2.352	6.6051	2.3139	2.3523	1.6187
0.7	0.57544	31.24	5.8284	4.3142	-0.04708	2.2573	6.9358	2.2301	2.2393	1.3586
0.75	0.38455	28.03	7.1568	4.6724	0.22565	2.1606	7.4069	2.1463	2.134	1.1293
0.8	0.23737	24.64	9.1552	5.1702	0.51779	2.0637	8.0893	2.0637	2.0362	0.92242
0.85	0.12905	20.92	12.49	5.9107	0.85925	1.9676	9.1377	1.983	1.9454	0.72992
0.9	0.05563	16.62	19.162	7.1662	1.3238	1.8728	10.96	1.9045	1.861	0.54186
0.95	0.01346	11.12	39.169	10.028	2.1958	1.7803	15.193	1.8284	1.7825	0.3376



Tabla 13. Puerto de inyección Superior, $(L/D) = 1/4$. $f_{prt} = 50$; $\beta = 2\pi/3$.

Excentricidad "ε"	$\theta=2\pi/3$									
	$f_{prt}=50$		k_{xx}	k_{xy}	k_{yx}	k_{yy}	C_{xx}	C_{xy}	C_{yx}	C_{yy}
	S	φ								
0.05	40.97010	69.3	1.8489	19.668	-20.402	3.0293	30.352	3.1734	11.749	39.308
0.1	20.54410	64.59	1.9612	9.8138	-10.325	3.0395	15.186	3.2108	7.2857	19.182
0.15	13.52020	60.13	2.0894	6.6364	-6.9069	3.036	10.367	3.2298	5.7378	12.398
0.2	9.84017	55.92	2.2307	5.1374	-5.146	3.0191	8.1427	3.229	4.9138	8.9574
0.25	7.50218	52	2.3842	4.3171	-4.0427	2.991	6.9606	3.2083	4.3802	6.8585
0.3	5.84311	48.57	2.5519	3.8384	-3.2687	2.9606	6.2983	3.1696	4.005	5.4293
0.35	4.59688	44.92	2.742	3.5722	-2.6685	2.9043	5.9386	3.1126	3.6832	4.4012
0.4	3.61570	41.72	2.9607	3.4342	-2.1851	2.8482	5.7647	3.0417	3.4276	3.6137
0.45	2.82851	38.7	3.2206	3.3907	-1.7748	2.7843	5.7191	2.9589	3.2066	2.9931
0.5	2.18970	35.83	3.5381	3.4201	-1.4142	2.137	5.7691	2.8666	3.0104	2.4912
0.55	1.66931	33.06	3.9354	3.5114	-1.0877	2.6363	5.8981	2.7672	2.8325	2.0777
0.6	1.24615	30.37	4.4448	3.6602	-0.78459	2.5537	6.1009	2.663	2.6698	1.731
0.65	0.90438	27.7	5.1155	3.8692	-0.49565	2.4656	6.3829	2.5558	2.5193	1.4368
0.7	0.63166	25.01	6.0281	4.1489	-0.21243	2.3734	6.7615	2.4475	2.3796	1.1836
0.75	0.41810	22.24	7.3263	4.5222	0.07546	2.2776	7.2731	2.3395	2.2498	0.96219
0.8	0.25566	19.3	9.2962	5.0363	0.3838	2.179	7.9896	2.233	2.129	0.7649
0.85	0.13769	16.07	12.605	5.794	0.7425	2.0783	9.0668	2.1287	2.0165	0.5838
0.9	0.05870	12.31	19.252	7.0675	1.2251	1.9759	10.914	2.0269	1.9115	0.4092
0.95	0.01409	7.42	39.236	9.9497	2.1171	1.8706	15.168	1.9268	1.8123	0.2221

Tabla 14. Puerto de inyección Superior $(L/D) = 1/4$. $f_{prt} = 100$; $\beta = 2\pi/3$.

Excentricidad "ε"	$\theta=2\pi/3$									
	$f_{prt}=100$		k_{xx}	k_{xy}	k_{yx}	k_{yy}	C_{xx}	C_{xy}	C_{yx}	C_{yy}
	S	φ								
0.05	51.46820	59.20°	2.4306	19.452	-20.617	3.0192	22.571	3.6694	13.952	39.168
0.1	25.91210	54.67°	2.5514	9.618	-10.521	3.0069	11.353	3.7014	8.232	19.061
0.15	17.04270	50.47°	2.6728	6.4605	-7.0829	2.9864	7.8912	3.708	6.2847	12.293
0.2	12.34911	46.59°	2.7953	4.9786	-5.3048	2.9593	6.3675	3.6904	5.2804	8.8621
0.25	9.34609	43°	2.9223	4.172	-4.1878	2.9261	5.6158	3.6504	4.6511	6.7694
0.3	7.21574	39.68°	3.0597	3.7074	-3.3997	2.8876	5.2471	3.5906	4.2079	5.348
0.35	5.61220	36.59°	3.2154	3.4426	-2.7981	2.8439	5.0959	3.5135	3.8684	4.3131
0.4	4.36351	33.70°	3.3995	3.3076	-2.3116	2.7951	5.0809	3.4217	3.5921	3.5223
0.45	3.37270	30.99°	3.6251	3.2646	-1.9009	2.7419	5.1592	3.3182	3.3575	2.8963
0.5	3.57961	28.40°	3.6983	3.4396	-1.3948	2.5821	5.5876	3	2.9567	2.5307
0.55	1.94310	25.92°	4.2727	3.384	-1.2151	2.6196	5.5196	3.0845	2.9626	1.9686
0.6	1.43350	23.50°	4.7496	3.5322	-0.91261	2.551	5.7908	2.9591	2.7902	1.6161
0.65	1.02851	21.11°	5.3885	3.7412	-0.62363	2.4776	6.1306	2.8305	2.6299	1.3163
0.7	0.71039	18.71°	6.2703	4.0221	-0.33923	2.3998	6.5587	2.7006	2.4799	1.0584
0.75	0.46514	16.24°	7.5384	4.3983	-0.04845	2.3175	7.1129	2.5707	2.3388	0.8337
0.8	0.28142	13.62°	9.4792	4.9172	0.26479	2.2308	7.8666	2.4418	2.2056	0.63484
0.85	0.14998	10.74°	12.759	5.6819	0.63043	2.1401	8.9763	2.3147	2.0797	0.45406
0.9	0.06326	7.37°	19.379	6.965	1.1227	2.0446	10.852	2.1893	1.9598	0.28221
0.95	0.01502	2.97°	39.334	9.8601	2.0275	1.9428	15.132	2.0637	1.8435	0.10116



Ahora, en las figuras 27-32 se muestran los comportamientos de los coeficientes rotodinámicos, los cuales son influenciados por la fuerza de presurización. El cambio de los coeficientes es significativamente importante debido a la presurización de lubricante.

$$f_{prt} = 5$$

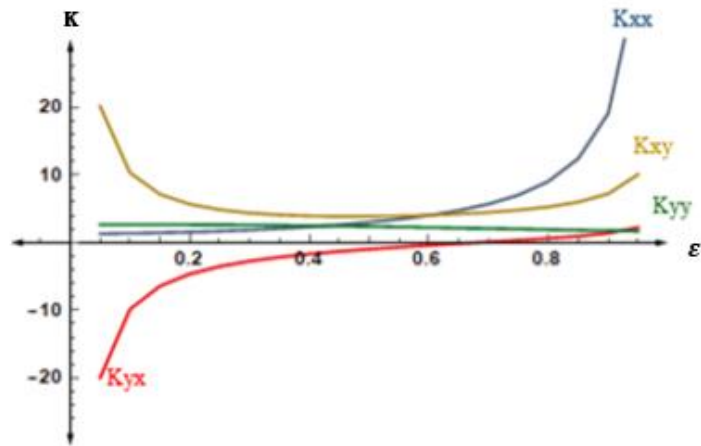


Figura 27. Coeficientes rotodinámicos de **rigidez** para una chumacera corta presurizada. Inyección superior (inyección a 120°); $L/D=1/4$, $f_{prt} = 5$.

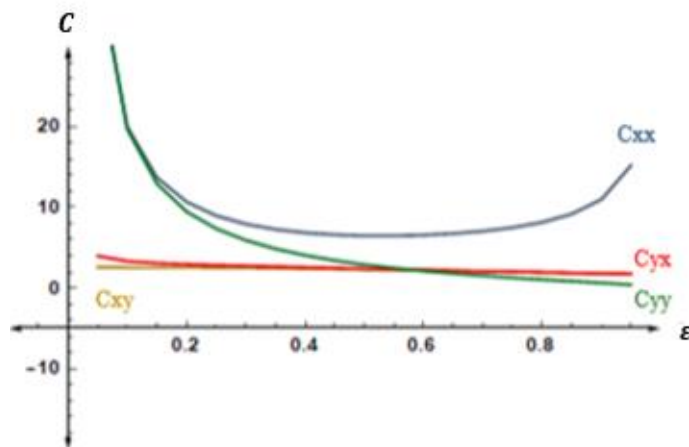


Figura 28. Coeficientes rotodinámicos de **amortiguamiento** para una chumacera corta presurizada. Inyección superior (inyección a 120°); $L/D=1/4$, $f_{prt} = 5$.



$$f_{prt} = 20$$

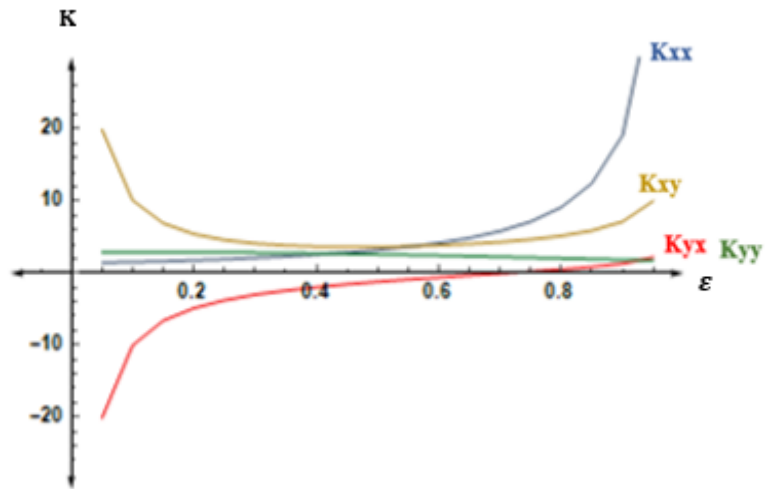


Figura 29. Coeficientes rotodinámicos de **rigidez** para una chumacera corta presurizada. Inyección superior (inyección a 120°); $L/D=1/4$, $f_{prt} = 20$.

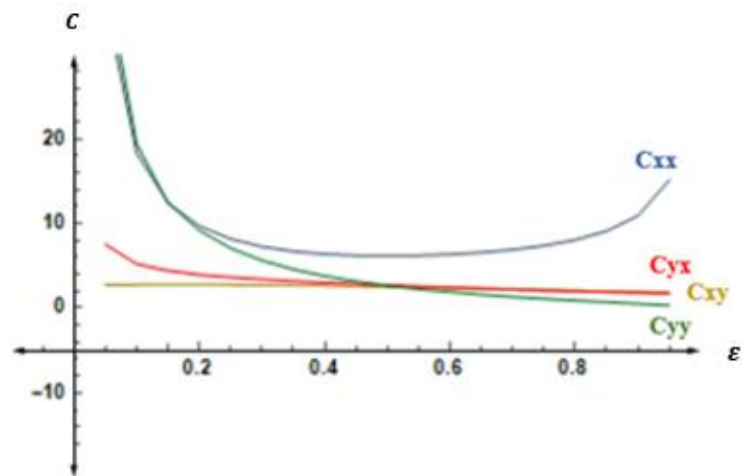


Figura 30. Coeficientes rotodinámicos de **amortiguamiento** para una chumacera corta presurizada. Inyección superior (inyección a 120°); $L/D=1/4$, $f_{prt} = 20$.



$$f_{prt} = 100$$

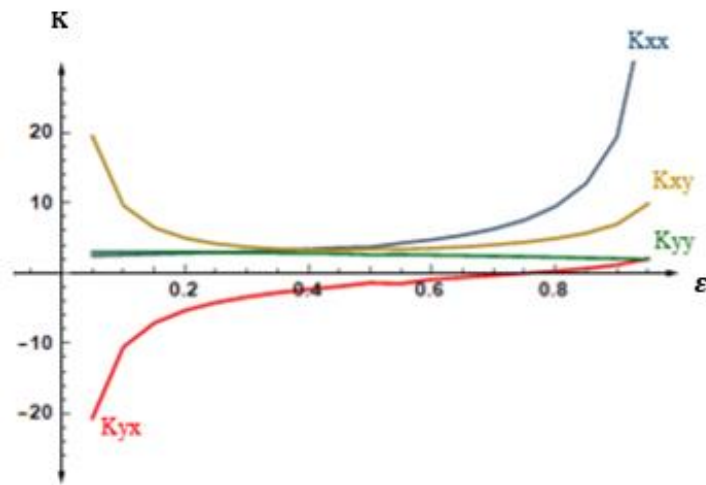


Figura 31. Coeficientes rotodinámicos de **rigidez** para una chumacera corta presurizada. Inyección superior (inyección a 120°); $L/D=1/4$, $f_{prt} = 100$.

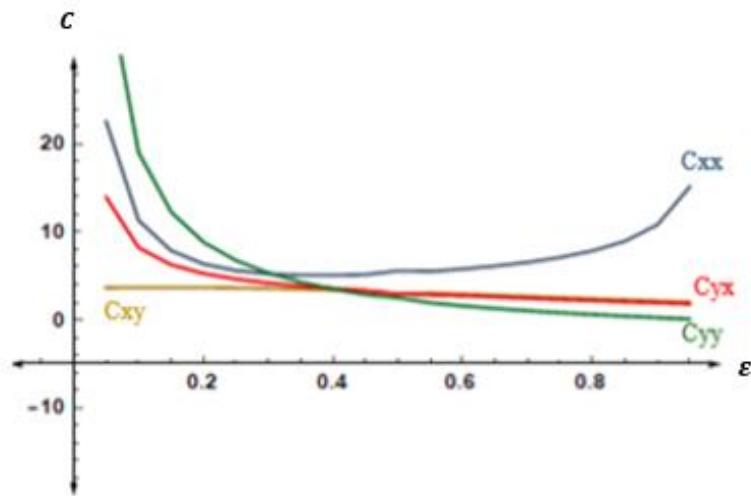


Figura 32. Coeficientes rotodinámicos de **amortiguamiento** para una chumacera corta presurizada. Inyección superior (inyección a 120°); $L/D=1/4$, $f_{prt} = 100$.

De igual forma las tablas siguientes muestran los valores de los coeficientes rotodinámicos cuando se presuriza a una posición de $\beta = \pi/3$ “parte inferior”.



Tabla 15. Puerto de inyección Inferior, $(L/D) = 1/4$. $f_{prt} = 0$; $\beta = \pi/3$.

Excentricidad "e"	$\beta=2\pi/3$									
	$f_{prt}=0$		k_{xx}	k_{xy}	k_{yx}	k_{yy}	C_{xx}	C_{xy}	C_{yx}	C_{yy}
	S	φ								
0.05	32.23580	86.35	1.287	20.191	-19.879	2.542	40.243	2.543	2.523	39.895
0.1	15.83970	82.7	1.328	10.38	-9.757	2.53	20.487	2.532	2.532	19.79
0.15	10.25530	79.06	1.398	7.238	-6.304	2.511	14.066	2.5153	2.5153	13.021
0.2	7.37910	75.43	1.497	5.763	-4.52	2.484	10.98	2.491	2.491	9.586
0.25	5.59181	71.8	1.629	4.955	-3.404	2.451	9.23	2.462	2.462	7.489
0.3	4.35482	68.17	1.794	4.482	-2.624	2.412	8.153	2.427	2.427	6.061
0.35	3.43813	64.55	1.999	4.203	-2.037	2.368	7.463	2.387	2.387	5.017
0.4	2.72737	60.93	2.249	4.047	-1.571	2.318	7.022	2.343	2.343	4.216
0.45	2.15945	57.31	2.552	3.976	-1.186	2.265	6.753	2.295	2.295	3.577
0.5	1.69679	53.68	2.923	3.976	-0.857	2.209	6.614	2.245	2.245	3.053
0.55	1.31570	50.02	3.379	4.03	-0.568	2.151	6.583	2.192	2.192	2.614
0.6	1.00048	46.32	3.951	4.137	-0.307	2.091	6.65	2.138	2.138	2.238
0.65	0.74299	42.55	4.685	4.301	-0.062	2.03	6.817	2.082	2.082	1.912
0.7	0.52743	38.7	5.659	4.534	0.173	1.969	7.098	2.026	2.026	1.624
0.75	0.35611	34.7	7.016	4.86	0.413	1.908	7.528	1.97	1.97	1.365
0.8	0.22215	30.5	9.042	5.326	0.673	1.847	8.176	1.915	1.915	1.128
0.85	0.12202	25.95	12.402	6.036	0.985	1.788	9.197	1.86	1.86	0.905
0.9	0.05304	20.82	19.096	7.263	1.421	1.729	10.998	1.805	1.805	0.686
0.95	0.01299	14.47	39.123	10.099	2.2668	1.672	15.213	1.752	1.752	0.4524

Tabla 16. Puerto de inyección Inferior, $(L/D) = 1/4$. $f_{prt} = 1$; $\beta = \pi/3$.

Excentricidad "e"	$\beta=\pi/3$									
	$f_{prt}=1$		k_{xx}	k_{xy}	k_{yx}	k_{yy}	C_{xx}	C_{xy}	C_{yx}	C_{yy}
	S	φ								
0.05	32.09230	85.9	1.2939	20.203	-19.866	2.5639	40.421	2.5317	2.8558	39.875
0.1	15.75750	82.18	1.3368	10.396	-9.7428	2.5571	20.59	2.5194	2.714	19.767
0.15	10.19240	78.44	1.4088	7.2572	-6.2861	2.5445	14.146	2.4998	2.6574	12.993
0.2	7.32478	74.68	1.5111	5.7869	-4.4965	2.5274	11.051	2.4732	2.6183	9.554
0.25	5.54166	70.88	1.6463	4.9862	-3.3736	2.5075	9.2984	2.4397	2.5839	7.449
0.3	4.30654	67.04	1.8176	4.5237	-2.5834	2.4873	8.2212	2.3997	2.5506	6.0116
0.35	3.39040	63.13	2.0299	4.259	-1.9817	2.4704	7.5346	2.3533	2.5175	4.9558
0.4	2.67942	59.11	2.2903	4.1244	-1.4949	2.4619	7.098	2.3008	2.4848	4.1376
0.45	2.11102	54.95	2.6085	4.0853	-1.0802	2.469	6.8358	2.2425	2.4531	3.4765
0.5	1.64821	50.61	2.9983	4.1244	-0.7099	2.5009	6.705	2.1786	2.4226	2.9233
0.55	1.26803	46.04	3.4786	4.2334	-0.3657	2.5672	6.6815	2.1103	2.3925	2.4466
0.6	0.95563	41.27	4.0768	4.4077	-0.037	2.6721	6.754	2.0393	2.3601	2.0268
0.65	0.70079	37	4.8478	4.6602	0.2953	2.8191	6.927	1.9632	2.3239	1.6496
0.7	0.49531	34.45	5.8291	4.9393	0.5779	2.9345	7.1993	1.9012	2.2667	1.3245
0.75	0.33264	26.69	7.1981	5.3092	0.8624	3.0206	7.6199	1.8387	2.1973	1.038
0.8	0.20698	22.14	9.2281	5.7946	1.1421	3.0278	8.2553	1.7818	2.1129	0.7922
0.85	0.11382	17.76	12.586	6.4954	1.444	2.9347	9.2605	1.7308	2.0172	0.5824
0.9	0.04974	13.37	19.268	7.6794	1.837	2.7309	11.043	1.6868	1.9149	0.40016
0.95	0.01231	8.47	39.269	10.428	2.5951	2.4097	15.238	1.653	1.8107	0.2281



Tabla 17. Puerto de inyección Inferior, $(L/D) = 1/4$, $f_{prt} = 5$; $\beta = \pi/3$.

Excentricidad "ε"	$\theta = \pi/3$									
	$f_{prt} = 5$		k_{xx}	k_{xy}	k_{yx}	k_{yy}	C_{xx}	C_{xy}	C_{yx}	C_{yy}
	S	φ								
0.05	31.53650	84.07	1.3182	20.25	-19.819	2.6557	41.096	2.4886	4.1663	39.791
0.1	15.44060	80	1.3659	10.454	-9.685	2.6717	20.977	2.4698	3.4824	19.669
0.15	9.95107	75.87	1.4441	7.3292	-6.2141	2.6909	14.445	2.442	3.266	12.876
0.2	7.11807	71.56	1.5542	5.878	-4.4054	2.7192	11.312	2.4053	3.1685	9.411
0.25	5.35340	67.03	1.6986	5.1029	-3.2569	2.7652	9.5415	2.3598	3.122	7.2721
0.3	4.12944	62.21	1.8801	4.6737	-2.4334	2.8414	8.4555	2.3059	3.1052	5.7896
0.35	3.22198	57.02	2.1015	4.4498	-1.7908	2.9645	7.7621	2.2451	3.1093	4.6742
0.4	2.52106	51.4	2.3653	4.3587	-1.2605	3.1523	7.3144	2.1806	3.1264	3.7811
0.45	1.96737	45.4	2.6749	4.3527	-0.8127	3.4104	7.03	2.1179	3.1429	3.034
0.5	1.52540	39.24	3.0399	4.3957	-0.43863	3.7149	6.8636	2.062	3.1386	2.397
0.55	1.17048	33.24	3.4823	4.4677	-0.1314	4.0129	6.796	2.0143	3.096	1.8568
0.6	0.88374	27.67	4.0382	4.571	0.12621	4.2504	6.8257	1.9708	3.0102	1.4059
0.65	0.65118	22.64	4.7597	4.7225	0.35765	4.3968	6.9606	1.9266	2.8884	1.0348
0.7	0.46027	18.13	5.728	4.9478	0.58644	4.4575	7.218	1.8778	2.7458	0.7266
0.75	0.31261	14.07	7.0843	5.2695	0.8227	4.391	7.6289	1.8258	2.5799	0.4855
0.8	0.19528	10.37	9.115	5.7441	1.0916	4.2486	8.2632	1.7684	2.4117	1.2849
0.85	0.10762	6.89	12.485	6.4668	1.4153	4.0141	9.2712	1.7087	2.2412	0.1222
0.9	0.04707	3.46	19.194	7.7012	1.8588	3.6814	11.057	1.6495	2.0713	-0.0107
0.95	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-

Tabla 18. Puerto de inyección Inferior, $(L/D) = 1/4$, $f_{prt} = 10$; $\beta = \pi/3$.

Excentricidad "ε"	$\theta = \pi/3$									
	$f_{prt} = 10$		k_{xx}	k_{xy}	k_{yx}	k_{yy}	C_{xx}	C_{xy}	C_{yx}	C_{yy}
	S	φ								
0.05	30.88610	81.68	1.3411	20.305	-19.764	2.7843	41.849	2.4406	5.9364	39.679
0.1	15.07320	77.18	1.3916	10.52	-9.6189	2.8357	21.399	2.4158	4.536	19.534
0.15	9.67560	72.43	1.4719	7.409	-6.1344	2.9059	14.757	2.3817	4.1158	12.712
0.2	6.88810	67.33	1.5824	5.9735	-4.3099	3.0084	11.566	2.3392	3.9506	9.2078
0.25	5.15281	61.78	1.7228	5.2132	-3.1466	3.1613	9.7522	2.2906	3.8967	7.0174
0.3	3.95442	55.67	1.8915	4.7892	-2.3179	3.3857	8.6179	2.2408	3.9022	5.4705
0.35	3.07530	49.03	2.0877	4.5448	-1.6959	3.6914	7.8618	2.1976	3.9302	4.2837
0.4	2.40764	42.11	2.317	4.3907	-1.2285	4.0556	7.3375	2.1677	3.9403	3.3288
0.45	1.88852	35.31	2.5953	4.2813	-0.8842	4.4182	6.9782	2.1511	3.8974	2.5499
0.5	1.47589	29.02	2.9452	4.211	-0.6233	4.717	6.7592	2.1388	3.7905	1.9178
0.55	1.14143	23.46	3.3896	4.1973	-0.4018	4.9261	6.6703	2.1197	3.6331	1.4064
0.6	0.86705	18.46	3.9553	4.2472	-0.1975	5.0237	6.6992	2.0916	3.4369	0.9985
0.65	0.64137	14.12	4.6872	4.3839	0.019	5.0395	6.8485	2.0487	3.2257	0.6674
0.7	0.45694	10.27	5.6617	4.617	0.2556	4.9775	7.1255	1.9933	3.0079	0.3994
0.75	0.30865	6.81	7.0208	4.9681	0.5213	4.8465	7.5585	1.9274	2.7902	0.182
0.8	0.19268	3.63	9.0507	5.4795	0.827	4.648	8.213	1.8537	2.5757	0.0065
0.85	0.10603	0.63	12.419	6.2488	1.1973	4.3815	9.239	1.7749	2.3664	-0.135
0.9	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
0.95	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-



Tabla 19. Puerto de inyección Inferior, $(L/D) = 1/4$. $f_{prt} = 20$; $\beta = \pi/3$.

Excentricidad "ε"	$\beta = \pi/3$									
	$f_{prt} = 20$		k_{xx}	k_{xy}	k_{yx}	k_{yy}	C_{xx}	C_{xy}	C_{yx}	C_{yy}
	S	φ								
0.05	29.75020	76.57	1.3608	20.391	-19.678	3.0869	42.95	2.3705	9.8918	39.426
0.1	14.45110	71.04	1.4053	10.613	-9.5258	3.2306	21.944	2.3461	6.9294	19.228
0.15	9.23291	64.92	1.4725	7.5	-6.0433	3.432	15.074	2.3204	6.0672	12.335
0.2	6.55040	58.11	1.5599	6.039	-4.2444	3.7113	11.71	2.3019	5.7365	8.7436
0.25	4.90074	50.62	1.6681	5.2068	-3.153	4.0733	9.7164	2.3023	5.5937	6.4595
0.3	3.78359	42.77	1.8082	4.6487	-2.4584	4.4814	8.3984	2.3287	5.4818	4.8379
0.35	2.97765	35.11	1.9998	4.2272	-2.0134	4.8622	7.4917	2.3737	5.3152	3.6248
0.4	2.36485	28.11	2.2562	3.9076	-1.7116	5.1546	6.8871	2.418	5.0745	2.6986
0.45	1.87830	21.97	2.5798	3.6911	-1.4744	5.3423	6.5205	2.4447	4.7825	1.982
0.5	1.48055	16.66	2.9722	3.5792	-1.2551	5.4371	6.341	2.4462	4.4678	1.4199
0.55	1.15046	12.08	3.4439	3.5691	-1.0301	5.46	6.3105	2.4214	4.1513	0.9718
0.6	0.87546	8.08	4.0211	3.6551	-0.7896	5.4236	6.4038	2.3737	3.8422	0.6114
0.65	0.64739	4.57	4.7502	3.8371	-0.5278	5.3429	6.6119	2.3065	3.547	0.3175
0.7	0.46047	1.43	5.7124	4.1199	-0.2413	5.2192	6.9406	2.2241	3.2656	0.0778
0.75	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
0.8	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
0.85	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
0.9	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
0.95	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-

Tabla 20. Puerto de inyección Inferior, $(L/D) = 1/4$. $f_{prt} = 50$; $\beta = \pi/3$.

Excentricidad "ε"	$\beta = \pi/3$									
	$f_{prt} = 50$		k_{xx}	k_{xy}	k_{yx}	k_{yy}	C_{xx}	C_{xy}	C_{yx}	C_{yy}
	S	φ								
0.05	27.95370	59.28	1.2913	20.275	-19.794	4.1973	41.794	2.4747	23.489	38.56
0.1	13.72780	50.49	1.3315	10.302	-9.8369	4.5761	20.015	2.593	14.733	18.229
0.15	8.96421	41.27	1.4438	6.906	-6.6374	4.9404	12.809	2.758	11.694	11.248
0.2	6.56064	32.34	1.6524	5.0984	-5.185	5.3432	9.1682	2.9625	10.282	7.5623
0.25	5.07604	24.35	1.917	4.0392	-4.3206	5.3656	7.2922	3.0993	8.6279	5.462
0.3	4.03110	17.49	2.2242	3.3455	-3.7616	5.4236	6.2002	3.2089	7.5984	3.9904
0.35	3.23134	11.69	2.5431	2.9146	-3.3261	5.4233	5.6179	3.2651	6.763	2.9361
0.4	2.58850	6.78	2.8676	2.6694	-2.9499	5.3918	5.3483	3.2731	6.0745	2.1429
0.45	2.05869	2.6	3.2054	2.5614	-2.6041	5.3458	5.2791	3.2412	5.498	1.523
0.5	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
0.55	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
0.6	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
0.65	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
0.7	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
0.75	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
0.8	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
0.85	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
0.9	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
0.95	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-



Tabla 21. Puerto de inyección Inferior, $(L/D) = 1/4$. $f_{prt} = 100$; $\beta = \pi/3$.

Excentricidad "e"	$\beta = \pi/3$									
	$f_{prt} = 100$		k_{xx}	k_{xy}	k_{yx}	k_{yy}	C_{xx}	C_{xy}	C_{yx}	C_{yy}
	S	φ								
0.05	30.67630	31.86	1.794	19.078	-20.991	4.9853	24.689	3.5344	36.686	37.719
0.1	15.85230	22.62	2.1237	9.3202	-10.819	3.9461	12.348	3.574	13.39	18.401
0.15	10.75671	14.72	2.5095	5.6124	-7.931	4.8912	6.3779	4.0003	13.765	10.848
0.2	8.03490	8.11	2.838	4.0053	-6.2781	4.7906	4.7289	4.1162	10.691	7.456
0.25	6.24799	2.61	3.1234	3.1225	-5.2373	4.6996	4.0472	4.1661	8.8194	5.3991
0.3	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
0.35	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
0.4	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
0.45	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
0.5	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
0.55	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
0.6	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
0.65	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
0.7	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
0.75	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
0.8	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
0.85	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
0.9	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
0.95	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-

En las siguientes figuras 33-38 se aprecia el comportamiento de los coeficientes rotodinámicos para diversos valores de fuerza de presurización, Estas figuras son obtenidas a partir de las fórmulas de las tablas 6 y 7.



Caso 2. $\beta = \pi/3$ inyección inferior, ver figura 20.

$$f_{prt} = 5$$

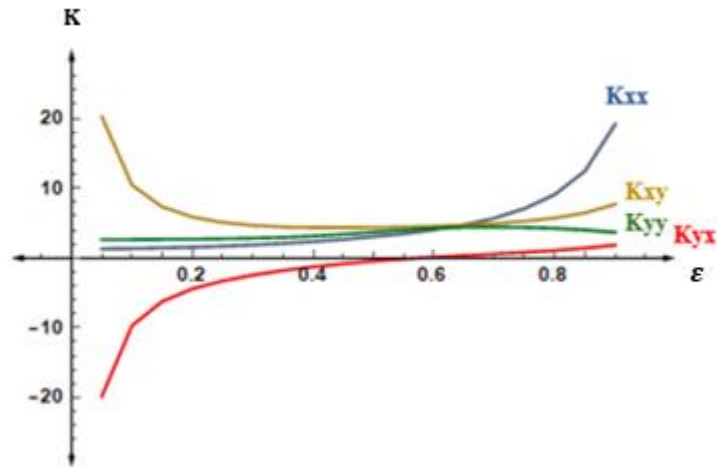


Figura 33. Coeficientes rotodinámicos de **rigidez** para una chumacera corta presurizada. Inyección inferior (inyección a 60°); $L/D=1/4$, $f_{prt} = 5$.

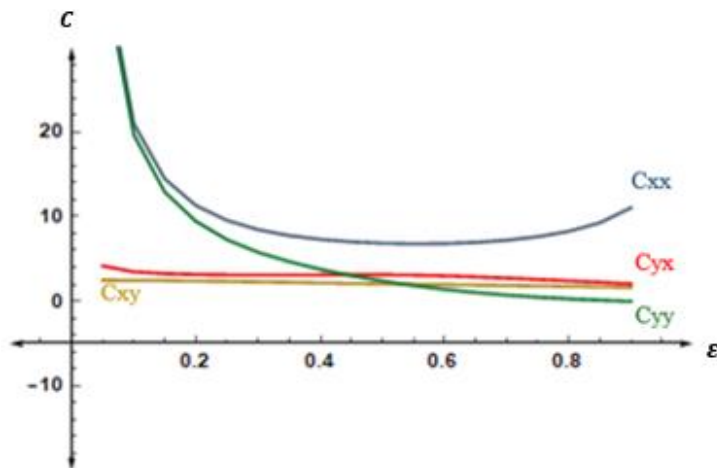


Figura 34. Coeficientes rotodinámicos de **amortiguamiento** para una chumacera corta presurizada. Inyección inferior (inyección a 60°); $L/D=1/4$, $f_{prt} = 5$.



$$f_{prt} = 20$$

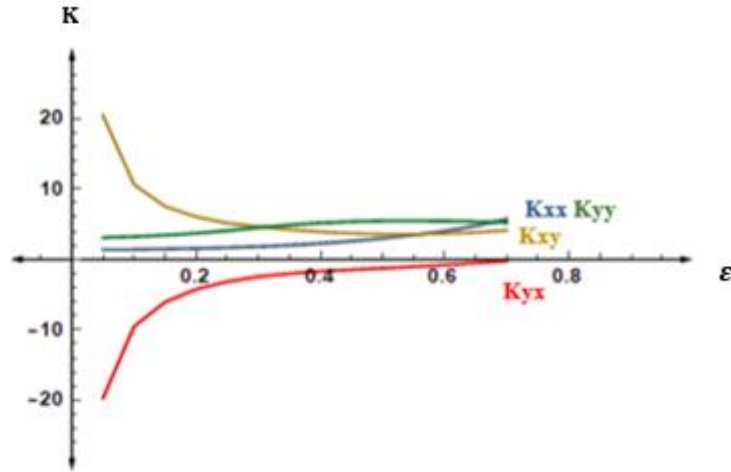


Figura 35. Coeficientes rotodinámicos de **rigidez** para una chumacera corta presurizada. Inyección inferior (inyección a 60°); $L/D=1/4$, $f_{prt} = 20$.

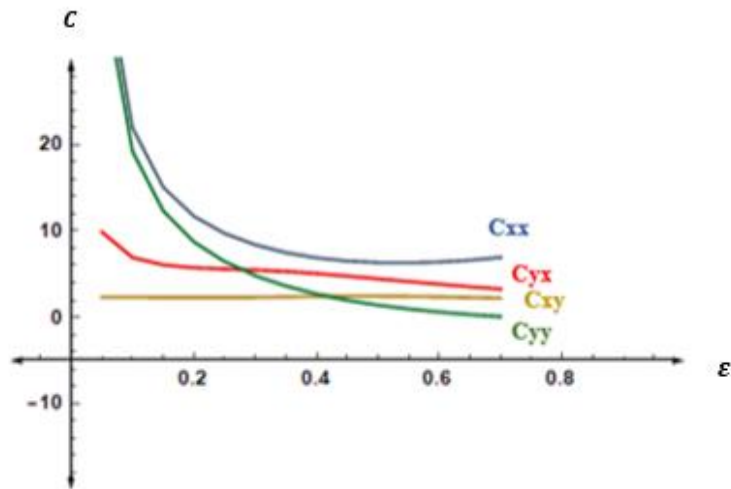


Figura 36. Coeficientes rotodinámicos de **amortiguamiento** para una chumacera corta presurizada. Inyección inferior (inyección a 60°); $L/D=1/4$, $f_{prt} = 20$.



$$f_{prt} = 50$$

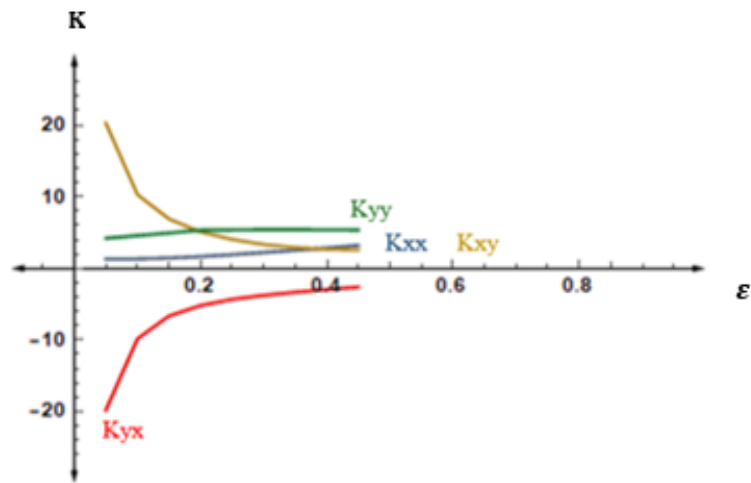


Figura 37. Coeficientes rotodinámicos de **rigidez** para una chumacera corta presurizada. Inyección inferior (inyección a 60°); $L/D=1/4$, $f_{prt} = 50$.

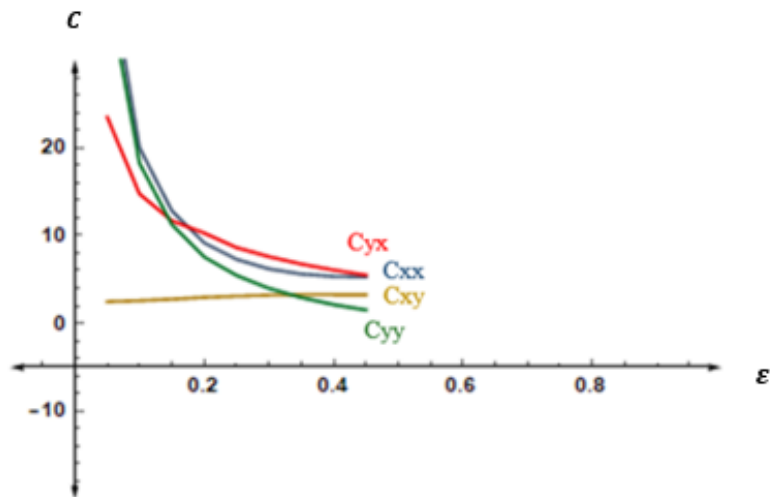


Figura 38. Coeficientes rotodinámicos de **amortiguamiento** para una chumacera corta presurizada. Inyección inferior (inyección a 60°); $L/D=1/4$, $f_{prt} = 50$.



Al comparar las gráficas de rigidez y amortiguamiento, se puede apreciar una variación en los coeficientes rotodinámicos, la cual es influenciada en el cambio de ubicación del puerto de inyección de aceite lubricante. Notar que en la inyección superior ($\beta = 2\pi/3$) la rigidez aumenta significativamente al incrementar la fuerza de presurización, de igual manera el muñón hace un mayor desplazamiento a comparación que cuando se inyecta aceite lubricante en la parte inferior de la chumacera ($\beta = \pi/3$), donde en esta ubicación tanto como la rigidez y amortiguamiento disminuyen al incrementar la fuerza de presurización.



Capítulo 6. Velocidad umbral de estabilidad

La inestabilidad dinámica en los sistemas rotatorios se caracteriza por vibración de alta amplitud del sistema rotor-chumacera. En rotodinámica, se puede asociar con la variación de presión de algún fluido en las chumaceras. La inestabilidad implica que el movimiento tienda a incrementarse sin límite y en ocasiones puede llegar a ocurrir consecuencias destructivas para la maquinaria. Al presurizar externamente a una chumacera, los coeficientes de rigidez y amortiguamiento se verán modificados afectando o no, la estabilidad dinámica. Es importante recalcar que la inestabilidad rotodinámica es diferente a la velocidad crítica, ya que ésta: se define como la velocidad a la cual la respuesta síncrona al desbalance alcanza su máxima amplitud cuando la velocidad de rotación o sus múltiplos coinciden con una frecuencia fundamental característica del sistema [1].

6.1 Modelo matemático para determinar la velocidad umbral de estabilidad (criterio de Lienard-Chipard)

El criterio de Lienard-Chipard [42], establece que para un polinomio $P_n(\lambda)$ con coeficientes positivos sea estable, es necesario y suficiente que una de las dos condiciones siguientes sea cumplida:

1. $\Delta_1 > 0, \Delta_3 > 0, \Delta_5 > 0, \dots$,
2. $\Delta_2 > 0, \Delta_4 > 0, \Delta_6 > 0, \dots$,

Donde $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \dots$, son determinantes formados por los coeficientes del polinomio de Hurwitz. El análisis se simplifica de manera considerable al aplicar el criterio de Lienard-Chipard, pues el número de determinantes se reduce a la mitad si se considera los determinantes impares, el Δ_1 se reduce al análisis de signo.

Donde $\Delta_1 \dots \Delta_n$ contiene los mínimos de la matriz de Hurwitz [1].

$$P_4(\lambda) = \lambda^4 + b_3\lambda^3 + b_2\lambda^2 + b_1\lambda + b_0, \quad (b_i > 0) \quad (6.1)$$



Aplicando el criterio de estabilidad de Lienard-Chipard al polinomio, (6.1) se obtiene que para que el sistema sea estable es necesario y suficiente que se cumplan las siguientes condiciones[1], [18], [42]:

$$\Delta_1 = [b_1] > 0, \quad \Delta_2 = \begin{bmatrix} b_1 & b_0 & 0 \\ b_3 & b_2 & b_1 \\ 0 & b_4 & b_3 \end{bmatrix} > 0 \quad (6.2)$$

De la ecuación (6.2) se nota que $\Delta_1 > 0$, entonces desarrollando Δ_2 se obtiene la condición de estabilidad dada por:

$$b_1 b_2 b_3 > b_0 b_3^2 + b_1^2 b_4 \quad (6.3)$$

Es de importancia mencionar que la aplicación del criterio de Routh-Hurwitz de la forma $\Delta_1 > 0, \Delta_2 > 0, \Delta_3 > 0$ no conduce a una sola condición de estabilidad del tipo (6.3), pero de estas tres condiciones, dos no son necesarias.

La velocidad umbral de estabilidad se define como la máxima velocidad de operación que puede alcanzar el rotor antes de que ocurran amplitudes de vibración insostenibles, por lo que un sistema lineal es estable cuando la parte real de los valores propios de los coeficientes de su matriz característica son negativos. Si la parte real de alguno de los valores propios se vuelve positiva, entonces el sistema tiende a la inestabilidad. En el cambio de negativo a positivo la parte real del valor propio pasa por cero, cuando esto ocurre se obtiene la velocidad umbral de estabilidad [1], dicha velocidad puede obtenerse de la ecuación (6.3).

$$b_1 b_2 b_3 = b_0 b_3^2 + b_1^2 b_4 \quad (6.4)$$

Los coeficientes del polinomio (6.1) son:

$$b_0 = \frac{\Delta(k)}{p^4}, \quad b_1 = \frac{\Delta(c,k)}{p^4}, \quad b_2 = \frac{p^2 \Sigma(k) + \Delta(c)}{p^4}, \quad b_3 = \frac{\Sigma(c)}{p^2}, \quad (6.5)$$

Sustituyendo la ecuación (6.5) en la ecuación (6.4) y resolviendo para p^2 se obtiene la velocidad umbral de estabilidad para un sistema rotor-chumacera que considera a un rotor de eje rígido [1], [3], [43], obteniendo:



$$P_{umbral}^2 = \frac{\Sigma(c)\Delta(c)\Delta(c,k)}{\Delta(k)\Sigma^2(c) + \Delta^2(c,k) - \Sigma(c)\Sigma(k)\Delta(c,k)} \quad (6.6)$$

Donde:

$$\Sigma(c) = C_{XX} + C_{YY}$$

$$\Sigma(k) = K_{XX} + K_{YY}$$

$$\Delta(c) = C_{XX}C_{YY} - C_{YX}C_{XY}$$

$$\Delta(k) = K_{XX}K_{YY} - K_{YX}K_{XY}$$

$$\Delta(c,k) = C_{XX}K_{YY} + C_{YY}K_{XX} - C_{XY}K_{YX} - C_{YX}K_{XY}$$

La ecuación (6.6) calcula en forma directa la velocidad umbral de estabilidad para una configuración de eje rígido del modelo de jeffcott, el cual está soportado por chumaceras hidrodinámicas flexibles [1].

6.2 Velocidad umbral de estabilidad de una chumacera hidrodinámica presurizada para $(\beta = 2\pi/3$ y $\pi/3)$

✓ **Caso 1.** $a = 0$ y $\beta = 2\pi/3$

Considere el caso en donde se inyecta aceite lubricante en la parte superior de la chumacera, en donde $a = 0$ y $\beta = 2\pi/3$ (ver figura 20, capítulo 4), solo basta calcular los coeficientes rotodinámicos totales (los cuales ya están determinados por las tablas 6 y 7, capítulo 5) que al sustituirlos en ecuación (6.6) se obtiene la velocidad umbral de estabilidad.

En la tabla siguiente se muestra los valores de P_{umbral}^2 para diversos valores de fuerza de presurización, se colocan ya los nuevos cambios de excentricidad y ángulos de actitud correspondientes.



Tabla 22. Valores de excentricidad de equilibrio (ϵ) y velocidad umbral de estabilidad (P_{umb}^2) para diferentes fuerzas de presurización (f_{prt}), dado un número de Sommerfeld. Inyección Superior (L/D) = $\frac{1}{4}$.

f_{prt}	$S=0.5$		$S=0.8$		$S=1$		$S=1.5$		$S=2$		$S=3$		$S=5$	
	ϵ	P_{umb}^2	ϵ	P_{umb}^2	ϵ	P_{umb}^2	ϵ	P_{umb}^2	ϵ	P_{umb}^2	ϵ	P_{umb}^2	ϵ	P_{umb}^2
0	0.7072	14.588	0.6375	8.23	0.6000	7.295	0.5245	6.547	0.4660	6.411	0.3793	6.524	0.2720	6.9
1	0.7079	12.261	0.6386	7.597	0.6012	6.854	0.5260	6.285	0.4677	6.221	0.3810	6.397	0.2735	6.808
5	0.7105	7.51	0.6423	5.834	0.6055	5.547	0.5314	5.429	0.4737	5.558	0.3874	5.922	0.2790	6.458
10	0.7133	5.038	0.6463	4.525	0.6101	4.482	0.5372	4.635	0.4804	4.891	0.3948	5.394	0.2858	6.054
20	0.7182	2.906	0.6530	3.054	0.6178	3.185	0.5472	3.542	0.4918	3.896	0.4080	4.519	0.2989	5.337
50	0.7291	0.9024	0.6677	1.222	0.6348	1.407	0.5687	1.812	0.5170	2.171	0.4381	2.794	0.3323	3.714
100	0.7423	-	0.6845	0.146	0.6539	0.258	0.5927	0.538	0.5450	0.803	0.4721	1.286	0.3730	2.076

Notar que en la tabla 22 los valores de excentricidad van aumentando conforme se incrementa la fuerza de presurización, a cada valor de excentricidad le corresponde un conjunto de coeficientes rotodinámicos con su velocidad umbral de estabilidad.

En la figura 39 se muestra la velocidad umbral de estabilidad como función del número de Sommerfeld para determinados valores de fuerza de presurización (f_{prt}), la gráfica se obtuvo utilizando los valores de la tabla 22. Se puede observar que cuando se incrementa la fuerza de presurización externa la velocidad umbral decrece, lo que significa que en esta ubicación de inyección de lubricante puede existir ligera inestabilidad en el sistema rotatorio.



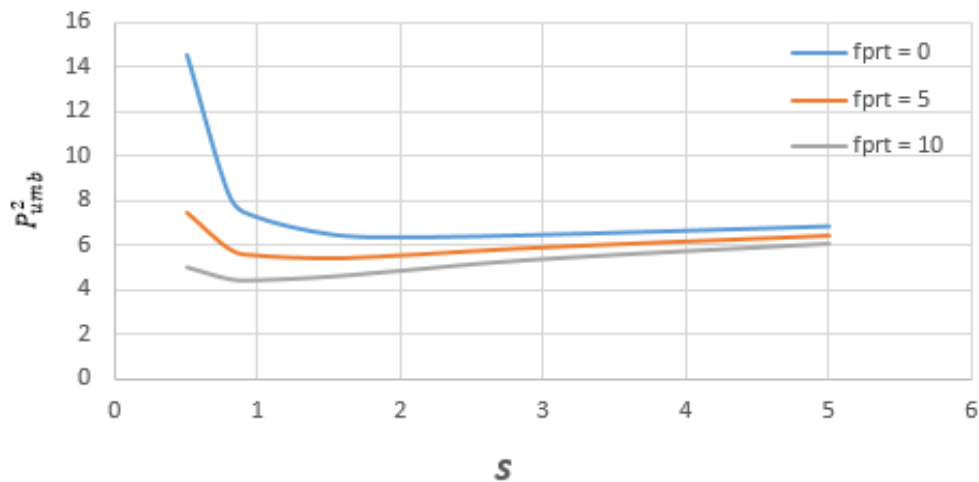


Figura 39. Velocidad umbral de estabilidad contra el número de Sommerfeld para un rotor rígido soportado por chumaceras cortas con presurización externa de lubricante, para diversos valores de fuerza de presurización. $L/D = 1/4$.

✓ **Caso 2: $a = 0$ y $\beta = \pi/3$**

Ahora considere el caso en donde se inyecta aceite lubricante en la parte inferior de la chumacera, en donde $a = 0$ y $\beta = \pi/3$ (ver figura 20, capítulo 4), de igual manera como en el caso 1, solo basta calcular los coeficientes rotodinámicos totales (los cuales ya están determinados por las tablas 6 y 7, capítulo 5) que al sustituirlos en ecuación (6.6) se obtiene la velocidad umbral de estabilidad.

En la tabla 23 los valores de P_{umbral}^2 para diversos valores de fuerza de presurización, acompañado de los nuevos cambios de excentricidad. Se nota que los valores de excentricidad van disminuyendo conforme se incrementa la fuerza de presurización.



Tabla 23. Valores de excentricidad de equilibrio (ϵ) y velocidad umbral de estabilidad (P_{umb}^2) para diferentes fuerzas de presurización (f_{prt}), dado un número de Sommerfeld. Inyección Inferior (L/D) = $1/4$.

f_{prt}	$S=0.5$		$S=1$		$S=2$		$S=3$		$S=5$	
	ϵ	P_{umb}^2	ϵ	P_{umb}^2	ϵ	P_{umb}^2	ϵ	P_{umb}^2	ϵ	P_{umb}^2
0	0.7072	14.588	0.6000	7.295	0.4660	6.411	0.3793	6.5240	0.2720	6.9
1	0.6987	10.095	0.5922	7.604	0.4611	6.534	0.3759	6.564	0.2701	6.89
5	0.6884	0.499	0.5784	5.193	0.4467	6.538	0.3645	6.556	0.2630	6.775
10	0.6873	-	0.5745	0.572	0.4382	5.497	0.3550	6.18	0.2557	6.466
20	0.6886	-	0.5762	-	0.4364	1.517	0.3484	4.468	0.2464	5.434
50	0.6593	-	0.5805	-	0.4561	-	0.3668	-	0.2532	1.674
100	0.5511	-	0.5144	-	0.4478	-	0.3894	-	0.2953	-

En la figura 40 se muestra las curvas de la velocidad umbral de estabilidad como función del número de Sommerferld, para determinados valores de fuerza de presurización (f_{prt}), se observa que cuando se incrementa la fuerza de presurización externa la velocidad umbral decrece, en este caso la disminución de la velocidad umbral de estabilidad es mucho mayor, lo cual significa que en esta ubicación de inyección inferior de lubricante el sistema rotatorio es inestable.



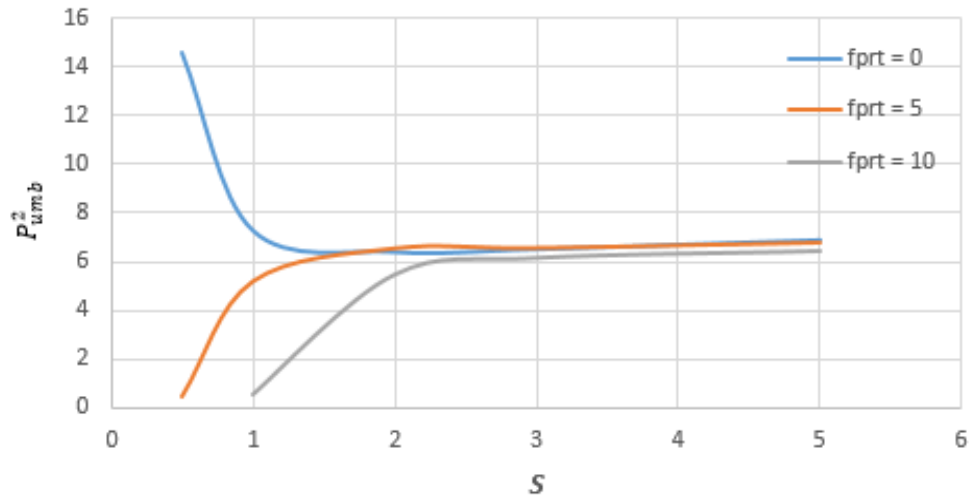


Figura 40. Velocidad umbral de estabilidad contra el número de Sommerferld para un rotor rígido soportado por chumaceras cortas con presurización externa de lubricante, para diversos valores de fuerza de presurización. $L/D = 1/4$.



Capítulo 7. Conclusiones

El uso de la función Delta de Dirac en rotodinámica permite modelar en forma simplificada la presurización externa aplicado a la solución de la ecuación de Reynolds, el modelo permite determinar las características rotodinámicas de una chumacera hidrodinámica presurizada pues a diferencia de las aplicaciones clásicas en donde la Delta de Dirac se activa en valores temporales, en este caso se logró adaptar a impulsos espaciales.

Para el cálculo de la posición de equilibrio, tanto la dependencia entre la excentricidad y el ángulo de actitud en una chumacera presurizada en la parte superior ($\beta = 2\pi/3$) como en la parte inferior ($\beta = \pi/3$), la expresión matemática es la misma, sin embargo la excentricidad y ángulo de actitud tendrán valores diferentes debido al cambio de ubicación del puerto de inyección. Las posiciones de equilibrio son de gran importancia, pues nos permitirá predecir con exactitud la ubicación del muñón respecto al centro geométrico de la chumacera cuando se presuriza en la parte superior o en la parte inferior “ $\beta = 2\pi/3$ y $\beta = \pi/3$ ” respectivamente. Los resultados son necesarios para encontrar los coeficientes rotodinámicos (rigidez y amortiguamiento) en las posiciones angulares determinadas. La ventaja más importante es que las nuevas posiciones de equilibrio se presentan en forma de tablas, ya que permiten verificar la posición del muñón cuando existe presurización de lubricante.

La presurización externa hace que los coeficientes rotodinámicos de la película de lubricante se vean modificados, al presurizar en la parte superior los coeficientes de rigidez en la dirección (K_{xx}) aumenten, caso contrario a los coeficientes de amortiguamiento (C_{xx}), esto es a medida que se presuriza la chumacera. Así mismo cuando se presuriza en la parte inferior la rigidez y amortiguamiento disminuyen al incrementar la fuerza de presurización, a tal grado que aparecen porciones de excentricidad en las cuales los coeficientes cambian de signo, haciendo que esto se pueda convertir en una autoexcitación del sistema. Ver figs. 27-38.



Finalmente se determina en forma analítica, la velocidad umbral de estabilidad, haciendo uso del criterio de Lienard-Chipard. Para rotores rígidos se encuentra que cuando se incrementa la fuerza de presurización en la parte superior ($\beta = 2\pi/3$) la velocidad de estabilidad decrece, lo que significa que en esta ubicación de inyección de lubricante puede existir ligera inestabilidad en el sistema rotatorio. Sin embargo cuando se presuriza en la parte inferior ($\beta = \pi/3$) la velocidad umbral de estabilidad decrece aún más, haciendo que la inyección de lubricante en la parte inferior anticipe la inestabilidad del sistema, por lo que en ésta posición no es aconsejable la presurización de lubricante. Caso contrario cuando se inyecta lubricante en la parte superior. Por lo tanto si se desea atenuar las vibraciones es en la parte superior donde se debe inyectar lubricante.

Es importante mencionar que se realizaron publicaciones en dos congresos científicos, uno de ellos fue en el XXV Congreso Internacional Anual de la SOMIM realizado en Mazatlán Sinaloa, México 2019. Donde se publicó el artículo que lleva por nombre: “Caracterización dinámica de un soporte con multirecesos. Análisis de estabilidad”. La segunda publicación fue en el congreso CONAMTEC realizado en la ciudad de Pachuca Hidalgo, México 2018. El artículo publicado es: “Nuevo modelo de inyección multipuerto en una chumacera corta. Campos de Presión”. Las publicaciones de ambos artículos fueron de gran ayuda para el desarrollo del presente trabajo.



Referencias

- [1] I. Ramírez Vargas “Teoría de chumaceras presurizadas con puertos puntuales” Tesis Doctoral, Instituto Politécnico Nacional, SEPI-ESIME-ZAC, D.F. (2007).
- [2] V. Nossov, J.C. Gómez-Mancilla, I. Ramírez Vargas. “Modelación analítica de una chumacera corta presurizada con puerto puntuales de inyección” (2007).
- [3] D. Childs, “Turbomachinery rotordynamics: phenomena, modeling and analysis”. John Wiley and Sons (1993).
- [4] D.E. Rivera-Arreola, V. Nossov. “Análisis de una chumacera corta híbrida con puertas de inyección ubicadas en un plano simétrico”. XII Congreso Nacional de Ingeniería Electromecánica y de Sistemas (CNIES), (2010).
- [5] V. Nossov, J.C. Gómez-Mancilla, A. Rivera and I. Ramírez Vargas. “Horizontal location of injection ports oil in short hybrid journal bearing”. XI Congreso nacional de ingeniería electromecánica y de sistemas (CNIES), (2009).
- [6] W. Rankine. “Centrifugal whirling of shaft”, The Engineer, p. Apr. 9. (1869).
- [7] A. Foppl. “Das problem der laval'shen turbinewelle”. Civilingenieur, pp. 332-342. (1895).
- [8] Durkeley-Reynolds. “On the whirling and vibration of shafts”. Philos, Trans. Serr A. Pp. 279-359. (1883).
- [9] DeLaval. “Das Problem del DeLaval Shen Turbinewelle”. Civilingenieur, 61:333-342. (1895).
- [10] H. Jeffcott. “The lateral vibration of loaded shaft in the neighborhood of a wirling speedthe effect of want of balance”. Phil. Mag., Vol. 37 no. 6, pp. 304-314. (1919).
- [11] D. Bently. www.bpb.com. [Online], [Cited: febrero 28, 2011.], (1999).
- [12] B.L. Newkirk. Shaft whipping, General Electric Rev, 27(3):169-178. (1924).



- [13] A.T. Kimball. Internal friction theory of whirling, *General Electric Rev*, 27(4): 244.254. (1924).
- [14] A. Stodala. “Dampf and gas Turbinen”. Verlag von Julius Springer. *Journal of Applied Mechanics*, No 15, pp. 269-275. (1924).
- [15] P. Green. “Gyroscopic effects of the critical speeds of flexible rotors”. *Journal of Applied Mechanics*, No 15, pp. 269-275. (1948).
- [16] V. Nossov, I. Ramírez Vargas, J.C. Gómez-Mancilla. “Modelos Matemáticos de Presurización de Lubricante en sistemas Rotatorios usando la función de Dirac”. III Congreso Internacional de Ingeniería Física. UAM Azcapotzalco. México D.F. (2004).
- [17] G.A. Antonio. “Investigación analítica y numérica de las propiedades dinámicas de chumaceras hidrodinámicas con y sin desalineamiento”, Tesis Doctoral, IPN, SEPI-ESIME-ZAC., México, D.F. (2006).
- [18] V. Nossov, I. Ramírez Vargas, D. Rivera, y J.C. Gómez-Mancilla. “Velocidad de estabilidad de un cojinete presurizado con inyección lateral de lubricante” XVIII Congreso Internacional de la SOMIN, Salamanca Gto. Pp. 1189-1197(2012).
- [19] I. Ramírez Vargas, L.M. Palacios, y H. Corro. “Respuesta vibratoria de un rotor apoyado en chumaceras hidrodinámicas cortas” XIX Congreso Internacional de la SOMIN, Pachuca Hgo. Pp 1088-1094 (2013).
- [20] I. Ramírez Vargas, A. García, y C. De La Rosa. “Caracterización dinámica de chumaceras hidrodinámicas mediante perturbaciones” XIX Congreso Internacional de la SOMIN, Pachuca Hgo. Pp 1015-1021 (2013).
- [21] D. Bently, and A. Petchenev. “Dynamic stiffness and the advantage of externally pressurized fluid-film bearing. *Orbit*”. Pp. 18-24. (2000).
- [22] R. Surovec, J. Bocko, J. Sarlosi. “Modelo de análisis de vibración del rotor lateral”. *Revista Americana de Ingeniería Mecánica* 2, No. 7. 282-285. (2014).
- [23] T. William. “Teoría de vibraciones con aplicación” 2da edición (1996).



- [24] A. Jonh, and Sons “Introduction to Tribology” Pp. 1-3.
- [25] Szeri. “Fluid Film Lubrication. Theory and Design” Cambridge University Press, (1998).
- [26] B. Tower. "Primer informe de experimentos de fricción" Proc. Inst. Mech Engrs. Pp 632-659 y pp 29-35. (1884).
- [27] B. Tower. "Segundo informe de experimentos de fricción". Proc. Inst. Mech Engrs. Pp 58-70. (1885).
- [28] V. Nossov, J.C. Gómez-Mancilla, y J.A. Meda-Campaña. “Ocurrence of hydrodynamic cavitations”, (2011).
- [29] O. Reynolds. “Sobre la teoría de la lubricación y su aplicación a los experimentos de Mr. Beauchap Tower`s, que incluye una determinación experimental de la viscosidad del aceite de oliva” Phil, Trans. Roy. Soc. London Vol. 177, Part I. Pp. 157-234. (1886).
- [30] D.E. Rivera-Arreola. “Investigación del comportamiento de la chumacera corta con puertos de presurización puntual” Tesis Doctoral, Instituto Politécnico Nacional, SEPI-ESIME-ZAC, D.F. (2015).
- [31] M.M. Khonsari, E.R. Booser. “Applied Tribology: Bearing Desing and Lubrication,” John Wiley & Sons, (2001).
- [32] F. Ocvirk. “Short Bearing Approximation for Full Journal Bearing”, (1952).
- [33] G.B. Dubois, and F. Ocvirk. “Analitical Derivation and Experimental evaluation of Short Bearing approximation for full Journal Bearing”, (1953).
- [34] B. Hamrock. “Fundamentos de la lubricación de película fluida”, Mc Graw-Hill. (2004).
- [35] V. Nossov, I. Ramírez Vargas, y J.C. Gómez-Mancilla. “Uso de funciones generalizadas espaciales en modelos rotodinámicos presurizados” México: s.n., 1er Congreso Internacional de Matemáticas Aplicadas (2005).
- [36] L. Schwartz. “Théorie des Distributions”. Hermann., Cie, editeurs (1950).



- [37] I. Ramírez Vargas, V. Nossov y J.C. Gómez-Mancilla. “Posición de equilibrio, coeficientes dinámicos y estabilidad en soportes cortos presurizados”. XV congreso internacional anual de la SOMIN. Pp. 401-411. (2009).
- [38] V. Nossov, A. Rivera y C.J. Meda. “Estabilidad de una chumacera corta híbrida con los puertos ubicados horizontalmente”. XIII Congreso y exposición Latinoamericana de Turbomaquinaria, Querétaro, Qro. (2012).
- [39] A. Rivera. “Teoría de chumaceras híbridas con puertos horizontales de presurización puntual”. Tesis de Maestría, Instituto Politécnico Nacional, SEPI-ESIME-ZAC, D.F. (2009).
- [40] J.C. Gómez-Mancilla. “Steam whirl instability in rotating shafts”. Dissertation Doctoral, Washington University (1993).
- [41] A. García, J.C. Gómez-Mancilla. “Identification of rotordynamics parameters for Jeffcott rotor-bearing model”. The 9th of international Symposium on transport Phenomena and dynamics of rotating Machinery Honolulu, Hawii, February. Pp. 10-14. (2002).
- [42] B. Demidovich. “Lecture on the Mathematical Theory of Stability”, Nauka Moscow (1967).
- [43] I. Ramírez Vargas, V. Nossov y J.C. Gómez-Mancilla. “Cálculo de la velocidad umbral de estabilidad, utilizando chumaceras cortas con puertos puntuales de presión”. IV Congreso internacional de ingeniería electromecánica y de sistemas IPN (2005).

