



TECNOLÓGICO NACIONAL DE MÉXICO

Instituto Tecnológico de Pachuca

INSTITUTO TECNOLÓGICO DE PACHUCA

ANÁLISIS DINAMICO PARA DETERMINAR LA VELOCIDAD DE VOLCADURA DE UN VEHICULO TRANSPORTADOR DE PRODUCTOS LACTEOS

TESIS QUE PARA OBTENER EL GRADO DE
MAESTRO EN INGENIERÍA MECÁNICA
PRESENTA

ING. CÉSAR OCTAVIO GARCÍA AGUILAR

DIRECTOR:

DR. INGNACIO RAMÍREZ VARGAS

SINODALES:

DR. LUIS MANUEL PALACIOS PINEDA

DR. MARIO EMIGDIO RODRÍGUEZ CASTILLO

94 páginas

Pachuca de Soto, Hidalgo noviembre de 2018.



Carretera México-Pachuca Km. 87.5, Col. Venta Prieta, Pachuca, Hidalgo, C.P. 42080.

A. P. 276, Tels. : 7113073, 7113596, 7113140, 7115119

7115538 Fax (01771)7113399

www.itpachuca.edu.mx

Contenido

Índice de tablas	4
Índice de ilustraciones	5
Resumen.....	7
Abstract.....	8
Introducción.....	9
Planteamiento del problema	11
Delimitación y alcance.....	12
Justificación.....	13
Hipótesis	13
Objetivo general	14
Objetivos específicos.....	14
Capítulo 1 Marco teórico y estado del arte	15
1.1 Dinámica de cuerpo rígido.....	15
1.1.1 Cinemática de cuerpos rígidos.....	15
1.1.2 Movimiento plano de cuerpos rígidos, fuerzas y aceleraciones.....	16
1.1.3 Movimiento de cuerpos rígidos, método de energía y de la cantidad de movimiento.....	19
1.2 Dinámica vehicular.....	21
1.2.1 Dinámica vehicular en un plano.....	21
1.3 Características del vehículo transportador de productos lácteos	33
1.4 De las condiciones del camino	44
1.5 Estado del arte	46
Capítulo 2 Análisis dinámico.....	56
Nomenclatura	67
Capítulo 3 Análisis dinámico de la volcadura, método numérico	68
3.1 Ecuaciones de movimiento	68
3.2 Sistema de fuerzas del vehículo	69
3.3 Componentes de fuerzas de en un modelo vehicular de dos ruedas	73
3.4 Movimiento en estado estable.....	75
Tiempo de respuesta	76
Nomenclatura	79
Capítulo 4 Resultados	82

4.1	Velocidades de deslizamiento Lateral	82
4.1.1	Velocidad de deslizamiento en pavimento sin inclinación	82
4.1.2	Velocidad de deslizamiento en pavimento seco con peralte	83
4.1.3	Velocidad de deslizamiento en pavimento mojado con peralte	84
4.2	Velocidades de volcadura.....	85
4.2.1	Velocidad de volcadura en un camino sin inclinación	85
4.2.2	Velocidad de volcadura en un camino sin inclinación, pero con el centro de gravedad desplazado.	86
4.2.3	Velocidad de volcadura en pavimento seco con peralte	87
4.2.4	Velocidad de volcadura en pavimento seco con el centro de gravedad desplazado.....	88
4.3	Comparación de velocidades respecto del coeficiente de fricción	89
	Dinámica vehicular de volcadura, coeficientes del sistema de fuerzas.	90
	Tiempo de respuesta	91
	Conclusiones.....	92
	Referencias	93

Índice de tablas

Tabla 1. 1 Especificaciones técnicas	35
Tabla 1. 2 Incidencia volcaduras en 2015.....	36
Tabla 1. 3 Ficha técnica del compartimento de carga	42
Tabla 1. 4 Ficha técnica del compartimento de carga	43
Tabla 1. 5 Coeficientes de fricción.....	45

Índice de ilustraciones

Figura 1. 1 Vector mechanics for engineers, Dynamics; Beer Jhonston. 10th edition.	16
Figura 1. 2 Vector mechanics for engineers, Dynamics; Beer Jhonston. 10th edition.	17
Figura 1. 3 Vector mechanics for engineers, Dynamics; Beer Jhonston. 10th edition.	19
Figura 1. 4 Vector mechanics for engineers, Dynamics; Beer Jhonston. 10th edition.	19
Figura 1. 5 Comportamiento esperado de un vehículo cuando transita una curva.	22
Figura 1. 6 Comportamiento aceptable de un vehículo cuando transita una curva.	22
Figura 1. 7 Comportamiento inaceptable de un vehículo cuando transita por una curva.	22
Figura 1. 8 Esquema básico de un vehículo.	25
Figura 1. 9 Vehículo estacionado en pavimento plano.	25
Figura 1. 10 Grados de libertad de un vehículo que sufre una volcadura.	27
Figura 1. 11 Uno de los primeros camiones Isuzu modelo ELF	33
Figura 1. 12 Modelo del vehículo a analizar	34
Tabla 1. 1 Especificaciones técnicas	35
Tabla 1. 2 Incidencia volcaduras en 2015.....	36
Figura 1. 13 Características de los neumáticos instalados	37
Figura 1. 14 Especificaciones de los neumáticos requeridas por el fabricante	37
Figura 1. 15 Paneles de almacenamiento del vehículo.....	38
Figura 1. 16 Altura total de los paneles.	39
Figura 1. 17 Distancia lateral de los paneles	40
Figura 1. 18 Altura entre los paneles del compartimento de carga	40
Figura 1. 19 Posición del centro de gravedad del compartimento de carga	41
Tabla 1. 3 Ficha técnica del compartimento de carga.....	42
Tabla 1. 4 Ficha técnica del compartimento de carga.....	43

Tabla 1. 5 Coeficientes de fricción.....	45
Figura 1. 20 Vehicle rollover. Swinson, Derek. s.l.The physics teacher	46
Figura 1. 21 Vehicle rollover. Swinson, Derek. s.l. The physics teacher	48
Figura 1. 22 Parámetros de modelo lineal de vehículo.	49
Figura 1. 23 Esquema del modelo analizado	50
Figura 1. 24 Equivalencia del modelo analizado en la figura 1.23	50
Figura 1. 25 Algoritmo de prediccion en tiempo real para la volcadura de un autobus.	52
Figura 1. 26 Elementos del modelo de la volcadura de un tráiler.....	54
Figura 2.1 Vista Transversal del vehículo a analizar.....	56
Figura 2.2 Vista transversal del vehículo con el centro de gravedad desplazado .	60
Figura 2.3 Vehículo sobre una trayectoria curva con una inclinación θ	62
Figura 2. 4 Vehículo sobre una trayectoria curva con una inclinación θ y centro de gravedad desplazado a.	65
Figura 3. 1 Sistema de fuerzas en la huella del neumático uno.	70
Figura 3. 2 Modelo de un vehículo de dos ruedas con rotaciones alrededor de x y z	73
Tabla 4. 1 Grados de dirección del vehículo	90
Tabla 4. 2 Coeficientes del sistema de fuerzas del vehículo y características generales.	91

Resumen

Actualmente, la dinámica de un vehículo o dinámica vehicular es un tema de gran importancia para conocer el comportamiento de los vehículos, sin embargo, es necesario entender cada uno de los conceptos relacionados con la dinámica vehicular para poder llevar a cabo un análisis de este tipo. Algunos de estos conceptos pueden ser mal entendidos y por ende mal usados, por lo que deben ser correctamente definidos y formulados para poder llevar a cabo un análisis de dinámica vehicular correcto.

Los accidentes por volcadura en vehículos para trabajo pesado son un problema de seguridad vial, que ocasiona elevadas pérdidas humanas y económicas. La presente tesis muestra un análisis dinámico completo realizado a un camión transportador de productos lácteos modelo ELF 200 para determinar la velocidad a la cual se produce una volcadura cuando este se desplaza sobre una trayectoria curva. Es necesario determinar el centro de gravedad del vehículo en base a su capacidad de carga. La primera parte de este trabajo consiste en hacer un análisis considerando una trayectoria sin inclinación y posteriormente una trayectoria peraltada. Mediante el uso de ecuaciones de movimiento de cuerpo rígido se determina la velocidad de volcadura y se realiza un análisis con el centro de gravedad desplazado. Posteriormente se realiza un análisis considerando un vehículo con seis grados de libertad mediante análisis numérico para comparar los resultados obtenidos mediante el método dinámico.

Los resultados obtenidos en el presente trabajo son de suma importancia para conocer el instante en el que ocurre un desplazamiento lateral y posteriormente una volcadura y poder definir tipos de manejo o diseño del compartimento de carga para evitar futuras pérdidas económicas y humanas.

Abstract

Vehicle dynamics is a very important subject to know vehicle behavior, however it is necessary the understanding of each related concept with vehicle dynamics to develop an analysis of such importance. Some of these concepts are often misunderstood and therefore misused so they must be correctly defined and formulated to carry out a correct analysis of vehicle dynamics.

Rollover accidents in light heavy-duty vehicles is a road safety problem, which causes high human and economic losses. The present work shows a complete dynamic analysis made to a heavy-duty truck model ELF200 which transports dairy products to determine the speed at which a rollover takes place on a curved trajectory. It is necessary to determine the center of gravity based on the load capacity of the vehicle. The analysis is performed considering first a curved trajectory without inclination and then a trajectory with some camber. Using rigid body motion equations, rollover speed is determined and an analysis is made considering a displacement of the center of gravity. Afterwards an analysis will be performed considering a vehicle with six DOF by means of numerical analysis to compare both results.

The data obtained on this work are highly important to know the precise moment of sideslip of a vehicle and a rollover, to know and define maneuvering modes or cargo compartment design in order to avoid future human and economic losses.

Introducción

El estudio de la dinámica vehicular proporciona el conocimiento necesario para el desarrollo de programas que ayuden a analizar la conducción, el manejo y la optimización de los vehículos de carretera. Esta puede ser considerada como el movimiento de un cuerpo rígido; para obtener información cuantitativa, es necesario considerar características en el camino; debe ser una superficie completamente plana con características uniformes y completamente pavimentada, ya sea en condiciones de pavimento seco o mojado. Por otra parte, algunas consideraciones que se deben hacer para que el vehículo sea considerado como cuerpo rígido son: despreciar las desviaciones en la suspensión, despreciar deformaciones verticales en las ruedas, considerar pequeños ángulos de dirección y un sistema de dirección perfectamente rígido (1). La dinámica de una volcadura consta de un modelo cuyo movimiento incluye cuatro grados de libertad, movimiento hacia delante, movimiento lateral, giro de derrape y giro de vuelco; este modelo de vehículo es más exacto y efectivo al momento de realizar un análisis de maniobrabilidad y volcadura que un modelo rígido sobre un plano (2).

De acuerdo con la Administración Nacional de Seguridad Vial, (NHTSA) saber las causas que originan que un vehículo se vuelque, no solo ayudará a evitar que sucedan este tipo de accidentes, sino que también permite saber qué hacer cuando se presenta un accidente de este tipo (3). Los accidentes debido a volcaduras en vehículos para trabajo pesado son un problema de seguridad vial alrededor del mundo, son especialmente violentos y causan más pérdidas económicas y fatalidades que otros accidentes. La mala estabilidad de manejo de algunos vehículos comerciales de carga promueve la volcadura y contribuye al número de accidentes de este tipo (4). Aunque los accidentes por volcadura son poco comunes, son incidentes normalmente mortales cuando estos ocurren. El porcentaje de accidentes por volcadura en los que se ven involucrados camiones ligeros de carga en México en 2015 fue 4.43% el cual es similar al porcentaje en el estado de Hidalgo durante el mismo año equivalente a 3.60% (5). Por otra parte, cierta empresa

proveedora de productos lácteos reporta que, en 2015 ocurrieron 8 accidentes por volcadura en México. De estos, Hidalgo representa el 30.77% del total de las pérdidas que alcanzan casi 2 millones de pesos.

Se han realizado distintas investigaciones para predecir a tendencia de una volcadura en tiempo real, para indicar el riesgo de este tipo de accidente en un autobús. Este algoritmo de predicción consiste en un análisis de estimación de volcadura, basado en el cálculo de la velocidad de advertencia en tiempo real. Guizhen diseñó un algoritmo dinámico simple para determinar el ángulo de deslizamiento y la inclinación del camino y así determinar la influencia que tienen estos en la incidencia de una volcadura. Mediante la comparación de la aceleración máxima estable con la aceleración lateral posible dependiendo del límite de fricción entre el pavimento y la rueda, se determinó la velocidad usando las mediciones de estas aceleraciones y el radio de giro del vehículo (6).

El presente trabajo muestra un análisis dinámico completo realizado a un camión transportador de productos lácteos, para determinar la velocidad a la cual se produce una volcadura cuando este se desplaza sobre una trayectoria curva, también se toman en cuenta sus dimensiones y las características del compartimento de carga tomando como base el modelo de un camión ligero de 4.1 a 5.2 toneladas de peso bruto vehicular, con el fin de evitar pérdidas económicas y humanas a dicha empresa proveedora de productos lácteos.

Planteamiento del problema

Los accidentes por volcadura representan un problema serio en el área del transporte y a pesar de formar parte de un bajo porcentaje del total de todos los accidentes, representan una gran cantidad de lesiones y consecuencias fatales. Cerca de once millones de pasajeros en autos particulares, minivans, camionetas y camiones chocaron en 2002, y únicamente el 2.21% estuvo involucrado en accidentes por volcadura en Estados Unidos, sin embargo, el 21.1% de los mismos terminó en fatales consecuencias, lo cual es significativamente alto comparado con otro tipo de accidentes.

La volcadura de un vehículo se da cuando las ruedas internas a la curva pierden contacto con el piso, provocando que este gire sobre las ruedas externas. Por otra parte, el deslizamiento lateral de un vehículo en una trayectoria curva se da cuando la fuerza centrífuga, opuesta a la fuerza de fricción alcanza o sobrepasa su valor máximo de rozamiento estático. Es importante hacer notar que antes de que ocurra una volcadura ocurrirá primero el deslizamiento lateral y que, en casos críticos es deseable que ocurra primero dicho deslizamiento debido a que se puede corregir este error teniendo un conductor con cierta experiencia.

Delimitación y alcance

El presente trabajo está enfocado en determinar la velocidad de volcadura mediante un análisis dinámico, primero considerando un cuerpo rígido de dos dimensiones, para posteriormente hacer un análisis de volcadura considerando el movimiento general de un vehículo con 4 grados de libertad haciendo uso de las ecuaciones de movimiento para la dinámica de un vehículo que se puede volcar.

Justificación

La dinámica vehicular permite conocer de una manera más precisa las variables que influyen en el manejo y maniobrabilidad de un automóvil de cualquier tipo, así mismo la dinámica de una volcadura permite conocer y predecir el momento exacto en el cual ocurre la volcadura de un vehículo cuando se mueve en una trayectoria curva.

Es de gran importancia llevar a cabo el análisis dinámico en un camión transportador de productos lácteos para determinar las variables involucradas en un accidente por volcadura, tanto las que dependen del camino, como las que dependen del camión y sus propiedades físicas.

Hipótesis

Mediante el conocimiento de la velocidad de volcadura de un vehículo transportador de productos lácteos será posible prevenir y mejorar el diseño del vehículo, así como también el diseño del compartimento de carga en dimensiones, componentes y materiales.

Un análisis dinámico de cuerpo rígido en dos dimensiones permitirá conocer de manera rápida la velocidad de volcadura de dicho vehículo sin la necesidad de llevar a cabo cálculos más complejos, posteriormente se realizará la comprobación de estos resultados mediante al análisis de la dinámica de una volcadura donde se incluye una mayor cantidad de variables que resultaran en datos más exactos.

Objetivo general

Calcular la velocidad máxima a la cual puede desplazarse un vehículo transportador de productos lácteos en una trayectoria curva sin correr riesgo de sufrir un accidente por volcadura

Objetivos específicos

- Realizar un análisis dinámico en dos dimensiones para obtener valores de forma rápida
- Determinar el centro de gravedad del vehículo con y sin compartimento de carga
- Establecer relaciones que indiquen exactamente el momento de la volcadura
- Determinar los factores que influyen en la dinámica vehicular de volcadura del camión

Capítulo 1 Marco teórico y estado del arte

1.1 Dinámica de cuerpo rígido

1.1.1 Cinemática de cuerpos rígidos

La cinemática de cuerpo rígido estudia la relación que existe entre el tiempo, las posiciones, las velocidades y las aceleraciones de las diferentes partículas que forman un cuerpo rígido. Los tipos de movimiento de cuerpo rígido pueden agruparse de la siguiente manera:

Traslación. Un movimiento será de traslación si toda línea recta dentro del cuerpo mantiene la misma dirección durante el movimiento. En la traslación todas las partículas que constituyen el cuerpo se mueven a lo largo de trayectorias paralelas, si estas trayectorias son líneas rectas, se afirma que el movimiento es una traslación rectilínea. Si las trayectorias son líneas curvas, el movimiento será una traslación curvilínea.

Rotación alrededor de un eje fijo. Las partículas que forman al cuerpo rígido se mueven en planos paralelos a lo largo de círculos centrados sobre el mismo eje fijo; si este eje, llamado eje fijo intersecta al cuerpo rígido las partículas localizadas sobre el eje tienen velocidad y aceleración cero.

Movimiento plano general. Cualquier movimiento que no es ni una rotación ni una traslación se conoce como movimiento plano general. También se puede entender al movimiento plano general como la suma de una traslación y una rotación.

Movimiento alrededor de un punto fijo. Es el movimiento tridimensional de un cuerpo rígido unido a un punto fijo.

Movimiento general. Cualquier movimiento de un cuerpo rígido que no entra en ninguna de las categorías anteriores se conoce como movimiento general. (7)

1.1.2 Movimiento plano de cuerpos rígidos, fuerzas y aceleraciones.

Considere un cuerpo rígido sobre el que actúan varias fuerzas externas F_1, F_2, F_3, \dots (Figura 1.1). Se puede suponer que el cuerpo está integrado por un gran número n de partículas de masa Δm_i ($i=1, 2, \dots, n$), cuya masa m es igual a la masa total de las partículas del sistema sobre la cual actúan todas las fuerzas externas y considerando primero el movimiento del centro de masa G del cuerpo con respecto al sistema de referencia newtoniano se tiene que:

$$\sum F = m\bar{a} \quad (1.1)$$

Donde m es la masa del cuerpo y a es la aceleración del centro de masa G .

El movimiento relativo del cuerpo relativo al sistema de referencia centroidal $Gx'y'z'$ se tiene la siguiente ecuación:

$$\sum M_G = \dot{H}_G \quad (1.2)$$

Donde \dot{H}_G representa la razón de cambio de H_G , la cantidad de movimiento angular alrededor de G del sistema de partículas que forma el cuerpo rígido. En lo subsecuente H_G hará referencia simplemente a la cantidad de movimiento angular del cuerpo rígido en torno a su centro de masa G .

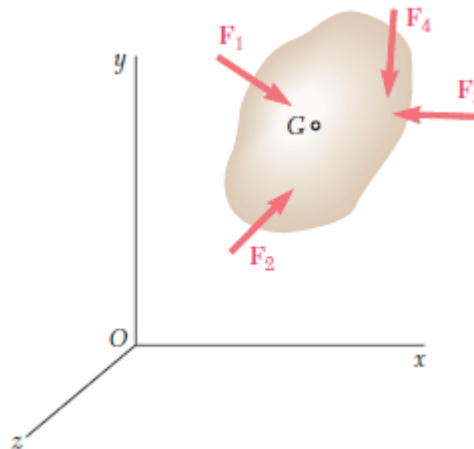


Figura 1. 1 Vector mechanics for engineers, Dynamics; Beer Jhonston. 10th edition.

Ahora considere una placa rígida en movimiento plano, la cual, está integrada por un gran número n de partículas P_t de masa Δm_i , se puede calcular la cantidad de movimiento angular H_G de la placa alrededor de su centro de masa G considerando los momentos alrededor de G de las cantidades de movimiento de las partículas de la placa en su movimiento con respecto al sistema de referencia Oxy o $Ox'y'$ (figura 1.2)

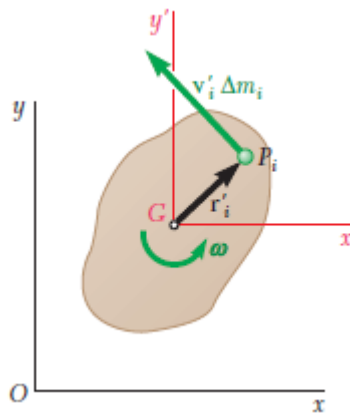


Figura 1.2 Vector mechanics for engineers, Dynamics; Beer Jhonston. 10th edition.

Si se elige este último, se escribe:

$$H_G = \sum_{t=1}^n (r'_t \times v'_t \Delta m_i) \quad (1.3)$$

Donde r'_t y $v'_t \Delta m_i$ denotan el vector de posición y la cantidad de movimiento lineal de la partícula P_t relativa al sistema de referencia centroidal $Gx'y'$. Dado que la partícula pertenece a la placa, se tiene que $v' = \omega \times r'_t$ donde ω es la velocidad angular de la placa en el instante considerado. Se escribe:

$$H_G = \sum_{t=1}^n (r'_t \times (\omega \times r'_t) \Delta m_i) \quad (1.4)$$

De acuerdo con la figura 1.2, se observa con facilidad que la expresión obtenida representa un vector de la misma dirección que ω y de magnitud igual a $\omega \sum r_t^2 \Delta m_i$. Recordando que la suma $\sum r_t^2 \Delta m_i$ representa el momento de inercia I de la placa

alrededor del eje centroidal perpendicular a la misma, se concluye que la cantidad de movimiento angular H_G de la placa en torno a su centro de masa es:

$$H_G = \bar{I}\omega \quad (1.5)$$

Diferenciando ambos miembros de 1.4 se obtiene:

$$H_G = \dot{\bar{I}}\omega = \bar{I}\alpha \quad (1.6)$$

Dado lo anterior la cantidad de movimiento angular de la placa se representa mediante un vector de la misma dirección que α y de magnitud $I\alpha$.

Si se considera ahora una placa rígida de masa m que se mueve bajo la acción de varias fuerzas externas F_1, F_2, F_3, \dots , contenidas en el plano de la placa como se muestra en la figura 1.3. Al sustituir de H_G de la ecuación 1.6 en la ecuación 1.2 y escribir las ecuaciones de movimiento 1.1 y 1.2 en forma escalar se tiene:

$$\sum F_x = m\bar{a}_x \quad \sum F_y = m\bar{a}_y \quad \sum M_G = \bar{I}\alpha \quad (1.7)$$

Las ecuaciones 1.7 muestran que la aceleración del centro de masa G de la placa y su aceleración angular α se obtienen fácilmente una vez que se ha determinado la resultante de las fuerzas externas que actúan sobre la placa y su momento resultante alrededor de G . De este modo se puede decir que el movimiento de la placa está completamente definido por la resultante y el momento resultante alrededor del centro de masa de las fuerzas externas que actúan sobre ella.

Debido a que el movimiento de un cuerpo rígido depende solo de la resultante y del momento resultante de las fuerzas que actúan sobre él, se concluye que dos sistemas de fuerzas son equipolentes, es decir, que tienen la misma resultante y el mismo momento resultante, también son equivalentes; tienen exactamente el mismo efecto sobre un cuerpo rígido dado.

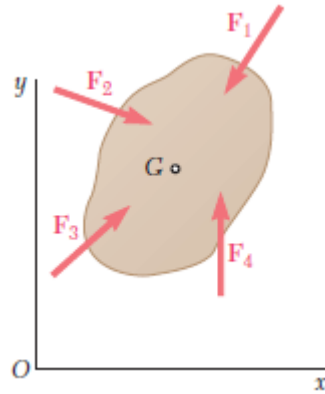


Figura 1. 3 Vector mechanics for engineers, Dynamics; Beer Jhonston. 10th edition.

La figura 1.4 muestra la sustitución de las fuerzas efectivas por un vector $m\bar{a}$ fijo en el centro de masa G de la placa y por un momento $\bar{I}\alpha$.

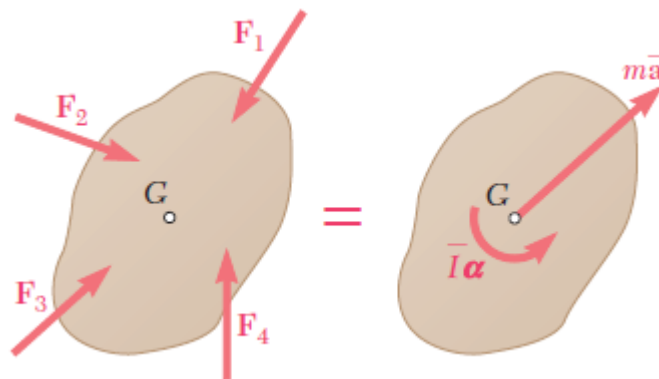


Figura 1. 4 Vector mechanics for engineers, Dynamics; Beer Jhonston. 10th edition.

1.1.3 Movimiento de cuerpos rígidos, método de energía y de la cantidad de movimiento

El análisis de movimiento de cuerpos rígidos se puede realizar mediante el principio de trabajo y energía, donde se supone nuevamente que el cuerpo rígido está

compuesto por un gran número n de partículas de masa Δm_i y se puede escribir como:

$$T_1 + U_{1 \rightarrow 2} = T_2 \quad (1.8)$$

Donde: T_1, T_2 son los valores inicial y final de la energía cinética total de las partículas que forman el cuerpo rígido; $U_{1 \rightarrow 2}$ es el trabajo de todas las fuerzas que actúan sobre las diversas partículas del cuerpo, ya sea que estas fuerzas sean internas o externas (7)

La energía cinética total

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \Delta m_i v_i^2 \quad (1.9)$$

Se obtiene al sumar cantidades escalares positivas, y ella misma es una cantidad escalar positiva.

El trabajo de una fuerza durante un desplazamiento de su punto de aplicación desde A_1 hasta A_2 es

$$U_{1 \rightarrow 2} = \int_{A_1}^{A_2} F \cdot dr \quad (1.10)$$

El trabajo del momento M desde su valor inicial θ_1 del ángulo θ hasta su valor final θ_2 es:

$$U_{1 \rightarrow 2} = \int_{\theta_1}^{\theta_2} M d\theta \quad (1.11)$$

1.2 Dinámica vehicular.

1.2.1 Dinámica vehicular en un plano

La dinámica de un vehículo puede ser considerada como el movimiento de un cuerpo rígido con respecto a un sistema global de coordenadas fijo. (2)

Para formular la dinámica vehicular es necesario definir los conceptos adecuados y formulaciones correctas para poder hacer uso del análisis matemático, sin embargo, dicho análisis debe mantenerse lo más simple posible para poder explicar lo que cada fórmula trata de decir.

Antes de iniciar con el desarrollo de los modelos matemáticos es necesario definir lo que es un vehículo de carretera manejable, dado que una carretera o camino es una franja larga y estrecha, un vehículo debe ser un objeto con una dirección clara de rumbo. Por ejemplo, un carrito de compras no es un vehículo ya que puede ir en cualquier dirección. Otra característica es común de los vehículos de carretera es que el conductor debe ser llevado a bordo para experimentar la misma dinámica. Además, los caminos tienen curvas por lo que un vehículo debe tener la capacidad de ser manejado de forma precisa, esto es, el control simultáneo de la velocidad de giro (yaw rate) y la magnitud y dirección de la velocidad del vehículo.

En la figura 1.5 se muestra un ejemplo de giro apropiado para un vehículo de carretera, incluso en la figura 1.6 se muestran pequeñas desviaciones del

comportamiento deseado, pero aún pueden ser toleradas; por otra parte, la figura 1.7 muestra dos formas totalmente inaceptables cuando se transita por una curva.

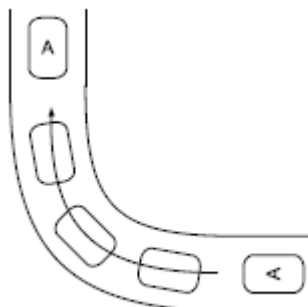


Figura 1. 5 Comportamiento esperado de un vehículo cuando transita una curva.

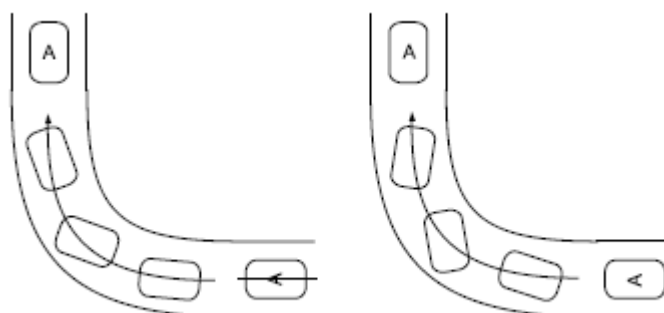


Figura 1. 6 Comportamiento aceptable de un vehículo cuando transita una curva.

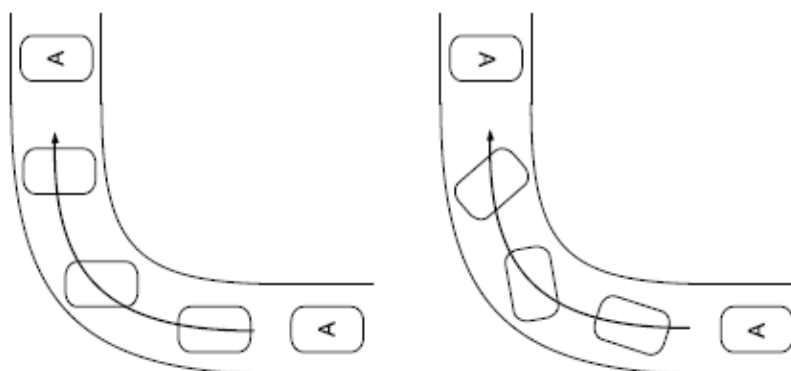


Figura 1. 7 Comportamiento inaceptable de un vehículo cuando transita por una curva.

Todos los vehículos de carretera tienen ruedas y casi en todos los casos equipadas con llantas neumáticas, y rueda y llanta en conjunto están conectadas al chasis por medio de la suspensión. El número de posibles suspensiones en un vehículo puede llegar a ser infinito. Sin embargo, los sistemas de suspensión pueden ser clasificados dentro de dos principales subgrupos: dependiente e independiente. En una suspensión dependiente las dos ruedas del mismo eje están rígidamente conectadas una con otra. En una suspensión independiente simplemente no lo están, y cada rueda está conectada al chasis mediante una articulación normalmente de un grado de libertad. (1)

Esquema básico de un vehículo.

El modelo matemático de un vehículo debe ser simple pero significativo, es obvio que no existe una solución única. Quizás el único punto importante es establecer claramente cada una de las suposiciones de cada simplificación para establecer claramente bajo qué condiciones el modelo podrá predecir confiablemente el comportamiento de un vehículo real.

Existen algunas suposiciones relacionadas con las condiciones de operación y otras relacionadas con el modelo físico del vehículo. De acuerdo a las condiciones de operación se pueden prever las siguientes suposiciones:

Rendimiento. El vehículo va recto en un camino plano posiblemente frenando o acelerando (velocidad de avance no constante).

Manejo. El vehículo gira en un camino plano, usualmente con una velocidad de avance casi constante.

Viaje. El vehículo va recto en un camino con baches y velocidad de avance constante.

Cabe mencionar que las condiciones reales son una mezcla de las tres anteriores. El modelo físico de un vehículo que es simple y a su vez significativo incluye las siguientes características:

- (1). El cuerpo del vehículo es un cuerpo rígido sencillo
- (2). Cada conjunto de rueda con llanta está conectado al cuerpo del vehículo por medio de una unión de un solo grado de libertad.
- (3). El ángulo de giro de cada una de las ruedas delanteras está determinado principalmente por la posición angular del volante de dirección
- (4). La masa de las ruedas es muy pequeña comparada con la masa del cuerpo del vehículo

El esquema básico de un vehículo se muestra en la figura 1.8 el cual también sirve para definir algunos parámetros geométricos fundamentales:

El eje longitudinal del vehículo x , por lo tanto, es la dirección de avance del vehículo en i .

La altura h desde el plano del camino hasta la posición G del centro de gravedad del vehículo.

Las distancias longitudinales a_1 y a_2 desde G hacia los ejes delantero y trasero respectivamente.

La distancia entre ejes $l = a_1 + a_2$.

La posición del eje de dirección para cada rueda.

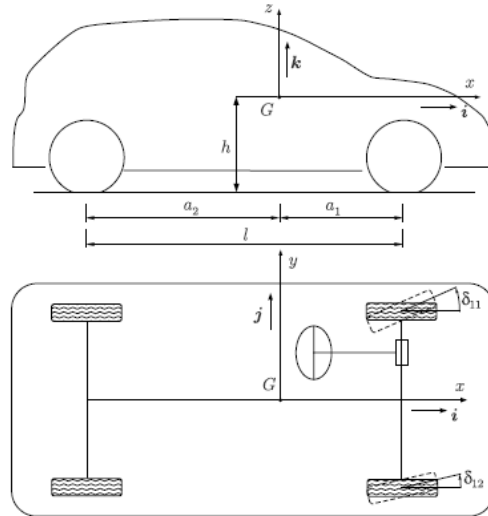


Figura 1. 8 Esquema básico de un vehículo.

Sea F_{z1} y F_{z2} las fuerzas normales delanteras y traseras sobre cada una de las ruedas respectivamente, y C la posición del centro de gravedad del vehículo como se muestra en la figura 1.9; haciendo suma de fuerzas en z igual a cero, se tiene que la fuerza normal en cada rueda para un vehículo estacionado es:

$$F_{z1} = \frac{1}{2} mg \frac{a_2}{l} \quad (1.11)$$

$$F_{z2} = \frac{1}{2} mg \frac{a_1}{l} \quad (1.12)$$

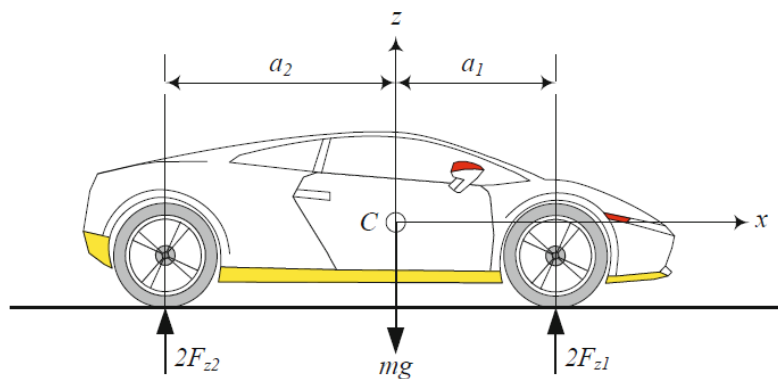


Figura 1. 9 Vehículo estacionado en pavimento plano.

Como se muestra en las figuras 1.8 y 1.9 se tiene que:

$$l = a_1 + a_2 \quad (1.13)$$

Las ecuaciones 1.11 y 1.12 se pueden reorganizar para determinar la posición del centro de masa.

$$a_1 = \frac{2l}{mg} F_{z2} \quad a_2 = \frac{2l}{mg} F_{z1} \quad (1.14)$$

1.2.2 Dinámica vehicular de una volcadura.

En esta sección se desarrolla un modelo dinámico para un vehículo que cuenta con movimiento hacia adelante, lateral, de derrape y de volcadura. Este modelo de un vehículo que se puede volcar es más exacto y más efectivo comparado con el modelo de un vehículo en el plano.

La figura 1.10 muestra un vehículo con un sistema de coordenadas $B(Cxyz)$ en el centro de masa C . El eje x es el eje longitudinal que pasa por C en dirección hacia adelante, el eje y pasa lateralmente hacia la izquierda desde el punto de vista del conductor, el eje z hace de sistema coordinado un sistema de la mano derecha. Cuando el automóvil esta estacionado en un plano horizontal, el eje z es perpendicular al suelo y opuesto a la fuerza de gravedad, por tanto, las ecuaciones de movimiento del vehículo deberían ser expresadas en términos de $B(Cxyz)$

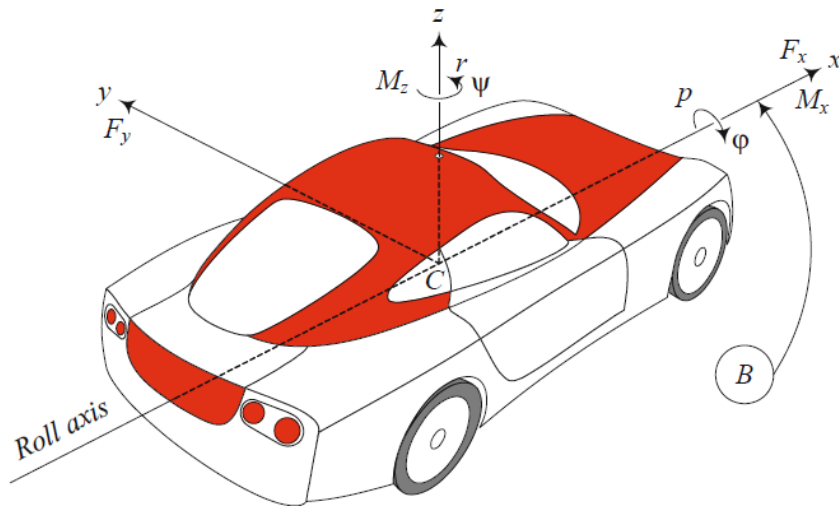


Figura 1. 10 Grados de libertad de un vehículo que sufre una volcadura.

La orientación angular y la velocidad angular del vehículo están expresadas por 3 ángulos: vuelco ϕ , giro θ y derrape ψ ; y sus velocidades o tasas: velocidad o tasa de vuelco p , velocidad o tasa de giro q y velocidad de derrape r .

$$p = \dot{\phi} \quad (1.15)$$

$$q = \dot{\theta} \quad (1.16)$$

$$r = \dot{\psi} \quad (1.17)$$

Por otra parte, el sistema de fuerzas del vehículo es la resultante de las fuerzas externas y los momentos que el vehículo recibe de los alrededores. El sistema de fuerzas puede ser expresado en el sistema de coordenadas del cuerpo como:

$${}^B F = F_x \hat{i} + F_y \hat{j} + F_z \hat{k} \quad (1.18)$$

$${}^B M = M_x \hat{i} + M_y \hat{j} + M_z \hat{k} \quad (1.19)$$

Un vehículo que tiene movimientos de vuelco y derrape tiene solo 4 grados de libertad, que son traslación en direcciones x y y , y rotación alrededor de los ejes x

y z, por lo que las ecuaciones de movimiento para dicho comportamiento son las siguientes:

$$F_x = m\dot{v}_x - mrv_y \quad (1.20)$$

$$F_y = m\dot{v}_y + mrv_x \quad (1.21)$$

$$M_z = I_z\dot{\omega}_z = I_z\dot{r} \quad (1.22)$$

$$M_x = I_x\dot{\omega}_x = I_x\dot{p} \quad (1.23)$$

Si se considera ahora el vehículo mostrado en la figura 1.11 el marco de referencia global G está fijo al suelo y el marco de referencia local B esta unido al centro de masa C del vehículo. La orientación del marco B puede ser expresada por la dirección del ángulo ψ entre los ejes x y X y el ángulo de vuelco φ situado entre los ejes z y Z , por lo que el vector posición global de centro de masa está denotado por ${}^G d$. Las ecuaciones de movimiento de cuerpo rígido del marco de referencia del cuerpo son:

$${}^B F = {}^B R_G {}^G F = {}^B R_G (m {}^G a_B) = m_G^B a_B = m {}^B \dot{v}_B + m_G^B \omega_B \times {}^B v_B \quad (1.24)$$

$${}^M B = \frac{{}^G d}{dt} {}^B L = {}^B \dot{L}_B = {}^B \dot{L} + {}^B \omega_B \times {}^B L = {}^B I_G^B \dot{\omega}_B + {}^B \omega_B \times ({}^B I_G^B \omega_B) \quad (1.25)$$

El vector velocidad del vehículo es:

$${}^B V_c = \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ 0 \end{bmatrix} \quad (1.26)$$

Donde v_x es la componente de la velocidad en x y v_y es la componente lateral de la velocidad. Los otros vectores cinemáticos son los siguientes:

$${}^B\dot{V}_C = \begin{bmatrix} \dot{v}_x \\ \dot{v}_y \\ 0 \end{bmatrix} \quad (1.27)$$

$${}^B_G\omega_B = \begin{bmatrix} \omega_x \\ 0 \\ \omega_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p \\ 0 \\ r \end{bmatrix} \quad (1.28)$$

$${}^B_G\dot{\omega}_B = \begin{bmatrix} \dot{\omega}_x \\ 0 \\ \dot{\omega}_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{p} \\ 0 \\ \dot{r} \end{bmatrix} \quad (1.29)$$

Se puede asumir que las coordenadas del cuerpo son el marco de coordenadas principal del vehículo y tiene una matriz diagonal del momento de inercia

$${}^B I = \begin{bmatrix} I_x & 0 & 0 \\ 0 & I_y & 0 \\ 0 & 0 & I_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{bmatrix} \quad (1.30)$$

Sustituyendo la matriz diagonal del momento de inercia y los vectores en las ecuaciones de movimiento 1.24 y 1.25 se obtienen las siguientes ecuaciones:

$${}^B F = m {}^B \dot{V}_B + m {}^B_G\omega_B \times {}^B V \quad (1.31)$$

$$\begin{bmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{bmatrix} = m \begin{bmatrix} \dot{v}_x \\ \dot{v}_y \\ 0 \end{bmatrix} + m \begin{bmatrix} \omega_x \\ 0 \\ \omega_z \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m\dot{v}_x - m\omega_z v_y \\ m\dot{v}_y + m\omega_z v_x \\ m\omega_x v_y \end{bmatrix} \quad (1.32)$$

$${}^B M = {}^B I_G^B \dot{\omega}_B + {}^B_G\omega_B \times ({}^B I_G^B \omega_B) \quad (1.33)$$

$$\begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\omega}_x \\ 0 \\ \dot{\omega}_z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \omega_x \\ 0 \\ \omega_z \end{bmatrix} \times \left(\begin{bmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_x \\ 0 \\ \omega_z \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} I_1 \dot{\omega}_x \\ I_1 \omega_x \omega_z - I_3 \omega_x \omega_z \\ I_3 \dot{\omega}_z \end{bmatrix} \quad (1.34)$$

Las primeras 2 ecuaciones de la matriz 1.32 son las ecuaciones de movimiento de traslación en las direcciones x y y , y la primera y tercera ecuaciones de 1.34 son las ecuaciones de movimiento rotacional en las direcciones x y z

$$\begin{bmatrix} F_x \\ F_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m\dot{v}_x - m\omega_z v_y \\ m\dot{v}_y + m\omega_z v_x \end{bmatrix} \quad (1.35)$$

$$\begin{bmatrix} M_x \\ M_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_1 \dot{\omega}_x \\ I_3 \dot{\omega}_z \end{bmatrix} \quad (1.36)$$

La tercera ecuación de 1.32 proporciona la condición de compatibilidad para mantener el vehículo en el camino. Por otra parte, la segunda ecuación de 1.34 es otra condición de compatibilidad que proporciona la condición del momento de giro para mantener el vehículo en el camino.

Si se considera ahora un vehículo que se mueve en el espacio, dicho vehículo tiene seis grados de libertad, para desarrollar las ecuaciones de movimiento de dicho vehículo es necesario definir las características cinemáticas como sigue:

$${}^B V_C = \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ 0 \end{bmatrix} \quad {}^B \dot{V}_C = \begin{bmatrix} \dot{v}_x \\ \dot{v}_y \\ \dot{v}_z \end{bmatrix} \quad (1.37)$$

$${}^B_G \omega_B = \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} \quad {}^B_G \dot{\omega}_B = \begin{bmatrix} \dot{\omega}_x \\ \dot{\omega}_y \\ \dot{\omega}_z \end{bmatrix} \quad (1.38)$$

El vector aceleración del vehículo en la coordenada del cuerpo es:

$${}^B a = {}^B \dot{v}_B + {}^B_G \omega_B \times {}^B v_B = \begin{bmatrix} \dot{v}_x + \omega_y v_z - \omega_z v_y \\ \dot{v}_y + \omega_z v_x - \omega_x v_z \\ \dot{v}_z + \omega_x v_y - \omega_y v_x \end{bmatrix} \quad (1.39)$$

Por lo tanto, las ecuaciones de movimiento de Newton son las siguientes:

$$\begin{bmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{bmatrix} = m \begin{bmatrix} \dot{v}_x + \omega_y v_z - \omega_z v_y \\ \dot{v}_y + \omega_z v_x - \omega_x v_z \\ \dot{v}_z + \omega_x v_y - \omega_y v_x \end{bmatrix} \quad (1.40)$$

Para definir las ecuaciones de movimiento angular es necesario definir la matriz del momento de masa, si se asume que el sistema de coordenadas del cuerpo se tiene:

$${}^B M = {}^B I_G^B \dot{\omega}_B + {}^B_G \omega_B \times ({}^B I_G^B \omega_B) \quad (1.41)$$

$$\begin{aligned} {}^B I_G^B \dot{\omega}_B + {}^B_G \omega_B \times ({}^B I_G^B \omega_B) &= \begin{bmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\omega}_x \\ \dot{\omega}_y \\ \dot{\omega}_z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} \times \left(\begin{bmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} \right) = \\ & \begin{bmatrix} \dot{\omega}_x I_1 - \omega_y \omega_z I_2 + \omega_y \omega_z I_3 \\ \dot{\omega}_y I_2 + \omega_x \omega_z I_1 - \omega_x \omega_z I_3 \\ \dot{\omega}_z I_3 - \omega_x \omega_y I_1 + \omega_x \omega_y I_2 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (1.42)$$

Por lo tanto, las ecuaciones de movimiento rotacional para un vehículo de seis grados de libertad son:

$$\begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\omega}_x I_1 - \omega_y \omega_z I_2 + \omega_y \omega_z I_3 \\ \dot{\omega}_y I_2 + \omega_x \omega_z I_1 - \omega_x \omega_z I_3 \\ \dot{\omega}_z I_3 - \omega_x \omega_y I_1 + \omega_x \omega_y I_2 \end{bmatrix} \quad (1.43)$$

Se pueden derivar las ecuaciones de movimiento de un vehículo que se vuelca, por medio de las ecuaciones de movimiento de un vehículo de seis grados de libertad (ecuaciones 1.40-1.43). Si se considera un vehículo de cuatro ruedas y, debido a que dicho vehículo no tiene movimiento en la dirección z ni rotación alrededor del eje y se tiene que:

$$v_z = 0 \quad \dot{v}_z = 0 \quad \omega_y = 0 \quad \dot{\omega}_y = 0 \quad (1.44)$$

$$F_z = 0 \quad M_y = 0 \quad (1.45)$$

Sustituyendo las ecuaciones 1.44 y 1.45 en ecuaciones 1.40-1.43 se tiene que:

$$\begin{bmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{bmatrix} = m \begin{bmatrix} \dot{v}_x - \omega_z v_y \\ \dot{v}_y + \omega_z v_x \\ \omega_x v_y \end{bmatrix} \quad (1.46)$$

$$\begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\omega}_x I_1 \\ \omega_x \omega_z I_1 - \omega_x \omega_z I_3 \\ \dot{\omega}_z I_3 \end{bmatrix} \quad (1.47)$$

1.3 Características del vehículo transportador de productos lácteos

1.3.1 Isuzu en México

Como parte de una de las compañías japonesas más antiguas de la industria automotriz, el origen de Isuzu se remonta al año 1916, cuando las compañías Tokyo Ishikawajima Shipbuilding & Engineering co. Y la Tokyo Gas & Electric Industrial Co. Iniciaron planes para la producción de automóviles. En 1937 se convirtió en Isuzu Motors Limited y como empresa tiene la historia más larga de cualquier fabricante japonés de vehículos y es uno de los mayores productores de vehículos comerciales en todo el mundo.



Figura 1. 11 Uno de los primeros camiones Isuzu modelo ELF

Isuzu también es uno de los mayores fabricantes de motores Diesel en el mundo, con su gama de motores Diesel de alta calidad, no solo para aplicaciones de transporte en carretera, sino también como centrales estacionarias, para la generación de energía y para aplicaciones de propulsión marina.

El modelo ELF lanzado en 1959 se equipó con un motor Diesel el año siguiente de su lanzamiento, el primero para camiones ligeros en Japón. ELF siempre ha liderado el camino en camiones ligeros, con el modelo Flat Low introducido en 1974, el Wide Cab en 1980 y la suspensión delantera independiente en 1990. El ELF KR, lanzado

en 2002, fue el primero en cumplir con la nueva versión japonesa de 2003, llamadas Normas de emisión a corto plazo. En 2004, ELF rompió la marca de fabricación acumulada de cuatro millones de vehículos. En 2006, un innovador cambio de modelo completo fue más allá del concepto tradicional de camiones ligeros. ELF sigue actuando como un camión estándar global en la nueva era.

En 2005, Isuzu Motors se estableció en México trayendo parte de su gama de productos para satisfacer las principales necesidades del mercado mexicano. Actualmente cuenta con camiones comerciales de hasta 17 toneladas de peso bruto vehicular. Posteriormente en 2007 se lanza al mercado el camión de carga modelo ELF 300 y dos años más tarde inicia operaciones la planta en México.

Después de 5 años en el país la compañía expande el mercado con el lanzamiento del camión de pasajeros ELF 600-Bus. Actualmente la compañía ha acumulado más de veinte mil unidades vendidas y ha lanzado camiones más grandes como el Forward 1100 doce años desde su llegada a México. (8)

El camión ELF 200 es un camión ligero con una capacidad de carga de 2000 kg y con un sistema de inyección de combustible de riel común, lo cual hace que sea un vehículo más rentable, su configuración y su corta distancia entre ejes lo hace especial para cualquier carga (figura 1.12). La configuración del chasis es adaptable a una amplia variedad de aplicaciones con un espacio para carga con poco más de tres metros. Este camión cuenta con un motor Diesel turbo cargado de 4 cilindros, silencioso y amigable con el medio ambiente. La tabla 1.1 muestra las especificaciones técnicas del vehículo a analizar.



Figura 1. 12 Modelo del vehículo a analizar

MODELO		ELF 200	ELF 300	
Tipo		E	E	H
RODADO TRASERO		SENCILLO		DOBLE
Peso Bruto Vehicular* (kg) / (lb)		4,100 / 9,039		5,200 / 11,464
Capacidad del Eje (kg) / (lb)	Delantero	1,800 / 3,968		2,500 / 5,511
	Trasero	2,500 / 5,511		4,000 / 8,818
Peso del Chasis-Cabina** (kg) / (lb)		1,760 / 3,880	1,910 / 4,210	2,000 / 4,409
Distancia entre Ejes (mm)/(pulg)		2,475 / 97	2,475 / 97	3,345 / 131
Largo de Aplicación Máximo Recomendado (mm)/(pulg)		3,353 / 132	3,353 / 132	4,267 / 168
MOTOR				
Modelo		4JJ1-TC		
Emisión		US EPA 04		
Tipo		Motor DOHC (doble árbol de levas a la cabeza) de 4 tiempos, 16 válvulas, enfriado por agua, inyección directa, sistema de combustible common-rail controlado electrónicamente, turbocargador VGS, válvula EGR enfriada por agua.		
Número de Cilindros		4 en Línea		
Diámetro por carrera (mm)		95.4 X 104.9		
Cilindrada (cc)		2,999		
Potencia de salida máx. (ISO bruto) hp@rpm / (JIS-NET) kW@rpm		138 @ 2,600 / 102 @ 2,600		
Torque máx. (ISO bruto) lb-pie@rpm / (JIS-NET) N-m@rpm		276 @ 1,800-2,600 / 375 @ 1,800-2,600		
CHASIS				
Embrague	Tipo	Placa simple seca con muelle de diafragma, control hidráulico		
	Tamaño(mm)	325		
Transmisión manual	Tipo	MYY5T		
	Relación de engranajes	1a : 5.315		
		2a : 3.053		
		3a : 1.655		
		4a : 1.000		
		5a : 0.721		
Rev : 5.068				
Engranaje Final	Diámetro(mm)	292		
	Relación de engranaje	4.777	5.125	
Freno	Servicio	VAC / Delantero; Disco ventilado / Trasero; Tambor		
	Estacionamiento	Mecánico atrás de la transmisión		
Dirección	Tipo	Hidráulica		
	Relación de engranajes de esferas recirculantes	22.6		
Eje	Delantero	Tipo Elliot Inverso Viga-I		
	Trasero	Banjo, completamente flotante		
Suspensión	Independiente de resortes con amortiguadores hidráulicos de doble acción		Muelles de láminas de acero de aleación semiélticos, amortiguador telescópico de doble acción hidráulica.	
Bastidor				
Sección de canal del tipo escalera				
Llantas	Delantera/Trasera	205/75R16C		
Alternador ⁽¹⁾		24V-80A	24V-50A	
Motor de arranque		24V / 4.0 kW		
Capacidad del tanque de combustible (litros)		75	100	
CABINA				
Tipo		Cabina inclinable		
Número de asientos		3 Pasajeros		
Parabrisas		Laminado curvado		

Tabla 1. 1 Especificaciones técnicas

1.3.2 Danone de México

Grupo Danone en México cuenta con más de 30 años de experiencia especializándose en la elaboración de productos lácteos como el yogurt, y bebidas como el agua embotellada. Cuenta con cuatro unidades de negocio: Danone lácteos, Bonafont, Bonafont en tu casa y Danone Nutricia early life nutrition. El grupo Danone México pertenece a grupo Danone, con base en Francia, y cuenta con más de 190 plantas productivas y alrededor de 100000 empleados a nivel mundial, generando ventas por más de 20 billones de euros. En México cuenta con más de 30 plantas productivas y es el séptimo país en importancia para grupo Danone. Existen centros de distribución en distintas ciudades de la Republica, y la ciudad de Pachuca en Hidalgo no es la excepción

El principal sistema de transporte para los productos lácteos en las ciudades de México son los camiones ligeros de carga entre los que se encuentran el modelo ELF 200. Dicho modelo parece ser propenso a sufrir volcaduras; la tabla 1.2 muestra la incidencia de dichos percances durante 2015, se puede observar que a lo largo de este año ocurrieron seis accidentes provocando pérdidas cercanas a los dos millones de pesos

MARCA	MES	DIRECCIÓN	DEPOSITO	COSTO SINIESTRO
4728BAN ISUZU ELF600H	ENERO	Supply	OAXACA	\$ 203,572
3592BAN ISUZU ELF200E	ENERO	Supply	PACHUCA	\$ 515,717
4712BAN ISUZU ELF600H	ABRIL	Supply	MONTERREY	\$ 124,221
4037BAN ISUZU ELF200E	MAYO	Supply	XALAPA	\$ 218,673
3720BAN CHEVROLET AVEO	MAYO	Supply	VALLEJO	\$ 51,446
4636BAN ISUZU ELF200E	SEPTIEMBRE	Supply	VILLAHERMOSA	\$ 140,794
4598BAN ISUZU ELF200E	OCTUBRE	Supply	MERIDA	\$ 101,094
2977BAN DODGE ATTITUDE	ENERO	Comercial	MONTERREY	\$ 136,306
2960BAN NISSAN TSURU	ENERO	Comercial	XALAPA	\$ 150,386
4595BAN ISUZU ELF200E	JUNIO	Comercial	VILLAHERMOSA	\$ 297,508
3789BAN CHEVROLET SPARK	JULIO	Comercial	APIZACO	\$ 78,239
3978BAN ISUZU ELF200E	JULIO	Comercial	SAN LUIS POTOSI	\$ 402,504

Tabla 1. 2 Incidencia volcaduras en 2015

Grupo Danone, preocupado por el elevado número de accidentes y la alarmante cifra de pérdidas, se dio a la tarea de contratar un perito de tránsito terrestre para tratar de solucionar dicho problema. Durante este proceso se revisaron las condiciones de la carga y su distribución, así como las especificaciones técnicas del vehículo y del compartimento de carga.

Dicho análisis inició con la verificación de especificaciones como las ruedas, las figuras 1.12 y 1.13 muestran que, en efecto, las especificaciones de las ruedas requeridas por el fabricante fueran las mismas que las características de las ruedas.



Figura 1. 13 Características de los neumáticos instalados

PRESION DE NEUMATICOS kPa (psi)		
TAMAÑO DE NEUMATICOS	DELANTE	DETRAS
205/75R16C 113/111	525 kPa (75 psi)	

808100 9110

Figura 1. 14 Especificaciones de los neumáticos requeridas por el fabricante

Se revisó la distribución de carga en algunos vehículos de Danone, como se puede observar en la figura 1.14 existen paneles de almacenamiento en los costados del compartimento de carga, también se tomaron medidas de dichos paneles con el fin de conocer la distribución de la carga y la nueva posición del centro de gravedad, las figuras 1.15 a 1.20 muestran las mediciones tomadas hechas por operadores de la compañía.



Figura 1. 15 Paneles de almacenamiento del vehículo

Como se puede observar, todas estas dimensiones has sido tomadas con una cinta métrica o flexómetro el cual no es apropiado para llevar a cabo dimensiones exactas, debido a que se pueden presentar errores al momento de hacer la medición, ocasionando lecturas falsas, como se muestra en la figura 1.16

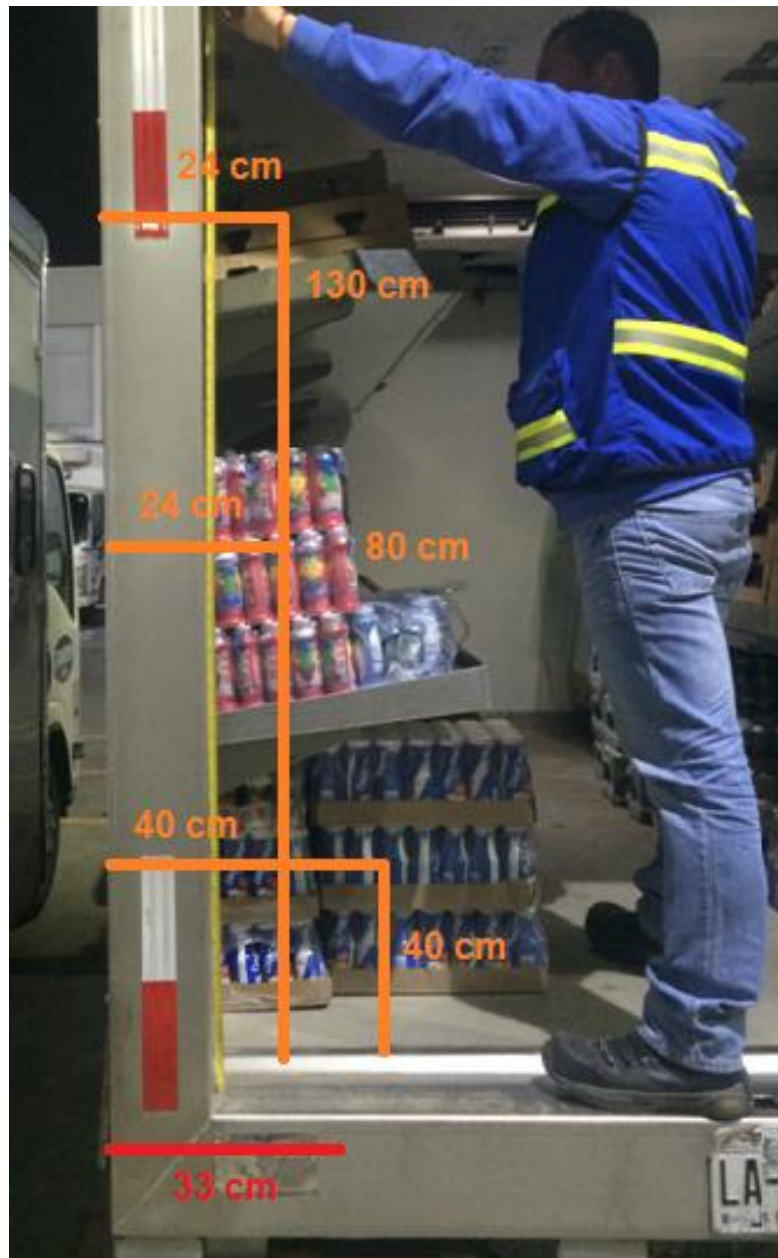


Figura 1. 16 Altura total de los paneles.

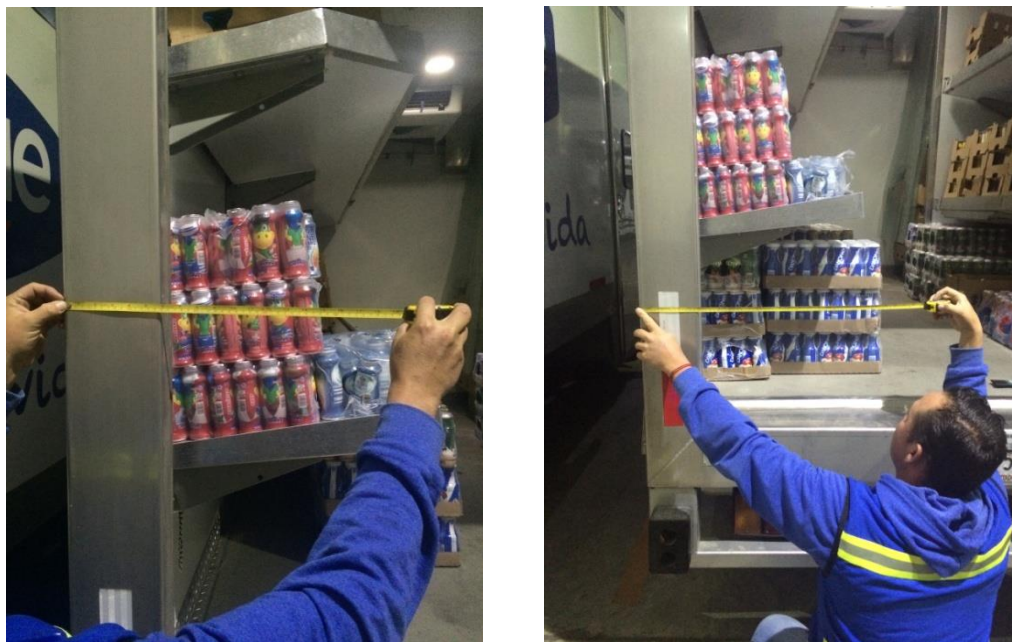


Figura 1. 17 Distancia lateral de los paneles

La figura 1.17 muestra la altura a la que se encuentran los paneles del primero y segundo nivel del compartimento de carga.



Figura 1. 18 Altura entre los paneles del compartimento de carga

1.3.3 Compartimento de Carga

Tecamex es una empresa mexicana dedicada a la fabricación de compartimentos de carga para distintos tipos de transporte. (9)

En este caso el compartimento de carga del vehículo a analizar consiste en una cámara refrigerada fabricada con paneles de poliestireno de alta densidad y protección ultravioleta, así como también forro interior en fibra plástica de grado alimenticio. Cuenta también con una puerta lateral refrigerada abatible, una cortina trasera y una escalera para fácil acceso.

De acuerdo con el análisis realizado por el perito terrestre, la disposición de la carga provoca un desbalance en el eje y del compartimento de carga de acuerdo al dibujo técnico mostrado en la figura 1.18

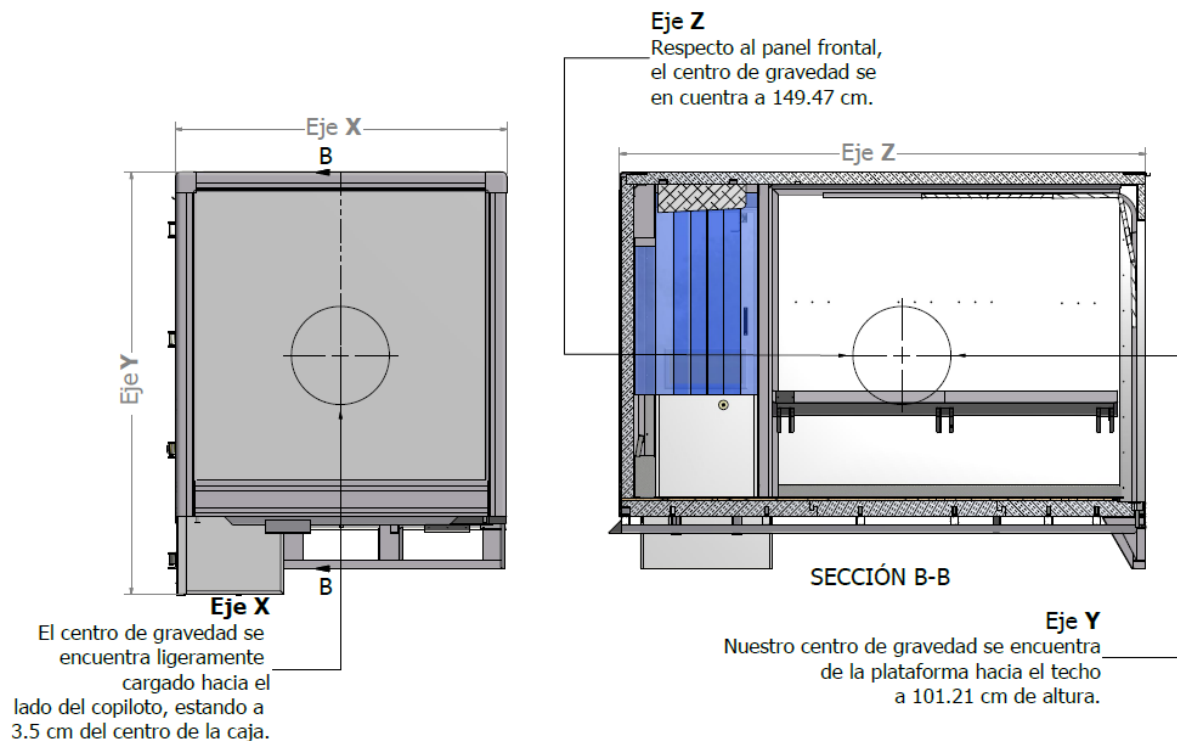


Figura 1. 19 Posición del centro de gravedad del compartimento de carga

Las tablas 1.3 y 1.4 muestran las características y ficha técnica del compartimento de carga.



 	
FICHA TECNICA DANONE PROXY 2 / 2012	
DIMENSIONES	
LARGO INTERIOR	3.07 mts
ANCHO INTERIOR	1.86 mts
ALTO INTERIOR	1.83 mts
LARGO EXTERIOR	3.28 mts
ANCHO EXTERIOR	2.03 mts
ALTO EXTERIOR	2.00 mts
CHASIS	ISUZU ELF 200
EQUIPO DE REFRIGERACION	CARRIER 30S
PESOS	
PESO DE CARROCERIA	860 kg
PESO DE CHASIS	1875 kg
PESO EQUIPO DE REFRIGERACION	125 kg
TOTAL	2860 kg
CONSTRUCCION PANELES	
DESCRIPCION	PANELES FABRICADOS EN POLIESTERINO DE ALTA DENSIDAD DE 3" DE ESPESOR, FORROS EXTERIORES EN FIBRA PLASTICA CON PROTECCION UV, FORRO INTERIOR EN FIBRA PLASTICA GRADO ALIMENTICIO.
PUERTA LATERAL	
TIPO	PUERTA LATERAL REFRIGERADA ABATIBLE CON 3 BISAGRAS DE ALUMINIO, VENTANILLA CON REFLEJANTE ACABADO ESPEJO, CORTINA HAWAIIHANA, ESCALERA DENTRO DE LA CARROCERIA PARA FACIL ACCESO EN LAMINA ALUMINIO ANTIDERRAPANTE, MURO ADUANA
CHAPA	CHAPA EMBUTIDA TIPO AUTOMOTRIZ, CON SEGURO Y BARRA DE LIBERACION INTERIOR
MARCO PUERTA LATERAL	MARCO PUERTA LATERAL EN ACERO INOX. CAL. 12
PUERTA TRASERA	PUERTA CORTINA DE ALUMINIO PARA REFRIGERACION, CON JALADERA Y MANERAL
MARCO TRASERO	MARCO PUERTA TRASERO EN ACERO INOXIDABLE CAL. 12

Tabla 1. 3 Ficha técnica del compartimento de carga


ACCESORIOS	
CAJA DE MERMAS	DE ALUMINIO ANTIDERRAPANTE CON PUERTA ABATIBLE Y PUERTA INFERIOR PARA DESCARGA CON PORTA CANDADO
CAJA DE SEGURIDAD	CAJA DE SEGURIDAD EN PLACA DE ACERO DE 3/8", CON CHAPA DE SEGURIDAD CON PROTECCION ANTI-GANZUAS, PARA MONTADO EN CHASIS DETRÁS DEL ASIENTO DE CHOFER
TOPES TRASEROS	TOPES TRASEROS DE NEOPRENO DE DOS PERFORACIONES PERSONALIZADOS CON LOGO DANONE
SISTEMA ELECTRICO	
LUZ INTERIOR	PLAFON DE 4 LED'S IMPORTADO CON INTERRUPTOR TIPO TEMPORIZADOR IMPORTADO
LUCES DE NAVEGACION	LUCES DE NAVEGACION REGLAMENTARIAS EN LED SEGÚN SCT, CON TRES MARIAS EN MARCO TRASERO
LUCES TRASERAS	CALABERA ORIGINAL DE CHASIS
REFLEJANTES	CINTAS REFLEJANTES EN MARCO TRASERO, MUROS LATERALES, CINTA FANTASMA REFLEJANTE EN MARCO TRASERO
REPISAS	DOS NIVELES DE REPISAS A TODO LO LARGO DE LA CARROCERIA, ESTRUCTURA EN LAMINA DE ACERO INOX. CHAROLAS EN LAMINA DE ALUMINIO, BISAGRA EN ACERO INOX. INCLUYE SEGURO DE RETENCION
PISO	PISO EN LAMINA DE ALUMINIO ANTIDERRAPANTE CAL. 14, CON DOS DESAGÜES TRASEROS Y DOS EN PARTE FRONTAL
LODERAS	LODERAS DE HULE
CONCHAS, BORDAS Y ESQUINEROS	
ESQUINEROS FRONTALES	ESQUINERO FRONTAL EN ALUMINIO EXTRUIDO
ESQUINEROS VERTICALES	ESQUINERO VERTICAL EN ALUMINIO EXTRUIDO
BORDA INFERIOR	BORDA INFERIOR EN ALUMINIO EXTRUIDO
CONCHAS	CONCHA EN FUNDICION ALUMINIO PULIDO CON LOGO DANONE
PLATAFORMA	PLATAFORMA ESTRUCTURA EN P.T.R. CON RECUBRIMIENTO EN PINTURA PARA CHASIS NEGRO, AISLAMIENTO DE 3" EN POLIESTIRENO DE ALTA DENSIDAD, PROTECCION EN SUBPISO DE FIBRA PLASTICA ALTA RESISTENCIA
	

Tabla 1. 4 Ficha técnica del compartimento de carga

1.4 De las condiciones del camino

La selección del pavimento en una carretera se determina basados en el volumen de tráfico y su composición, las características del suelo, el clima, el rendimiento del pavimento en esa zona y la disponibilidad de los materiales, costo inicial, costo anual de mantenimiento promedio y el costo de servicio vida. (10)

Las características importantes del pavimento que están relacionadas con el diseño geométrico y tienen efecto en el comportamiento del conductor y la capacidad de la superficie de mantener su forma y sus dimensiones, para drenar y mantener su resistencia al deslizamiento. Dicho deslizamiento es una causa mayor en los accidentes viales, lo cual es altamente preocupante, los accidentes por deslizamiento no pueden ser asociados únicamente a un error del conductor o a unas condiciones de manejo a exceso de velocidad; el camino deberá proveer cierto nivel de resistencia al deslizamiento de tal forma que permitan el frenado y la maniobrabilidad de una manera adecuada de acuerdo a las condiciones de camino. Algunas investigaciones han demostrado que la geometría de un camino influye en las condiciones de deslizamiento, por lo tanto, la resistencia al deslizamiento debe ser tomada en cuenta al momento de diseñar una nueva construcción o proyectos mayores de reconstrucción de caminos (11).

La superficie de rodadura está expuesta de manera directa a la acción de los neumáticos de un vehículo y posibilita su circulación, la uniformidad de dicha superficie indica su regularidad, la cual se ve afectada por problemas de desintegración, deformidades y grietas. La uniformidad tiene 2 componentes, la longitudinal, medida por el índice de rugosidad internacional, basado en el movimiento vertical estandarizado de un vehículo al circular por la carretera; y la transversal, caracterizada por las deformaciones permanentes identificables transversalmente. La uniformidad incide directamente en los costos de operación y la seguridad

La fricción es la resistencia al movimiento entre las llantas del vehículo y la superficie de rodadura, expresada mediante el coeficiente de fricción, definido por la relación entre la fuerza de fricción generada en las llantas en sentido opuesto al movimiento

y la fuerza normal generada por la masa del vehículo. La fuerza de fricción se puede descomponer en dos componentes, fricción longitudinal y fricción transversal. La fricción longitudinal se aprovecha para acelerar o frenar el vehículo a lo largo de la carretera y la fricción transversal hace posible que el vehículo cambie de dirección en condiciones de estabilidad. El coeficiente de fricción para diseño debe considerar condiciones desfavorables, como una superficie mojada, llantas gastadas y maniobras inesperadas. Este rango de diseño se encuentra entre 0.5 para bajas velocidades (<50 Km/h) y 0.3 para altas velocidades (>100 Km/h). El coeficiente de fricción transversal, también debe considerar la comodidad de los conductores que son sensibles a los efectos de la fuerza centrífuga y dejar disponibilidad de fricción longitudinal de al menos 85%. (12) El coeficiente de fricción f total para diseño se determina a partir de la velocidad de proyecto:

$$f = 1.5v^{-0.35}$$

La tabla 1.5 muestra los distintos coeficientes de fricción a velocidades dadas, cabe mencionar que el coeficiente de fricción para condiciones normales y llantas en buen estado es de 0.8 a 0.9. (13)

V	f	p	f_l	f_t
30	0.456	85%	0.346	0.297
40	0.412	85%	0.346	0.224
50	0.381	85%	0.324	0.201
60	0.358	86%	0.308	0.183
70	0.339	87%	0.295	0.167
80	0.324	88%	0.285	0.154
90	0.311	89%	0.276	0.142
100	0.299	90%	0.269	0.130
110	0.289	90%	0.261	0.126

Tabla 1. 5 Coeficientes de fricción.

1.5 Estado del arte

Desde hace algunos años se han llevado a cabo distintos análisis para describir cuando un vehículo vuelca sobre su costado durante una trayectoria curva a una velocidad dada, los vehículos que son más propensos a sufrir una volcadura son los que tienen un centro de gravedad alto en relación con el pavimento como los SUV. La volcadura también puede ocurrir en camiones con un exceso de carga o carga inestable, así como también los vehículos que transportan líquidos. Swinson (10) describió la física de una volcadura en vehículos como la Jeep CJ-5, la Ford Bronco II y la Suzuki Samurai tomando en cuenta un bloque como el de la figura 1.19 sobre el que actúa una fuerza P y determinando el valor de P necesario para que el bloque se deslice sobre su costado.

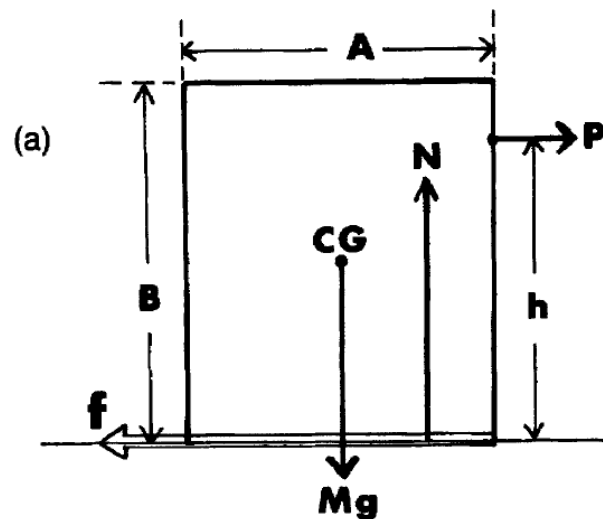


Figura 1. 20 Vehicle rollover. Swinson, Derek. s.l. The physics teacher

Esta situación era similar con lo que pasa con un vehículo que circula en una curva y las fuerzas que actúan sobre el vehículo son su peso y las fuerzas normales sobre los neumáticos del mismo, Swinson concluyó que la mientras mayor sea la distancia entre los neumáticos de un vehículo, este será más estable y menos propenso a volcarse, así como también será más propenso a volcarse mientras más alto este localizado su centro de gravedad y aun con un centro de gravedad alto, si la fricción es lo suficientemente baja el vehículo se deslizará lateralmente antes de volcarse; determino el umbral de estabilidad contra volcadura:

$$a_y = g \frac{(T/2)}{h}$$

Donde T es la distancia entre los neumáticos, h la altura del centro de gravedad, g el valor de la gravedad y a_y el valor de la aceleración lateral del vehículo.

Tres años después Rod Cross (13) toma en cuenta el análisis llevado a cabo por Swinson y a diferencia de este, menciona que se debe tomar en cuenta la fuerza centrífuga al momento de hacer estudios de esta naturaleza. Si se considera un vehículo como el de la figura 1.20 cuyo centro de masa está localizado a una distancia x de las ruedas del lado izquierdo y una distancia w de las ruedas de lado derecho y una fuerza F que actúa a una altura h sobre la superficie de rodadura; si dicha fuerza F es muy alta el vehículo comenzará a deslizarse o tal vez pueda voltearse sobre su costado. Si la fuerza es pequeña el vehículo permanecerá estático. El vehículo comenzará a deslizarse si: $F = \mu Mg$ si $\mu < x/h$ o $h < x/\mu$, y el deslizamiento comenzara antes de que ocurra la volcadura, pero si $h > x/\mu$ el vehículo se volcara antes de deslizarse. Si se considera ahora que el mismo vehículo está dando una vuelta en camino circular de radio R a una velocidad v , las únicas fuerzas horizontales que actúan sobre el auto son f_1 y f_2 , no existe otra fuerza horizontal que contrarreste a las fuerzas de fricción por lo que el vehículo tendrá una aceleración hacia el centro del camino circular de $f_1 + f_2 = Mv^2/R$, si se hace suma de momentos alrededor de $P = 0$ entonces $N_2 = Mgx/(x + w)$. Por otra parte, si se hace suma de momentos alrededor del centro de masa y la velocidad es suficientemente pequeña el momento permanecerá en cero, el vehículo no se volcará y $N_2 = M(gx - v^2 \frac{H}{R})/(x + w)$, pero N_2 será cero cuando $v^2/R = gx/H$ que es la condición para que exista la volcadura. En este caso es cuando el vehículo experimenta una fuerza centrífuga $F = Mv^2/R$ que actúa sobre el centro de masa del vehículo

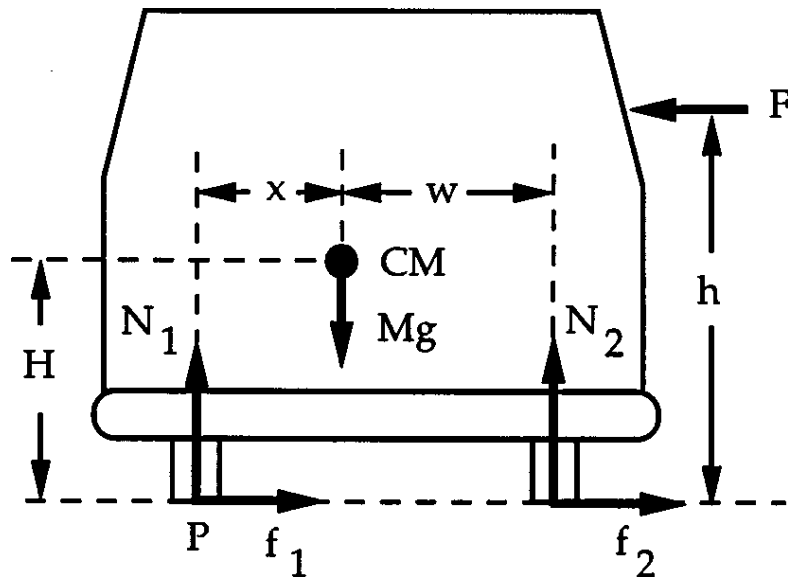


Figura 1. 21 Vehicle rollover. Swinson, Derek. s.l. The physics teacher

Yu y Gvenc (15) pudieron linealizar un modelo no lineal de alto orden asumiendo un análisis considerando ángulos pequeños y despreciando términos dinámicos de orden superior y tomando en cuenta solo el giro lateral y los movimientos laterales y de vuelco; establecieron un modelo lineal de quinto orden considerando ángulo de deslizamiento lateral (β), velocidad de deslizamiento (r), ángulo de vuelco del vehículo (ϕ), velocidad de vuelco del vehículo ($\dot{\phi}$) y ángulo de vuelco del vehículo (ϕ_u). Cuya aceleración lateral del vehículo en el centro de gravedad se puede determinar mediante estos parámetros. Las ecuaciones derivadas de este modelo se pueden representar en una forma concisa para análisis lineal y para computación numérica:

$$I\dot{x} = \bar{A}x + \bar{B}\delta \quad \text{o} \quad \dot{x} = Ax + B\delta$$

Donde:

$$I = \begin{bmatrix} MU & 0 & 0 & m_s h & 0 \\ 0 & I_{zz} & 0 & -I_{xz} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ m_s U h & -I_{xz} & 0 & I_{xs} & -D \\ -m_u U (h_u - h_r) & 0 & 0 & 0 & -D - D_u \end{bmatrix}$$

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} Y_\beta & Y_r & 0 & 0 & 0 \\ N_\beta & N_r & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -m_s U h & m_s g h - K & -D & K \\ h_r Y_{\beta r} & h_r Y_{r r} + m_u U (h_u - h_r) & -K & -D & K_u + K - m_u g (h_u - h_r) \end{bmatrix}$$

$$x = [\beta r \phi \dot{\phi} \phi_u]^T, \quad A = I^{-1} \bar{A}, \quad \bar{B} = [Y_d N_d 0 0 0]^T, \quad B = I^{-1} \bar{B}$$

Los parámetros del modelo lineal están enlistados en la figura 1.21 donde la matriz I es la matriz de inercia y la matriz A es la matriz del sistema

Table 1. Variables and parameters.

Parameters	Definition	Value	Units
l_f	Longitudinal distance from front axle to CG	1.384	m
l_r	Longitudinal distance from rear axle to CG	3.405	m
M	Total mass	8756.34	kg
m_s	Sprung mass	6114.85	kg
m_u	Unsprung mass	2641.49	kg
I_z	Moment of inertia about vertical axis	40674.5	kg.m ²
I_{xs}	Roll moment of inertia	7185.8	kg.m ²
h_{cg}	Height of truck centre of gravity	1.32	m
h_s	Height of sprung mass CG	1.45	m
h_r	Height of axle roll centre	0.52	m
h_u	Height of unsprung mass CG	0.6	m
h	Distance from axle roll centre to CG	0.93	m
g	Gravitational constant	9.8	m/sec ²
C_{af}, C_{ar}	Effective cornering stiffness at front axle and rear axle	Figure 3	N/rad
K, K_u	Equivalent suspension stiffness and axle stiffness	Figure 4	Nm/rad
D, D_u	Equivalent suspension damping ratio and axle damping ratio		
F_{zr}, F_{zl}	Tyre normal force (left/right)		N
U	Vehicle longitudinal speed		m/s
δ	Steering wheel angle		rad
T_s	suspension restoring torque for anti-roll control		Nm
K_{fb}	Active roll control feedback gain		

Figura 1. 22 Parámetros de modelo lineal de vehículo.

Más tarde, Yangyeol (11) un esquema de control de chasis unificado en una pista de prueba virtual con el fin de prevenir una volcadura y mejorar el manejo del vehículo y su estabilidad lateral integrando un control electrónico de estabilidad y una dirección frontal activa. La prevención de la volcadura se logra a través de un control de velocidad y la estabilidad del vehículo se logra por medio del control de la velocidad de derrape, debido a que el control unificado de chasis trabaja en todo momento con el conductor, el rendimiento promedio del vehículo depende no solo de que tan bien trabaje el controlador sino también de las interacciones que tenga con el conductor. El comportamiento de vehículo y las interacciones que tiene este con el controlador y con el conductor se investigan a gran escala en el simulador de manejo de la pista de prueba virtual, consiste en un simulador de manejo de un vehículo en tiempo real, la animación visual de un motor, una pantalla de visualización e interfaces ajustadas para el conductor y el vehículo.

En el artículo para identificar la dinámica de volcadura de un vehículo usando conceptos de modo deslizante, Tafner y Reichhartinger (17) consideraron un modelo vehicular como en el mostrado en la figura 1.22 y 1.23, el movimiento de vuelco fue simplificado con una masa que rota alrededor de un punto fijo y un sistema de suspensión que fuerza al sistema a regresar a su posición vertical.

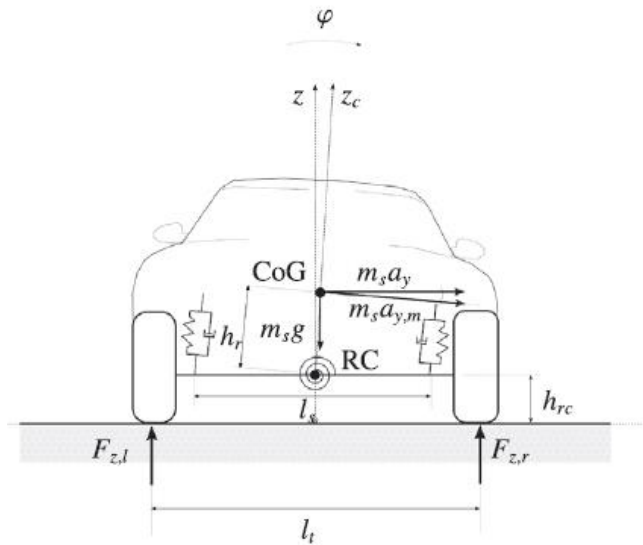


Figura 1. 23 Esquema del modelo analizado

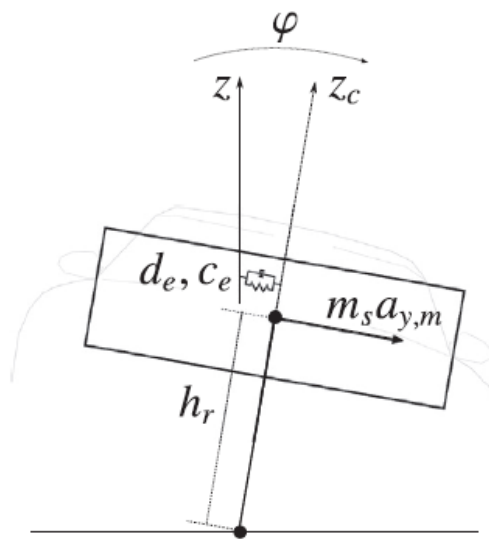


Figura 1. 24 Equivalencia del modelo analizado en la figura 1.23

Algunas consideraciones de este modelo fueron que se debía considerar el ángulo de inclinación del camino pequeño, es decir, la prueba de manejo para obtener el parámetro se tenía que llevar a cabo en plano. Tampoco se consideró el giro alrededor del eje x ni la dinámica vertical en las ruedas tomando en cuenta que la rigidez de los neumáticos es suficientemente alta, se consideró la rigidez y el amortiguamiento como constantes. Una vez hecho tomando en cuenta estas consideraciones se pudo formular el momento de vuelco:

$$M_r = m_s h_r a_{y,m}$$

Y el principio de momento angular con respecto al centro de volcadura,

$$J_{sx} \ddot{\varphi} = \sum M = m_s h_r a_{y,m} - d_e \dot{\varphi} c_e \varphi$$

Donde

$$\dot{\varphi} = \frac{d\varphi}{dt} \quad y \quad \ddot{\varphi} = \frac{d^2\varphi}{dt^2}$$

Donde la constante c_e se refiere a la rigidez efectiva de vuelco, que consiste en la rigidez de las barras estabilizadoras y la rigidez de los resortes de la suspensión tanto delanteros y traseros, como laterales; la constante d_e se refiere al amortiguamiento efectivo de vuelco que consiste en la suspensión de los amortiguadores

El uso de la dinámica de multi cuerpo permite estudiar el movimiento de cuerpos rígidos sujetos a fuerzas externas, mediante el uso de ADAMS Byoungkee y Hwan (18) Seo desarrollaron un modelo numérico de un vehículo basado en el método de elemento finito considerando un cuerpo rígido en la parte inferior y un cuerpo deformable en la parte superior para determina la resistencia del techo de un vehículo. Mediante el factor de estabilidad estática SSF por sus siglas en inglés, que relaciona e ancho del vehículo (distancia entre las ruedas) y la altura del centro de gravedad.

$$SSF = \frac{T}{2H}$$

Mediante este estudio fue posible analizar numéricamente los comportamientos elásticos y plásticos del techo mediante algunas funciones de ADAMS, también se determinaron los factores para mejorar la relación de resistencia al peso del vehículo.

Guizhen y Honggang (6) presentaron en su artículo Algoritmo de predicción en tiempo real de la volcadura de un autobús con estimación de ángulo de banco, un algoritmo de predicción que consiste en un análisis dinámico de la estabilidad de volcadura basándose en un modelo plano de un vehículo que se puede volcar y un cálculo de la velocidad de advertencia en tiempo real. El algoritmo propuesto está compuesto principalmente de tres componentes mostrados en el diagrama de la figura 1.25.

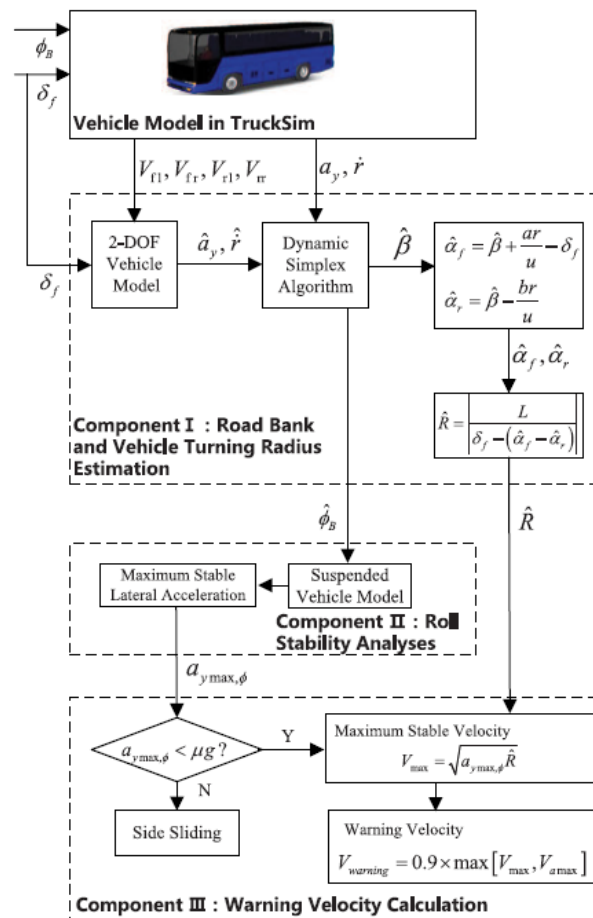


Figura 1. 25 Algoritmo de predicción en tiempo real para la volcadura de un autobus.

El primer componente permitió estimar dinámicamente la inclinación del camino ϕ_B y el radio de giro R del vehículo, para estimar dicha inclinación es necesario considerar un modelo vehicular no lineal de 2 grados de libertad y un algoritmo dinámico simple, y mediante el uso de la aceleración lateral y la aceleración alrededor del eje z. el segundo componente, y más importante, analiza la estabilidad de volcadura del vehículo y se utiliza para determinar el umbral de volcadura del mismo indicado por los valores de la aceleración lateral; después de haber tomado en cuenta los valores de la inclinación del camino, la máxima aceleración lateral estable $a_{ymax,\phi}$, se determina para representar el límite de volcadura. El tercer y último componente determina si el vehículo está en riesgo de volcarse o únicamente deslizarse sobre su costado mediante la comparación de la máxima aceleración lateral estable $a_{ymax,\phi}$ bajo condiciones de fricción entre el neumático y el pavimento, por lo tanto, el límite de volcadura $a_{ymax,\phi}$ se convierte en la máxima velocidad estable de acuerdo al radio de giro, y la velocidad de advertencia calculada respecto a un margen de seguridad dado.

El objetivo del estudio realizado por Tarko Hall y Romero (19) hace dos años, fue desarrollar una nueva metodología para la investigación de la propensión a la volcadura de camiones en caminos con curvas cerradas mediante la observación del comportamiento de los conductores y la medición de la velocidad de dichos camiones mediante la grabación de video desde una ubicación remota en el camino; el modelo de volcadura fue realizado únicamente con los datos obtenidos del video para condiciones de manejo de día y de noche.

Un modelo cuasi estático en su forma más simple considera la relación entre b que es la mitad del ancho del vehículo y h que es la altura del centro de gravedad, la cual, es usada como un factor de estabilidad o un umbral de volcadura. Tarko propone una versión mejorada de esta relación:

$$a_r = \left(\frac{h}{b} - e \right) g$$

Donde a_r es la aceleración lateral crítica de volcadura, b es la mitad del ancho del vehículo, h la altura del centro de gravedad, e es la pendiente transversal o peralte de la carretera y g la aceleración debido a la gravedad. Es necesario asumir un peralte uniformemente aplicado a lo largo de la curva, que el conductor siga el camino exactamente y el vehículo este párelo al borde del camino, así como una velocidad constante.

La figura 1.26 presenta un tráiler con los elementos clave marcados en él, se observan 2 áreas rectangulares debajo de las ruedas las cuales representan las marcas de las llantas sobre el camino; los puntos A y B se encuentran a la mitad en la parte exterior de la huella de las llantas. El punto E es el centro de la llamada quinta rueda, el cual facilita el giro entre el tráiler y el tractor, la quinta rueda da soporte a la parte frontal del tráiler. Si las dimensiones de la superficie y del tráiler son conocidas, los puntos A y B determinan la posición del tráiler en un sistema de coordenadas (x, y, z) junto con la posición de las otras ruedas y del punto E, así como la posición del centro de masa M si la distribución de carga es conocida.

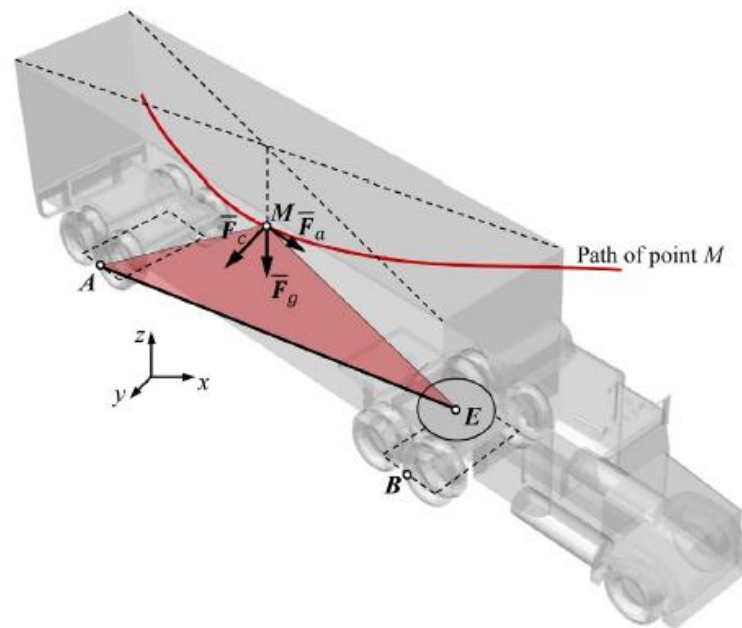


Figura 1. 26 Elementos del modelo de la volcadura de un tráiler

La volcadura es causada por una fuerza \bar{F} compuesta por tres pseudo fuerzas: centrífuga \bar{F}_c , longitudinal \bar{F}_a , y de gravedad \bar{F}_g . La fuerza \bar{F} puede ser descompuesta en dos componentes: la componente $\bar{F}_n = \bar{n}_1 \times \bar{F}$ normal al plano AEM y la componente $(\bar{F} - \bar{F}_n)$. Esta fuerza \bar{F}_n es directamente responsable de la volcadura por lo que la condición de volcadura se puede expresar como:

$$\bar{n}_1 \times (\bar{F}_a + \bar{F}_c + \bar{F}_g) > 0$$

Y las tres fuerzas pueden ser calculadas como:

$$\bar{F}_a = ma\bar{u}_a$$

$$\bar{F}_c = ma\bar{u}_c$$

$$\bar{F}_g = mg\bar{u}_g$$

Donde m es la masa del tráiler, a la aceleración longitudinal, c la aceleración centrífuga, g la gravedad, \bar{u}_a el vector unitario tangente a la dirección del movimiento, \bar{u}_c el vector unitario hacia afuera de la curva del camino y \bar{u}_g el vector unitario en dirección hacia abajo. Finalmente se obtiene la velocidad crítica y posterior mente se compara con la velocidad observada, lo que lleva a una medida sustituta de seguridad que indica que la volcadura se aproxima Δv .

Estos valores de Δv estimados cada 0.1 segundos a lo largo de la trayectoria del vehículo fueron utilizados para estudiar la propensión de un tráiler a la volcadura. Este modelo aplica para varios tipos de curvas si la trayectoria de los vehículos a lo largo de estas curvas, sus dimensiones y su distribución de carga son conocidas.

Capítulo 2 Análisis dinámico

Considere el camión de masa m como el que se muestra en la figura 2.1, el cual circula por una trayectoria curva de radio r y sin peralte, el cual está sujeto a dos fuerzas normales N_1 y N_2 y dos fuerzas de fricción entre las llantas y el pavimento Fr_1 y Fr_2 . Suponga que el centro de gravedad se encuentra como se indica en la figura.

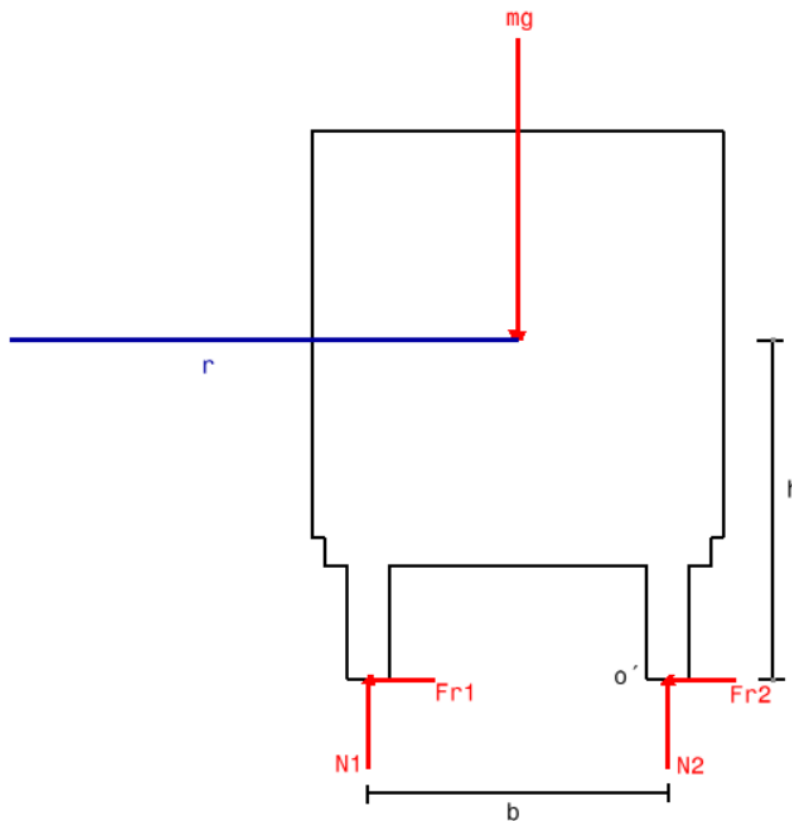


Figura 2.1 Vista Transversal del vehículo a analizar

Tomado en cuenta un análisis cinético de cuerpo rígido se tiene que la suma de fuerzas normales es igual a la sumatoria de la masa del camión por la aceleración normal del mismo.

$$\sum F_n = ma_n \quad (2.1)$$

$$F_{r1} + F_{r2} = ma_n \quad (2.2)$$

$$\text{Donde: } a_n = \frac{v^2}{r} \quad (2.3)$$

Para que exista un equilibrio traslacional vertical se debe cumplir lo siguiente:

$$\sum F_y = 0$$

$$N_1 + N_2 - mg = 0 \quad (2.4)$$

Haciendo suma de momentos en o' se tiene que:

$$\sum M_{o'} = I\alpha + ma_n h$$

$$-N_1(b) + mg\left(\frac{b}{2}\right) = ma_n h \quad (2.5)$$

Y sustituyendo ecuación 2.3 en 2.5:

$$-N_1(b) + mg\frac{b}{2} = m\frac{v^2}{r}h \quad (2.6)$$

Un vehículo se desliza o derrapa cuando la fuerza de fricción alcanza o sobrepasa su valor máximo de rozamiento estático:

$$F_r = N\mu_s \quad (2.7)$$

Por lo tanto, de ecuaciones 2.2 y 2.3 se tiene que:

$$F_{r1} + F_{r2} = m \frac{v^2}{r}$$

$$N_1 \mu_s + N_2 \mu_s = m \frac{v^2}{r}$$

$$\mu_s (N_1 + N_2) = m \frac{v^2}{r} \quad (2.8)$$

Ahora, sustituyendo 2.4 en 2.8:

$$\mu_s (mg) = m \frac{v^2}{r}$$

$$v = \sqrt{\mu_s gr} \quad (2.9)$$

La fórmula 2.9 es la velocidad de deslizamiento o derrape para un vehículo o camión que circula en una curva sin peralte.

Para determinar la velocidad de volcadura de un vehículo es necesario saber que esta ocurre en el momento en que las ruedas cercanas al centro de la curva pierden contacto con el pavimento, es decir:

$$N_1 = 0 \quad (2.10)$$

Es importante hacer notar que en general, no necesariamente la fricción en las ruedas alcanza su valor máximo; entonces de la ecuación 2.4 se tiene que:

$$N_1 + N_2 = mg$$

$$N_2 = mg \quad (2.11)$$

Y de la ecuación 2.6 en la misma forma:

$$mg \frac{b}{2} = m \frac{v^2}{r} h$$

Por lo tanto, la velocidad de volcadura para un vehículo es:

$$v = \sqrt{\frac{rbg}{2h}} \quad (2.12)$$

Las ecuaciones 2.9 y 2.12 son las velocidades de deslizamiento y volcadura respectivamente para un vehículo que se encuentra sobre una trayectoria curva, es necesario que para efectos de seguridad ocurra primero un deslizamiento lateral o derrape antes que una volcadura, por lo tanto:

$$\sqrt{\mu_s gr} < \sqrt{\frac{rbg}{2h}}$$

$$\mu_s gr < \frac{rgb}{2h}$$

$$\mu_s < \frac{b}{2h} \quad (2.13)$$

La desigualdad 2.13 indica la relación que debe existir entre el ancho del vehículo con la altura del centro de gravedad del vehículo, y esta relación a su vez debe ser mayor que el valor de la fricción estática.

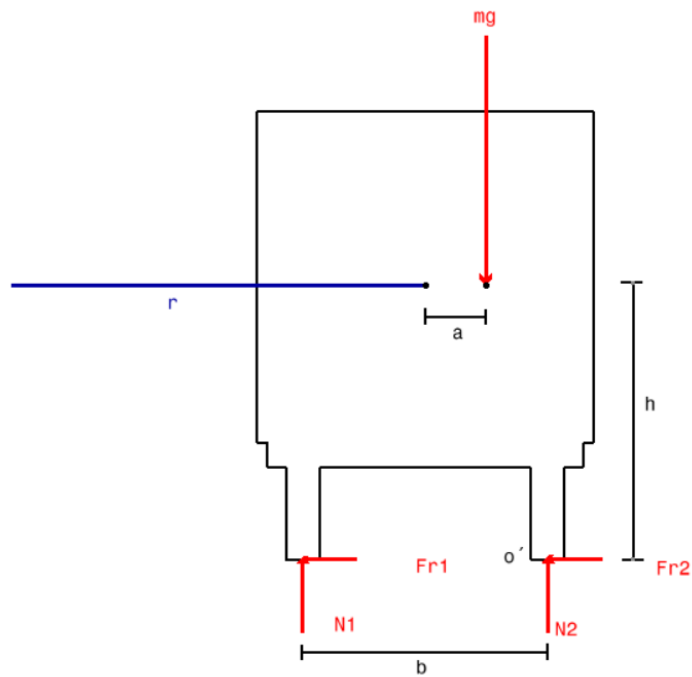


Figura 2.2 Vista transversal del vehículo con el centro de gravedad desplazado

Haciendo ahora el mismo análisis a un camión que se encuentra en una trayectoria curva de radio r pero cuyo centro de masa se encuentra desplazado una distancia a hacia la derecha del centro de masa original como se muestra en la figura 2.2, se tienen las siguientes ecuaciones:

$$\sum F_n = ma_n \quad (2.14)$$

$$F_{r1} + F_{r2} = ma_n \quad (2.15)$$

$$\text{Donde: } a_n = \frac{v^2}{r} \quad (2.16)$$

$$\sum F_y = 0$$

$$N_1 + N_2 - mg = 0 \quad (2.17)$$

$$\sum M_{o'} = I\alpha + ma_n h \quad (2.18)$$

$$-N_1(b) + mg\left(\frac{b}{2} - a\right) = ma_n h \quad (2.19)$$

$$-N_1(b) + mg\left(\frac{b}{2} - a\right) = \frac{mv^2 h}{r} \quad (2.20)$$

Para determinar si el vehículo se desliza sobre la curva, se utiliza la ecuación 2.9:

$$v = \sqrt{\mu_s g r} \quad (2.9)$$

Para determinar la velocidad de volcadura del vehículo cuando el centro de masa está desplazado, recordar que se debe cumplir con $N_1 = 0$, por lo tanto:

$$-N_1(b) + mg\left(\frac{b}{2} - a\right) = \frac{mv^2 h}{r}$$

$$v = \sqrt{\frac{rg}{h}\left(\frac{b}{2} - a\right)} \quad (2.10)$$

Como se mencionó anteriormente, es necesario que la velocidad de deslizamiento sea menor que la velocidad de volcadura, por lo tanto:

$$\sqrt{\mu_s g r} < \sqrt{\frac{rg}{h}\left(\frac{b}{2} - a\right)}$$

$$\mu_s g r < \frac{rg}{h}\left(\frac{b}{2} - a\right)$$

$$\mu_s < \frac{1}{h}\left(\frac{b}{2} - a\right) \quad (2.11)$$

Considere ahora el camión de masa m como el que se muestra en la figura 2.3, el cual circula por una trayectoria curva de radio r y peralte con una inclinación θ , el cual está sujeto a dos fuerzas normales N_1 y N_2 y dos fuerzas de fricción entre las llantas y el pavimento F_{r1} y F_{r2} . Suponga que el centro de gravedad se encuentra como se indica en la figura.

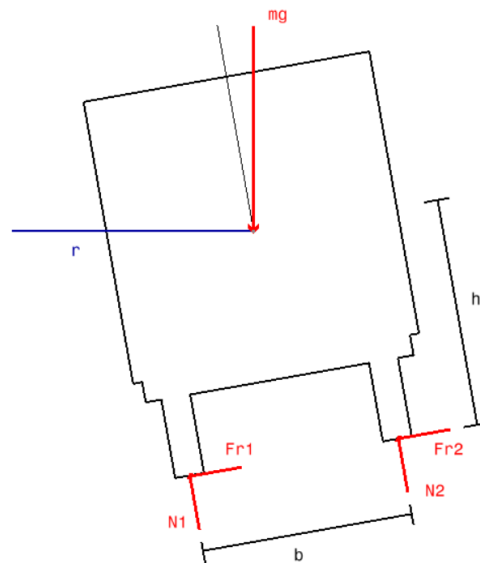


Figura 2.3 Vehículo sobre una trayectoria curva con una inclinación θ .

Tomado en cuenta un análisis cinético de cuerpo rígido se tiene que la suma de fuerzas normales es igual a la sumatoria de la masa del camión por la aceleración normal del mismo.

$$\sum F_n = ma_n$$

$$F_{r1} \cos \theta + F_{r2} \cos \theta + N_1 \sin \theta + N_2 \sin \theta = \frac{mv^2}{r} \quad (2.12)$$

Posteriormente, haciendo suma de fuerzas en dirección vertical se tiene que:

$$\sum F_y = 0$$

$$N_1 + N_2 = mg \cos \theta \quad (2.13)$$

Al hacer suma de momentos alrededor del apoyo en la llanta exterior al centro de la curva y sustituyendo ecuaciones 2.12 y 2.13 se tiene que:

$$\Sigma M_{o'} = ma_n \cos \theta (h) - ma_n \sin \theta \left(\frac{b}{2}\right) \quad (2.14)$$

$$-N_1(b) + mg \cos \theta \left(\frac{b}{2}\right) + mg \sin \theta (h) = ma_n \left(h \cos \theta - \frac{b}{2} \sin \theta\right) \quad (2.15)$$

Sea la aceleración normal a_n igual a la velocidad al cuadrado v^2 dividido por el radio de curvatura r :

$$a_n = \frac{v^2}{r} \quad (2.16)$$

El vehículo se deslizará cuando la fuerza de fricción sea igual al producto de la fuerza normal por el coeficiente de deslizamiento estático, es decir:

$$F_r = N\mu_s \quad (2.17)$$

Sustituyendo 2.16 y 2.17 en 2.15 y simplificando se tiene que:

$$\mu_s \cos \theta (N_1 + N_2) + \sin \theta (N_1 + N_2) = \frac{mv^2}{r} \quad (2.18)$$

Sustituyendo la ecuación 2.13 en 2.18 y simplificando se tiene que:

$$g\mu_s \cos^2 \theta + g \sin \theta \cos \theta = \frac{v^2}{r} \quad (2.19)$$

Obteniendo así la velocidad de deslizamiento lateral cuando el vehículo circula sobre una trayectoria curva con peralte.

$$v = \sqrt{gr \cos \theta (\mu_s \cos \theta + \sin \theta)} \quad (2.20)$$

Por otra parte, la velocidad de volcadura ocurre cuando $N_1=0$, es:

$$v = \sqrt{\frac{rg(h \sin \theta + \frac{b}{2} \cos \theta)}{h \cos \theta - \frac{b}{2} \sin \theta}} \quad (2.21)$$

Es deseable que la velocidad de deslizamiento sea menor que la velocidad de volcadura por lo que:

$$\sqrt{gr \cos \theta (\mu_s \cos \theta + \sin \theta)} < \sqrt{\frac{rg(h \sin \theta + \frac{b}{2} \cos \theta)}{h \cos \theta - \frac{b}{2} \sin \theta}} \quad (2.22)$$

$$\cos \theta (\mu_s \cos \theta + \sin \theta) < \frac{h \sin \theta + \frac{b}{2} \cos \theta}{h \cos \theta - \frac{b}{2} \sin \theta} \quad (2.23)$$

$$\mu_s \cos \theta < \frac{h \sin \theta + \frac{b}{2} \cos \theta}{\cos \theta (h \cos \theta - \frac{b}{2} \sin \theta)} - \sin \theta \quad (2.24)$$

$$\mu_s < \frac{h \sin \theta + \frac{b}{2} \cos \theta}{\cos^2 \theta (h \cos \theta - \frac{b}{2} \sin \theta)} - \tan \theta \quad (2.25)$$

Ahora considere el vehículo de la figura 2.4 cuyo centro de gravedad está desplazado una distancia a hacia afuera del centro de la curva. Haciendo análisis cinético y utilizando las ecuaciones 12.12-12.17 se obtiene la velocidad de deslizamiento lateral cuando el centro de gravedad está desplazado una distancia a .

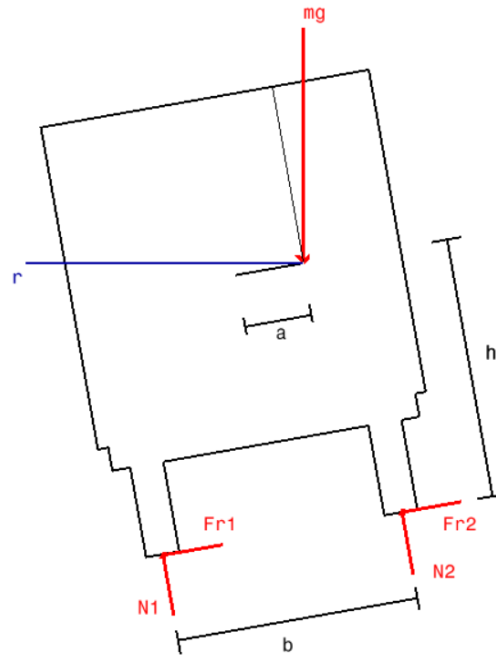


Figura 2. 4 Vehículo sobre una trayectoria curva con una inclinación θ y centro de gravedad desplazado a .

$$v = \sqrt{gr \cos \theta (\mu_s \cos \theta + \sin \theta)} \quad (2.26)$$

Nótese que la ecuación de velocidad de deslizamiento cuando el centro de gravedad del vehículo está desplazado una distancia a , es la misma que para cuando el centro de gravedad está alineado con el eje de simetría del vehículo.

Por otra parte, la velocidad de volcadura de dicho vehículo cuando el centro de gravedad se encuentra desplazado, se da cuando $N1=0$ por lo tanto:

$$v = \sqrt{\frac{gr [\cos \theta (\frac{b}{2} - a) + h \sin \theta]}{h \cos \theta - (\frac{b}{2} - a) \sin \theta}} \quad (2.27)$$

Como se mencionó anteriormente es deseable que la velocidad de deslizamiento sea menor que la velocidad de volcadura; igualando ecuaciones 2.26 y 2.27 se tiene que:

$$gr \cos \theta (\mu_s \cos \theta + \sin \theta) < \frac{gr [\cos \theta (\frac{b}{2} - a) + h \sin \theta]}{h \cos \theta - (\frac{b}{2} - a) \sin \theta} \quad (2.28)$$

$$\mu_s < \frac{\cos \theta (\frac{b}{2} - a) + h \sin \theta}{\cos^2 \theta [h \cos \theta - (\frac{b}{2} - a) \sin \theta]} - \tan \theta \quad (2.29)$$

Nomenclatura

F_n	<i>Fuerza normal</i>
m	<i>Masa</i>
g	<i>Constante de gravitación</i>
a_n	<i>Aceleración normal</i>
$F_{r1,2}$	<i>Fuerza de fricción</i>
v	<i>Velocidad</i>
r	<i>Radio de curvatura</i>
$N_{1,2}$	<i>Fuerza normal</i>
h	<i>Altura del centro de gravedad</i>
μ_s	<i>Coefficiente de fricción estática</i>
b	<i>Ancho entre ruedas</i>
a	<i>Desplazamiento del centro de gravedad</i>
θ	<i>Ángulo de peralte</i>

Capítulo 3 Análisis dinámico de la volcadura, método numérico

3.1 Ecuaciones de movimiento

Un vehículo con movimientos de giro y derrape tiene un movimiento con 4 grados de libertad, los cuales son: traslación en las direcciones x y y , y rotación alrededor de los ejes x y z . Las ecuaciones de movimiento para dicho vehículo que tiende a volcarse son:

$$F_x = m\dot{v}_x - mrv_y \quad (3.1)$$

$$F_y = m\dot{v}_y - mrv_x \quad (3.2)$$

$$M_z = I_z\dot{\omega}_z = I_z\dot{r} \quad (3.3)$$

$$M_x = I_x\dot{\omega}_x = I_z\dot{p} \quad (3.4)$$

Considere el modelo de un vehículo de cuatro ruedas que circula sobre un camino, debido a que el vehículo no se puede mover en dirección z y no puede girar alrededor del eje y ; por lo tanto, las siguientes velocidades son iguales a cero.

$$v_z = 0 \quad \dot{v}_z = 0 \quad \omega_y = 0 \quad \dot{\omega}_y = 0 \quad (3.5)$$

Además, la fuerza resultante en el eje z y el momento alrededor de y son iguales a cero

$$F_z = 0 \quad M_y = 0 \quad (3.6)$$

Sustituyendo las ecuaciones 3.1 y 3.2 en las ecuaciones 1.40-1.43 se tiene el sistema de fuerzas del vehículo.

$$\begin{bmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{bmatrix} = m \begin{bmatrix} \dot{v}_x - \omega_z v_y \\ \dot{v}_y + \omega_z v_x \\ \omega_x v_y \end{bmatrix} \quad (3.7)$$

$$\begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\omega}_x I_1 \\ \omega_x \omega_z I_1 - \omega_x \omega_z I_3 \\ \dot{\omega}_z I_3 \end{bmatrix} \quad (3.8)$$

3.2 Sistema de fuerzas del vehículo

Para determinar el sistema de fuerzas de un vehículo es necesario definir el sistema de fuerzas en la huella del neumático de cada rueda, la fuerza lateral en la huella del neumático depende del ángulo de deslizamiento lateral, posteriormente es necesario es necesario transformar y aplicar este sistema sobre el modelo de volcadura del vehículo.

Las componentes de sistema de fuerzas aplicado en el centro de gravedad de vehículo debido a las fuerzas aplicadas en la huella del neumático uno, de acuerdo a la figura 3.1 son:

$$F_{x1} = F_{xw1} \cos \delta_1 - F_{yw1} \sin \delta_1 \quad (3.9)$$

$$F_{y1} = F_{yw1} \cos \delta_1 - F_{xw1} \sin \delta_1 \quad (3.10)$$

$$M_{x1} = M_{xw1} \quad (3.11)$$

$$M_{z1} = M_{zw1} \quad (3.12)$$

En este análisis se ignoran las componentes del momento sobre la huella del neumático M_{yw} para simplificar las ecuaciones.

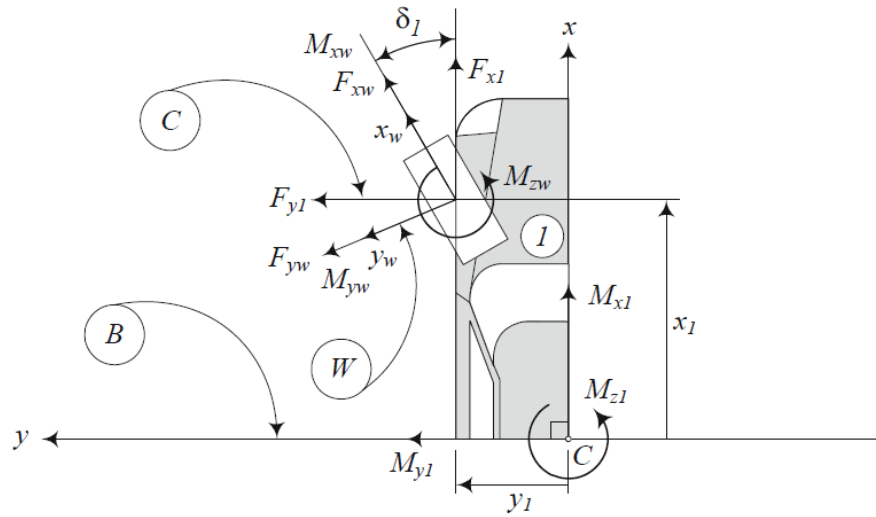


Figura 3. 1 Sistema de fuerzas en la huella del neumático uno.

El sistema de fuerzas total del vehículo rígido en el marco de referencia de todo el cuerpo para analizar el modelo de un vehículo que se vuelca es:

$${}^B F_x = \sum_1 F_{x1} = \sum_1 F_{xw} \cos \delta_1 - \sum_1 F_{yw} \sin \delta_1 \quad (3.13)$$

$${}^B F_y = \sum_1 F_{y1} = \sum_1 F_{yw} \cos \delta_1 + \sum_1 F_{xw} \sin \delta_1 \quad (3.14)$$

$${}^B M_x = \sum_1 M_{x1} + \sum_1 y_1 F_{z1} - \sum_1 z_1 F_{y1} \quad (3.15)$$

$${}^B M_z = \sum_1 M_{z1} + \sum_1 x_1 F_{y1} - \sum_1 y_1 F_{x1} \quad (3.16)$$

Para simplificar el modelo de volcadura del vehículo se debe ignorar la diferencia entre el marco de la rueda en el centro de la huella del vehículo y el marco de la rueda en el centro de la rueda para ángulos de balanceo. El sistema de fuerzas generado en la huella del neumático de la rueda en el marco de la rueda W es:

$${}^W F_w = [F_{xw} \quad F_{yw} \quad F_{zw}]^T \quad (3.17)$$

$${}^W M_w = [M_{xw} \quad M_{yw} \quad M_{zw}]^T \quad (3.18)$$

La matriz de rotación entre el marco de la rueda W y el marco de la rueda respecto del marco coordenado del centro de gravedad y paralelo al marco del vehículo es:

$${}^c R_W = \begin{bmatrix} \cos \delta_1 & -\sin \delta_1 & 0 \\ \sin \delta_1 & \cos \delta_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.19)$$

Y por lo tanto el sistema de fuerzas en el neumático de la rueda paralelo al marco coordinado del vehículo es:

$${}^c F_w = {}^c R_W {}^w F_w \quad (3.20)$$

$$\begin{bmatrix} F_{x1} \\ F_{y1} \\ F_{z1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \delta_1 & -\sin \delta_1 & 0 \\ \sin \delta_1 & \cos \delta_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_{xw} \\ F_{yw} \\ F_{zw} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{xw} \cos \delta_1 - F_{yw} \sin \delta_1 \\ F_{yw} \cos \delta_1 + F_{xw} \sin \delta_1 \\ F_{zw} \end{bmatrix} \quad (3.21)$$

$${}^{B_1} M_w = {}^{B_1} R_{B_w} {}^{B_w} M_w \quad (3.22)$$

$$\begin{bmatrix} M_{x1} \\ M_{y1} \\ M_{z1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \delta_1 & -\sin \delta_1 & 0 \\ \sin \delta_1 & \cos \delta_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_{xw} \\ M_{yw} \\ M_{zw} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_{xw} \cos \delta_1 - M_{yw} \sin \delta_1 \\ M_{yw} \cos \delta_1 + M_{xw} \sin \delta_1 \\ M_{zw} \end{bmatrix} \quad (3.23)$$

Ignorando M_{y1} se transforma el sistema de fuerzas de cada rueda al marco de coordenadas del cuerpo, localizado en el centro de masa del vehículo para generar el sistema total de fuerzas aplicado en el vehículo.

$${}^B F = \sum_i {}^{B_i} F_w = \sum_i F_{xi} \hat{i} + \sum_i F_{yi} \hat{j} \quad (3.24)$$

$${}^B M = \sum_i {}^{B_i} M_w = \sum_i M_{xi} \hat{i} + \sum_i M_{zi} \hat{k} + \sum_i {}^B r_i \times {}^B F_{wi} \quad (3.25)$$

Donde ${}^B r_i$ es la posición del vector de la rueda i ,

$${}^B r_i = x_i \hat{i} + y_i \hat{j} + z_i \hat{k} \quad (3.26)$$

En la ecuación 3.20 se ha utilizado $\sum_i F_{zi} - mg = 0$, expandiendo las ecuaciones 3.20 y 3.21 el sistema total de fuerzas del vehículo.

$${}^B F_x = \sum_i F_{xw} \cos \delta_i - \sum_i F_{yw} \sin \delta_i \quad (3.27)$$

$${}^B F_y = \sum_i F_{yw} \cos \delta_i + \sum_i F_{xw} \sin \delta_i \quad (3.28)$$

$${}^B M_x = \sum_i M_{xi} + \sum_i y_i F_{zi} - \sum_i z_i F_{yi} \quad (3.29)$$

$${}^B M_z = \sum_i M_{zi} + \sum_i x_i F_{yi} - \sum_i y_i F_{xi} \quad (3.30)$$

Considerando un vehículo de dos ruedas se tiene que:

$$x_1 = a_1 \quad x_2 = a_2$$

$$x_1 = y_2 = 0$$

$$z_1 = R_f \quad z_2 = R_r$$

Para dicho vehículo, después de ignorar que el efecto de la rueda reduce R_f y R_r , el sistema de fuerzas se reduce a:

$${}^B F_x = F_{x1} \cos \delta_1 + F_{x2} \cos \delta_2 - F_{y1} \sin \delta_1 - F_{y2} \sin \delta_2 \quad (3.31)$$

$${}^B F_y = F_{y1} \cos \delta_1 + F_{y2} \cos \delta_2 + F_{x1} \sin \delta_1 + F_{x2} \sin \delta_2 \quad (3.32)$$

$${}^B M_x = M_{x1} + M_{x2} \quad (3.33)$$

$${}^B M_z = M_{z1} + M_{z2} + a_1 F_{y1} - a_2 F_{y2} \quad (3.34)$$

3.3 Componentes de fuerzas de en un modelo vehicular de dos ruedas

La figura 3.2 muestra la cinemática de un modelo de dos ruedas con rotaciones alrededor de los ejes x y z, este modelo es llamado modelo bicicleta, y el sistema de fuerzas aplicado en este modelo cuya dirección es delantera es el siguiente:

$$F_x = \sum_{i=1}^2 (F_{xi} \cos \delta - F_{yi} \sin \delta) \quad (3.35)$$

$$F_y = \sum_{i=1}^2 F_{yi} \quad (3.36)$$

$$M_x = M_{xf} + M_{xr} - \omega c_f \dot{\phi} - \omega \kappa_f \dot{\phi} \quad (3.37)$$

$$M_z = a_1 F_{yf} - a_2 F_{yr} \quad (3.38)$$

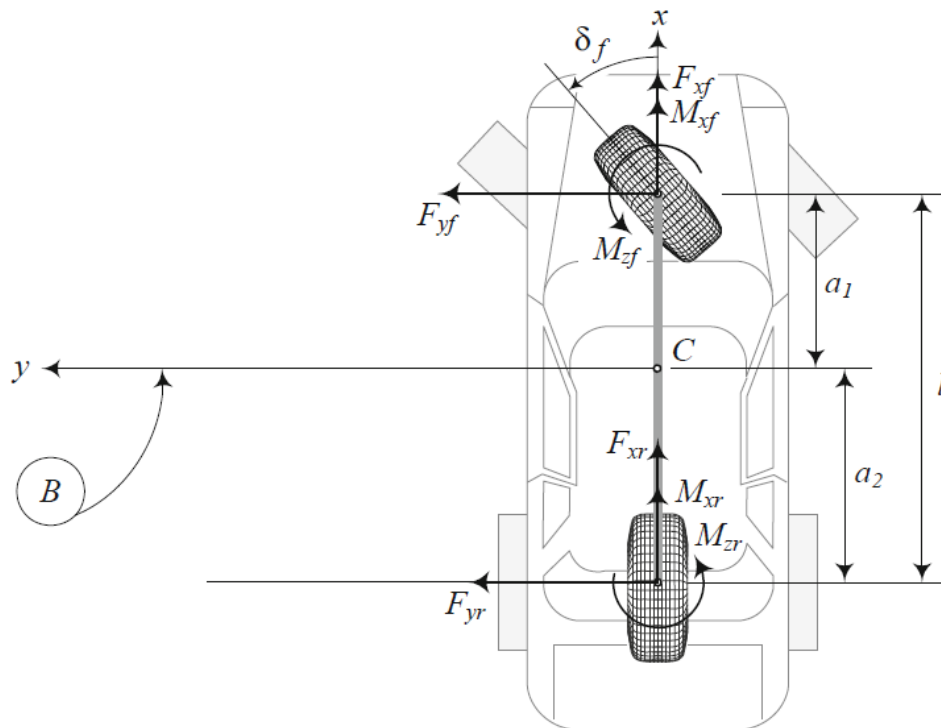


Figura 3. 2 Modelo de un vehículo de dos ruedas con rotaciones alrededor de x y z

Si se considera un ángulo δ de la dirección pequeño, el sistema de fuerzas se puede aproximar mediante las siguientes ecuaciones.

$$F_x \approx F_{x_f} + F_{x_r} \quad (3.39)$$

$$F_y \approx F_{y_f} + F_{y_r} \quad (3.40)$$

$$M_x \approx C_{T_f} F_{y_f} + C_{T_r} F_{y_r} - \kappa_\varphi \varphi - c_\varphi \dot{\varphi} \quad (3.41)$$

$$M_z \approx a_1 F_{y_f} - a_2 F_r \quad (3.42)$$

Es posible combinar las ecuaciones (3.1) - (3.4) y (3.35) - (3.38) para un modelo de vehículo de dos ruedas que se puede volcar y expresar su movimiento mediante el siguiente conjunto de ecuaciones:

$$\dot{v}_x = \frac{1}{m} F_x + r v_y = \frac{1}{m} (F_{x_f} + F_{x_t}) + r v_y \quad (3.43)$$

$$\begin{bmatrix} \dot{v}_y \\ \dot{p} \\ \dot{\varphi} \\ \dot{r} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{C_\beta}{m v_x} & \frac{C_p}{m} & \frac{C_\varphi}{m} & -v_x \\ \frac{E_\beta}{I_x v_x} & \frac{E_p}{I_x} & \frac{E_\varphi}{I_x} & \frac{E_r}{I_x} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{D_\beta}{I_z v_x} & \frac{D_p}{I_z} & \frac{D_\varphi}{I_z} & \frac{D_r}{I_z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_y \\ p \\ \varphi \\ r \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{C_\delta}{m} \\ \frac{E_\delta}{I_x} \\ 0 \\ \frac{D_\delta}{I_z} \end{bmatrix} \delta \quad (3.44)$$

Las ecuaciones (3.43) y (3.44) son útiles para analizar el movimiento de los vehículos especialmente cuando se mueven a una velocidad constante y donde los coeficientes C , E y D son los coeficientes del sistema de fuerzas determinados a partir de las características del vehículo.

3.4 Movimiento en estado estable

La condición de estado estable de un del modelo de un vehículo de dos ruedas con dirección delantera que es propenso a volcarse está gobernada por las siguientes ecuaciones:

$$F_x = -mrv_y \quad (3.45)$$

$$C_r r + C_\beta \beta + C_\varphi \varphi + C_\delta \delta = mrv_x \quad (3.46)$$

$$E_r r + E_\beta \beta + E_\varphi \varphi + E_\delta \delta = 0 \quad (3.47)$$

$$D_r r + D_\beta \beta + D_\varphi \varphi + D_\delta \delta = 0 \quad (3.48)$$

La primera ecuación determina la fuerza requerida para mantener v_x constante. Las siguientes tres ecuaciones muestran los valores de estado estable de las variables de salida, las cuales son: curvatura del camino k , ángulo de deslizamiento del vehículo β , tasa de volcadura del vehículo p y ángulo de volcadura del vehículo φ para un ángulo de la dirección del vehículo δ a velocidad constante v_x .

$$k = \frac{1}{R} = \frac{r}{v_x} \quad (3.49)$$

Las relaciones de entrada y salida están definidas por las siguientes respuestas:

Respuesta de curvatura

$$s_k = \frac{k}{\delta} = \frac{1}{R\delta} \quad (3.50)$$

Respuesta de deslizamiento

$$s_\beta = \frac{\beta}{\delta} \quad (3.51)$$

Respuesta de velocidad de derrape

$$s_r = \frac{r}{\delta} = \frac{k}{\delta} v_x = s_k v_x \quad (3.52)$$

Respuesta de aceleración centrípeta

$$s_a = \frac{v_x^2/R}{\delta} = \frac{k}{\delta} v_x^2 = s_k v_x \quad (3.53)$$

Respuesta de velocidad lateral

$$s_y = \frac{v_y}{\delta} = s_\beta v_x \quad (3.54)$$

Respuesta de ángulo de volcadura

$$s_\varphi = \frac{\varphi}{\delta} \quad (3.55)$$

Tiempo de respuesta

Las ecuaciones de movimiento deberán ser integradas numérica o analíticamente para analizar el tiempo de respuesta de un vehículo y examinar como el vehículo responderá teniendo como entrada un ángulo de la dirección; las ecuaciones de movimiento son un conjunto de ecuaciones diferenciales ordinarias expresadas a continuación:

$$\dot{v}_x = \frac{1}{m} F_x + r v_y \quad (3.56)$$

$$\begin{bmatrix} \dot{v}_y \\ \dot{p} \\ \dot{\varphi} \\ \dot{r} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{C_\beta}{m v_x} & \frac{C_p}{m} & \frac{C_\varphi}{m} & \frac{C_r}{m} - v_x \\ \frac{E_\beta}{I_x v_x} & \frac{E_p}{I_x} & \frac{E_\varphi}{I_x} & \frac{E_r}{I_x} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{D_\beta}{I_z v_x} & \frac{D_p}{I_z} & \frac{D_\varphi}{I_z} & \frac{D_r}{I_z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_y \\ p \\ \varphi \\ r \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{C_\delta}{m} \\ \frac{E_\delta}{I_x} \\ 0 \\ \frac{D_\delta}{I_z} \end{bmatrix} \delta(t) \quad (3.57)$$

La solución está dada por un ángulo de la dirección dependiente del tiempo $\delta(t)$ y son:

$$v_x = v_x(t) \quad (3.58)$$

$$v_y = v_y(t) \quad (3.59)$$

$$p = p(t) \quad (3.60)$$

$$\varphi = \varphi(t) \quad (3.61)$$

$$r = r(t) \quad (3.62)$$

Dicha solución es el tiempo de respuesta o respuesta transitoria del vehículo, asumiendo una velocidad constante la ecuación (3.56) se puede simplificar a:

$$F_x = -mrv_y \quad (3.63)$$

Y la ecuación (3.57) se vuelve independiente de la primera y el conjunto de dichas ecuaciones se puede escribir de la siguiente manera:

$$\dot{q} = [A]q + u$$

Donde $[A]$ es la matriz de coeficientes constantes, q es el vector de las variables de control y u es el vector de las variables de entrada.

Sea $[A]$:

$$[A] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}$$

Debido a que las ecuaciones son lineales, sus soluciones son funciones exponenciales.

$$v_y = A_1 e^{\lambda t}$$

$$p = A_2 e^{\lambda t}$$

$$\varphi = A_3 e^{\lambda t}$$

$$r = A_4 e^{\lambda t}$$

Las soluciones muestran que λ es el valor propio de la matriz $[A]$, para encontrar λ se puede expandir el determinante de la matriz de coeficientes y encontrar la ecuación característica tal que:

$$\det[A] = 0$$

Una vez teniendo los valores propios, se muestra la solución general para la dinámica del vehículo.

$$v_y = A_{11}e^{\lambda_1 t} + A_{12}e^{\lambda_2 t} + A_{13}e^{\lambda_3 t} + A_{14}e^{\lambda_4 t}$$

$$p = A_{21}e^{\lambda_1 t} + A_{22}e^{\lambda_2 t} + A_{23}e^{\lambda_3 t} + A_{24}e^{\lambda_4 t}$$

$$\varphi = A_{31}e^{\lambda_1 t} + A_{32}e^{\lambda_2 t} + A_{33}e^{\lambda_3 t} + A_{34}e^{\lambda_4 t}$$

$$r = A_{41}e^{\lambda_1 t} + A_{42}e^{\lambda_2 t} + A_{43}e^{\lambda_3 t} + A_{44}e^{\lambda_4 t}$$

Nomenclatura

F_x	<i>Fuerza en la dirección x</i>
F_y	<i>Fuerza en la dirección y</i>
m	<i>Masa</i>
a, \ddot{x}, \dot{v}	<i>Aceleración</i>
a_1	<i>Distancia desde el eje delantero al centro de masa</i>
a_2	<i>Distancia desde el eje trasero al centro de masa</i>
$[A]$	<i>Matriz de coeficientes de la variable de control</i>
b_1	<i>Distancia desde las ruedas izquierdas al centro de masa</i>
b_2	<i>Distancia desde las ruedas derechas al centro de masa</i>
c_f	<i>Amortiguamiento de la suspensión delantera</i>
c_r	<i>Amortiguamiento de la suspensión trasera</i>
c_φ	<i>Amortiguamiento del vehículo</i>
C	<i>Centro de masa del vehículo</i>
C_{α_i}	<i>Coeficiente de deslizamiento lateral de la rueda</i>
C_{β_i}	<i>Coeficiente de velocidad de giro de la rueda</i>
C_{T_i}	<i>Coeficiente de torque de la rueda</i>
C_{φ_i}	<i>Coeficiente de empuje de la inclinación de la rueda</i>
C_r	<i>Coeficiente de fuerza lateral de la velocidad de derrape del vehículo</i>
C_p	<i>Coeficiente de fuerza lateral de la velocidad de vuelco del vehículo</i>
C_β	<i>Coeficiente de fuerza lateral del ángulo de deslizamiento del vehículo</i>
C_φ	<i>Coeficiente de fuerza lateral del ángulo de derrape del vehículo</i>
C_δ	<i>Coeficiente de fuerza lateral del ángulo de dirección del vehículo</i>
D_r	<i>Coeficiente de momento de derrape de la velocidad de derrape del vehículo</i>

D_p	<i>Coeficiente de momento de derrape de la velocidad de vuelco del vehículo</i>
D_β	<i>Coeficiente de momento de derrape del ángulo de deslizamiento del vehículo</i>
D_φ	<i>Coeficiente de momento de derrape del ángulo de derrape del vehículo</i>
D_δ	<i>Coeficiente de momento de derrape del ángulo de la dirección del vehículo</i>
E_r	<i>Coeficiente de momento de vuelco de la velocidad de derrape del vehículo</i>
E_p	<i>Coeficiente de momento de vuelco de la velocidad de vuelco del vehículo</i>
E_β	<i>Coeficiente de momento de vuelco del ángulo de deslizamiento del vehículo</i>
E_φ	<i>Coeficiente de momento de vuelco del ángulo de derrape del vehículo</i>
E_δ	<i>Coeficiente de momento de vuelco del ángulo de la dirección del vehículo</i>
k	<i>Rigidez</i>
k_f	<i>Rigidez de la suspensión delantera</i>
k_r	<i>Rigidez de la suspensión trasera</i>
k_φ	<i>Rigidez del vehículo</i>
l	<i>Distancia entre ejes</i>
$p = \dot{\varphi}$	<i>Velocidad de vuelco</i>
$r = \dot{\psi}$	<i>Velocidad de derrape</i>
S_a	<i>Aceleración lateral de respuesta</i>
S_r	<i>Respuesta de la velocidad de derrape</i>
S_β	<i>Respuesta de deslizamiento lateral</i>
S_κ	<i>Respuesta de curvatura</i>
S_φ	<i>Respuesta del ángulo de vuelco</i>
t	<i>Tiempo</i>

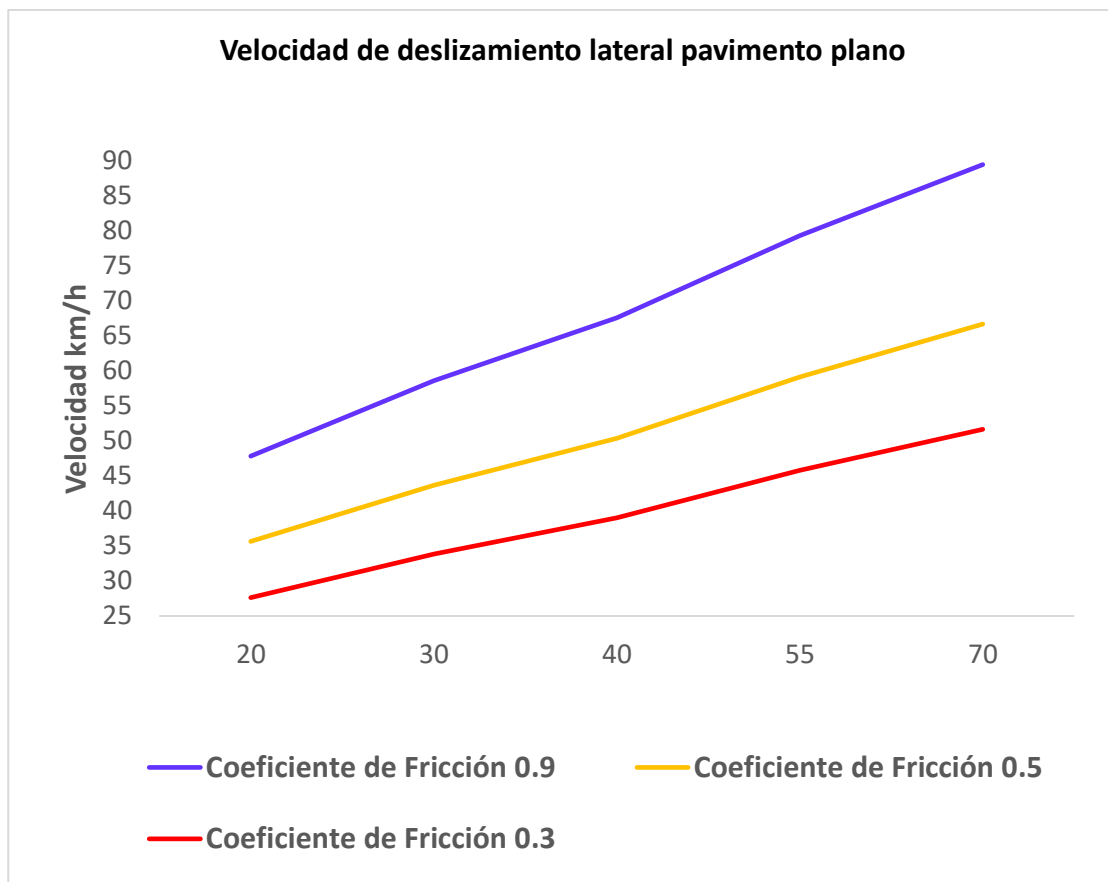
v	<i>Velocidad</i>
w	<i>Distancia entre las ruedas del vehículo</i>
Z_0, Z_1, Z_2, Z_3	<i>Parámetros de respuesta en estado estable</i>
α	<i>Ángulo de deslizamiento lateral de la rueda</i>
β	<i>Ángulo de deslizamiento del vehículo</i>
δ	<i>Angulo de la dirección del vehículo</i>
δ_φ	<i>Angulo de vuelco de la dirección</i>
κ	<i>Curvatura del camino</i>
λ	<i>Valor propio</i>
φ	<i>Angulo de vuelco</i>
ψ	<i>Angulo de derrape</i>
ω	<i>Velocidad angular</i>
$\dot{\omega}$	<i>Aceleración angular</i>

Capítulo 4 Resultados

4.1 Velocidades de deslizamiento Lateral

4.1.1 Velocidad de deslizamiento en pavimento sin inclinación

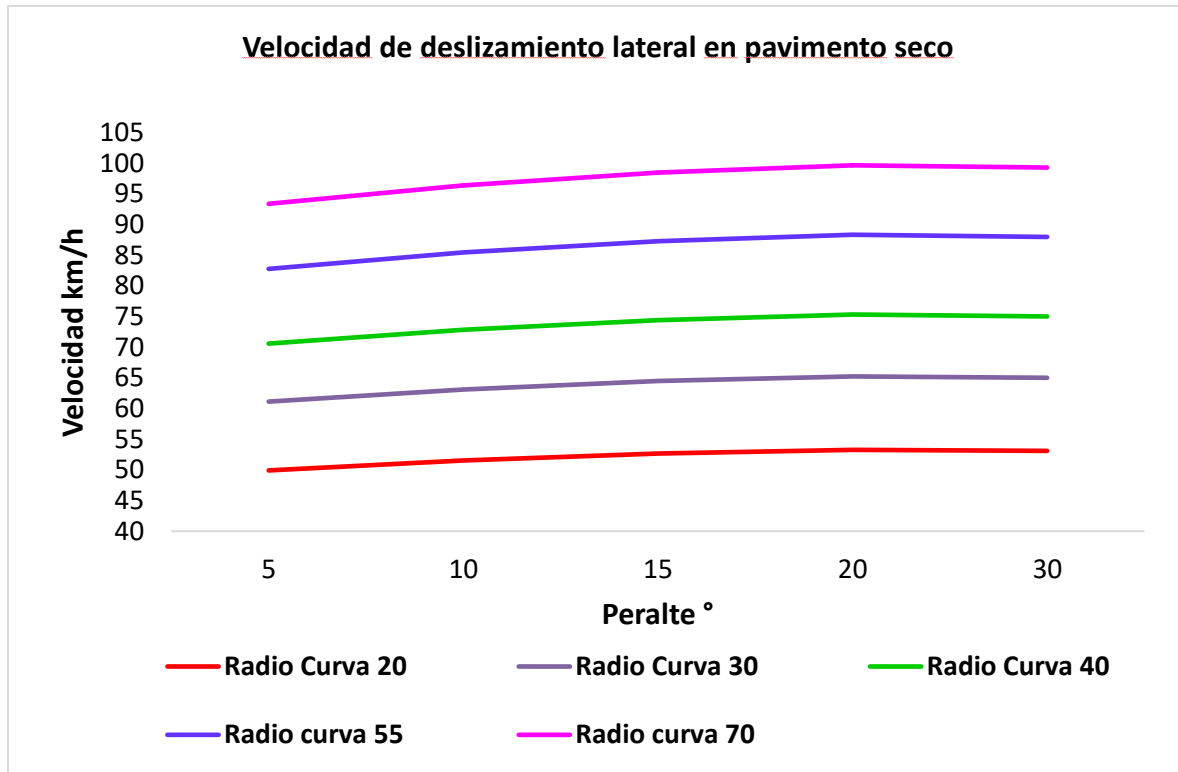
La siguiente gráfica muestra la velocidad de deslizamiento lateral para distintos coeficientes de fricción, 0.9, 0.5, y 0.3. en una trayectoria sin inclinación



EL coeficiente de fricción de 0.3 considera una superficie muy resbalosa o mojada, el coeficiente de 0.5 toma en cuenta condiciones promedio, tanto de la carretera como de las condiciones de los neumáticos; por último, el coeficiente de 0.9 se refiere a condiciones ideales de pavimento en seco y llantas nuevas. Note que la velocidad de deslizamiento para el coeficiente de fricción de 0.3 es de 27 km/h para un radio de curvatura de 20m. (12)

4.1.2 Velocidad de deslizamiento en pavimento seco con peralte

La grafica tal, muestra las velocidades de deslizamiento lateral en pavimento seco, considerando un coeficiente de fricción de 0.9 para pavimento en seco y tomando en cuenta una sobreelevación desde 5 a 30 grados.



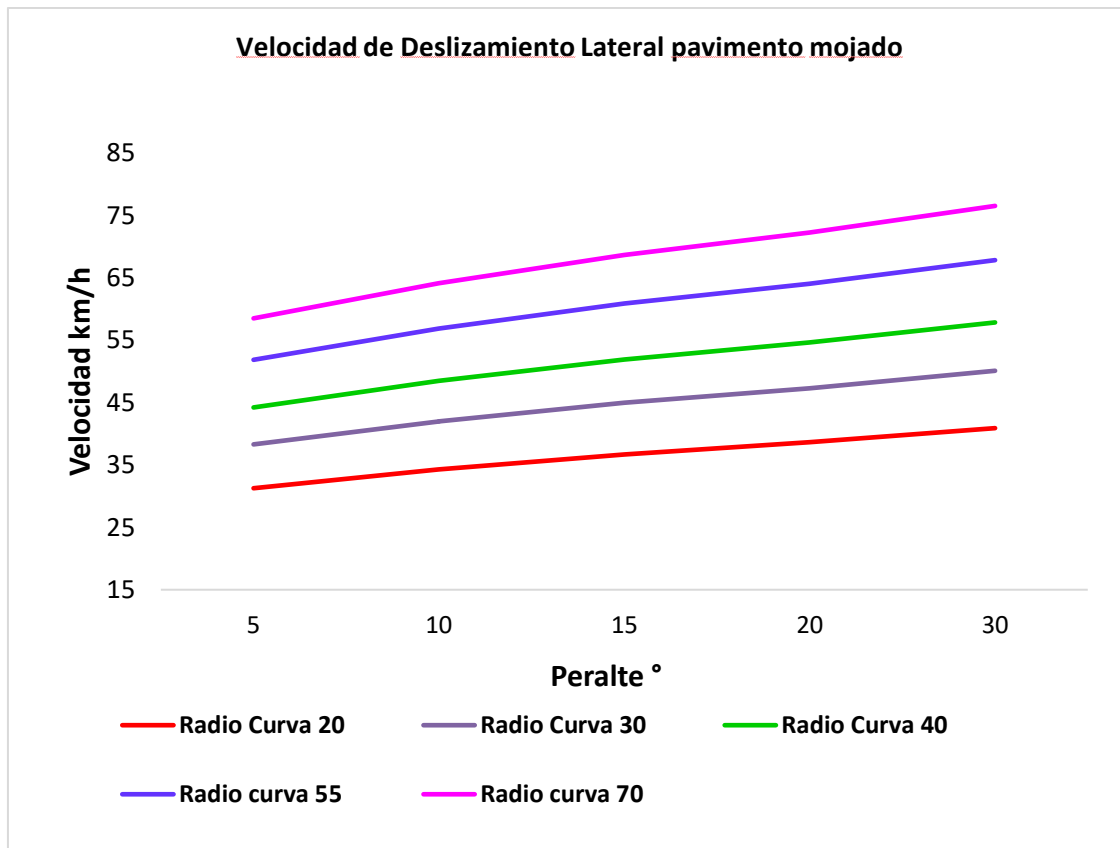
Respecto a la velocidad de deslizamiento lateral considerando cierta inclinación, la velocidad más baja de deslizamiento para un radio de curvatura de 20 metros y una sobreelevación de 5 grados es de 49 km/h.

$$\mu_s < \frac{b}{2h} \quad (4.1)$$

La desigualdad 4.1 indica que debe la relación entre el ancho del vehículo y el doble de la altura del centro de gravedad, debe ser mayor que el coeficiente de fricción estática.

4.1.3 Velocidad de deslizamiento en pavimento mojado con peralte

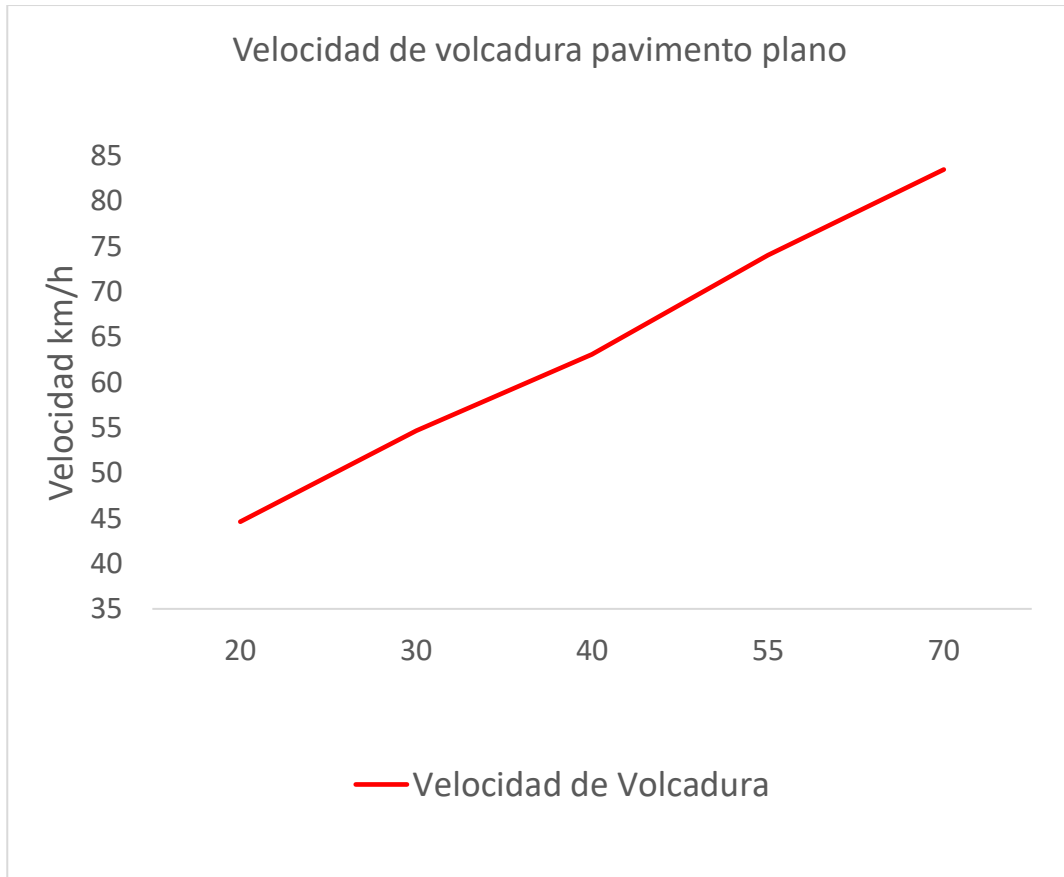
La grafica tal muestra ahora una velocidad de deslizamiento con el pavimento mojado tomando en cuenta un coeficiente de fricción de 0.3 y una inclinación en la sección transversal del camino.



Aquí la velocidad máxima a la que el vehículo se puede desplazar antes de que comience a deslizarse es de 31 km/h considerando una inclinación de 5 grados y un radio de curvatura de 20 metros. Notar que la velocidad de deslizamiento se calcula de la misma manera que si el centro de gravedad esta desplazado o no.

4.2 Velocidades de volcadura

4.2.1 Velocidad de volcadura en un camino sin inclinación

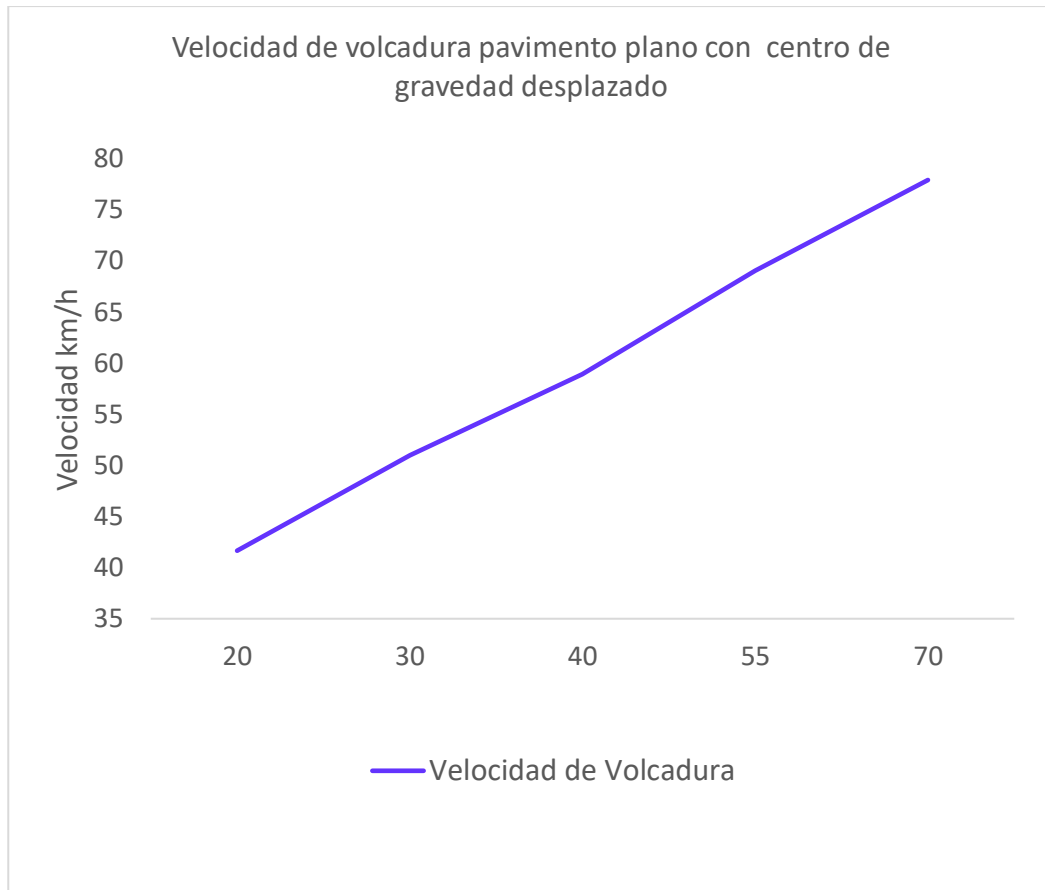


La gráfica muestra la velocidad de volcadura para un camino sin inclinación y cuyo centro de gravedad del vehículo no está desplazado. Para este caso la velocidad es de 44 km/h, tan solo un kilómetro por hora más que la velocidad de deslizamiento considerando las mismas condiciones y con un coeficiente de fricción de 0.9.

$$\mu_s < \frac{1}{h} \left(\frac{b}{2} - a \right) \quad (4.2)$$

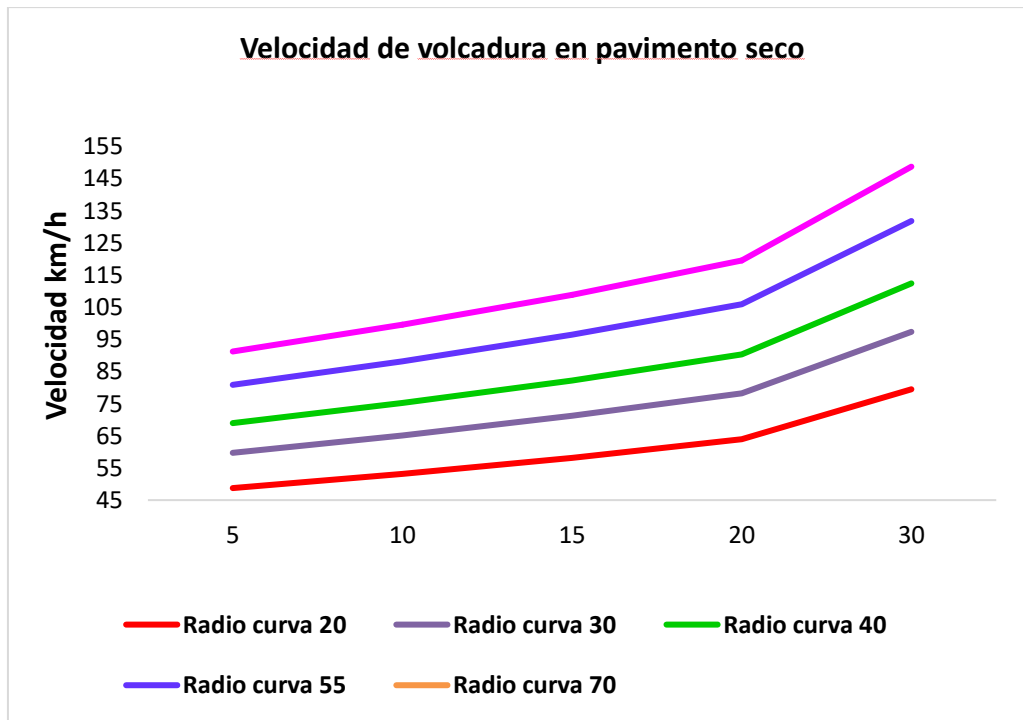
La ecuación 4.2 establece que para evitar la volcadura es necesario que la relación entre el ancho del vehículo la altura del centro de gravedad y la distancia que se encuentra desplazado el centro de gravedad sea mayor que el coeficiente de fricción

4.2.2 Velocidad de volcadura en un camino sin inclinación, pero con el centro de gravedad desplazado.



La velocidad de volcadura para este caso, disminuye a 41 km/h, esto es cuando el centro de gravedad está desplazado tan solo diez centímetros hacia un costado.

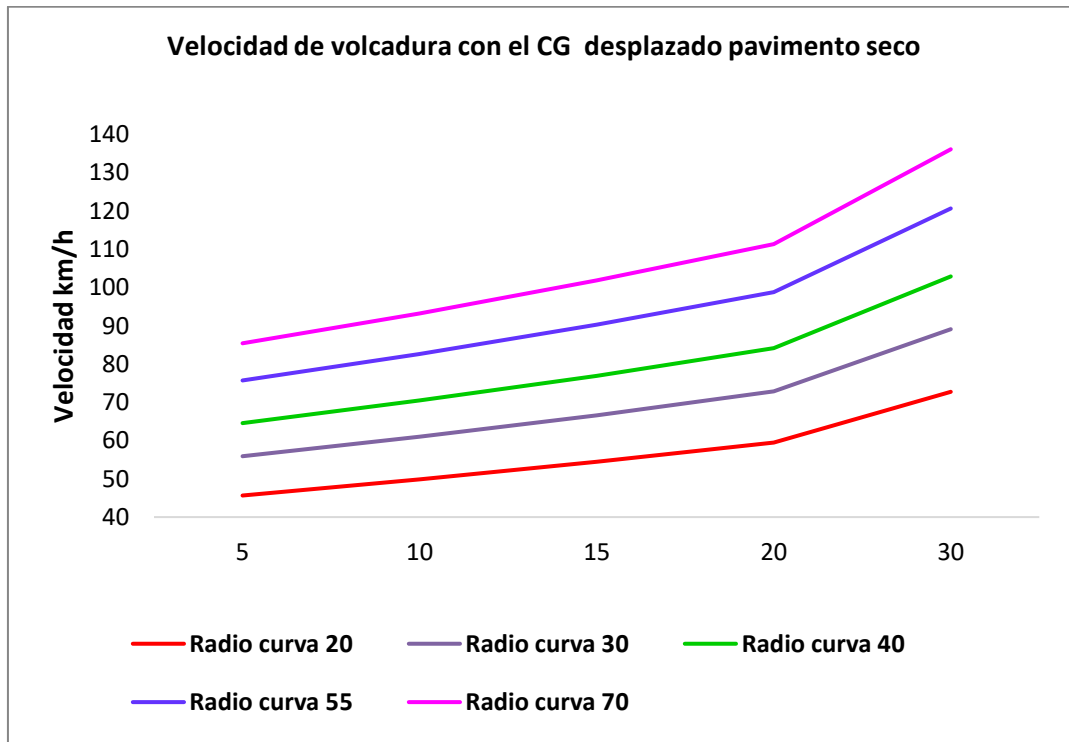
4.2.3 Velocidad de volcadura en pavimento seco con peralte



$$\mu_s < \frac{h \sin \theta + \frac{b}{2} \cos \theta}{\cos^2 \theta \left(h \cos \theta - \frac{b}{2} \sin \theta \right)} - \tan \theta \quad (4.3)$$

La ecuacion 4.3 muestra la relacion que debe existir en una curva con peralte para evitar que el vehículo vuelque sobre su costado considerando una curva con peralte.

4.2.4 Velocidad de volcadura en pavimento seco con el centro de gravedad desplazado



$$\mu_s < \frac{\cos \theta \left(\frac{b}{2} - a \right) + h \sin \theta}{\cos^2 \theta \left[h \cos \theta - \left(\frac{b}{2} - a \right) h \sin \theta \right]} - \tan \theta \quad (4.4)$$

La ecuación 4.4 establece la relación que debe existir para evitar la volcadura de un vehículo que circula por una trayectoria curva peraltada cuando su centro de gravedad está desplazado.

4.3 Comparación de velocidades respecto del coeficiente de fricción

$$\mu_s$$

0.9

$$\mu_s < \frac{b}{2h}$$

0.7828256

$$\mu_s < \frac{1}{h} \left(\frac{b}{2} - a \right)$$

0.68241163

$$\mu_s < \frac{h \sin \theta + \frac{b}{2} \cos \theta}{\cos^2 \theta \left(h \cos \theta - \frac{b}{2} \sin \theta \right)} - \tan \theta$$

θ	5	10	15	20	30
	0.8539659	0.97101869	1.1572045	1.45222701	2.73186614

$$\mu_s < \frac{\cos \theta \left(\frac{b}{2} - a \right) + h \sin \theta}{\cos^2 \theta \left[h \cos \theta - \left(\frac{b}{2} - a \right) h \sin \theta \right]} - \tan \theta$$

θ	5	10	15	20	30
	0.73454091	0.82231784	0.96262955	1.1830208	2.0938092

Las desigualdades arriba mostradas muestran el momento en que la volcadura se presenta para las distintas configuraciones de camino y la posición del centro de gravedad del vehículo.

Dinámica vehicular de volcadura, coeficientes del sistema de fuerzas.

δ_1 (Grados)	δ_0 (Grados)	δ (Grados)	R (metros)		α	F_y (N)	β
1	0.990	0.995	142.533429		1	1050	1.995
2	1.959	1.979	71.6187419		2	2150	3.979
3	2.909	2.954	47.9730401		3	3180	5.954
4	3.840	3.919	36.14456		4	4200	7.919
5	4.753	4.874	29.042949		5	5000	9.874
6	5.649	5.819	24.3047566		6	5800	11.819
7	6.527	6.755	20.9170754		7	6000	13.755
8	7.389	7.682	18.3734518		8	6000	15.682
9	8.235	8.601	16.3925226		9	6000	17.601
10	9.066	9.510	14.80547		10	6000	19.510
11	9.882	10.411	13.5048644		11	6000	21.411
12	10.684	11.304	12.419086		12	6000	23.304

Tabla 4. 1 Grados de dirección del vehículo

La tabla 4.1 muestra los grados de la dirección del vehículo δ , que para este caso se considera a un vehículo de dirección delantera, así mismo se muestran los ángulos α y β , los cuales son la base para determinar los coeficientes de deslizamiento del sistema de fuerzas de un vehículo que sufre una volcadura, es decir, con cuatro grados de libertad.

La tabla 4.2 muestra los coeficientes del sistema de fuerzas del vehículo analizado y los parámetros de respuesta para un estado estable. Los coeficientes C , E y D son necesarios para calcular el tiempo de respuesta.

m	6960	Cr	-3207.71152	Z0	-9.2059E+12
Ix	19277.402	CP	118.493869	Z1	2.2327E+14
Iz	18988.852	Cβ	-143733.063	Z2	9.3735E+13
a1	1.509	Cφ	715.204768	Z3	2.0114E+13
a2	0.966	Cδ	71820.4768		
kφ	13285.2008			Sk	1.99944423
cφ	14.3905187	Er	-64.1542304	Sβ	-10.1820651
Cβ f	0.01	EP		Sr	24.2532585
Cβ r	0.01	Eβ	-2874.66127	Sa	-294.192026
CTf	0.02	Eφ	-13270.8967	Sφ	2.18493706
CTr	0.02	Eδ	1436.40954		
Cδφf	0.01			Sy	-123.50845
Cδφr	0	Dr	-19014.5676		
Cφf	2	DP	32.0771152	k	0.19994442
Cφr	1	Dβ	-38909.5407	R	5.00138981
Vx	12.13	Dφ	1081.71899	β	-1.01820651
δ	0.1	Dδ	108377.099	r	2.42532585
Cαf (N/rad)	71820.4768			φ	0.21849371
Cαr (N/rad)	71912.5867			Vy	-12.350845
				Fx	208485.573
				Fy	204757.65

Tabla 4. 2 Coeficientes del sistema de fuerzas del vehículo y características generales.

Tiempo de respuesta

De acuerdo a las condiciones iniciales mostradas en la tabla 4.2 se tiene que las ecuaciones de movimiento para la dinámica del vehículo son las siguientes:

$$\begin{bmatrix} \dot{v}_y \\ \dot{p} \\ \dot{\phi} \\ \dot{r} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1.7025 & 0.0170 & 0.1028 & -12.5909 \\ -0.0123 & -0.0006 & -0.6884 & -0.0033 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -0.1689 & 0.0017 & 0.0570 & -1.0014 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_y \\ p \\ \phi \\ r \end{bmatrix}$$

Obteniendo los siguientes valores propios:

$$\lambda_1 = -2.8521$$

$$\lambda_2 = 0.1512$$

$$\lambda_3 = -0.0018 + 0.8307 i$$

$$\lambda_4 = -0.0018 - 0.8307 i$$

Conclusiones

La velocidad de deslizamiento y de volcadura de un vehículo dependen de distintos factores que afectan el manejo y maniobrabilidad del mismo; entre los principales aspectos que contribuyen al deslizamiento de un automóvil se encuentran: las características de los neumáticos, altura del centro de masa del vehículo, inclinación o peralte del camino, así como el radio de curvatura del mismo, ángulo de la dirección, el cual sirve como parámetro de entrada para la solución de las ecuaciones de movimiento, coeficientes de amortiguamiento y rigidez de la suspensión, coeficientes del sistema de fuerzas, los cuales están en función de los ángulos de giro del vehículo y las ruedas, entre otros.

Gracias a la obtención de todos estos parámetros es posible saber cuándo un vehículo es estable y de qué manera se pueden tener modos de manejo más seguros.

La velocidad crítica de manejo para evitar una posible volcadura en un vehículo de este tipo resulta ser muy baja, por lo que se deben extremar precauciones cuando se operan este tipo de vehículos, es necesario también considerar la instalación de sistemas de advertencia en estos vehículos en cuanto a estabilidad de manejo se refiere, como los sistemas con los que cuentan los vehículos de pasajeros.

Este trabajo sirve como antecedente para realizar estudios más complejos tomando en cuenta las características del camino que causan vibraciones en el sistema y análisis transitorios cuando se tienen variaciones de velocidad a lo largo del trayecto.

Referencias

1. Guiggiani, Massimo. *The science of vehicle dynamics*. s.l. : Springer, 2014.
2. Reza N., Jazar. *Vehicle Dynamics, theory and application*. s.l. : Springer, 2014.
3. www.nhtsa.gov. [En línea]
4. *Rollover of Heavy Comercial Vehicles*. Winkler, Chris. 4, 2000, Research Review, Vol. 31.
5. www.inegi.org.mx. [En línea]
6. *Real Time Bus Rollover Prediction Algorithm with Road Bank Estimation*. Guizhen, Yu, Honggang, Li y Pengcheng, Wang. 2016, Chaos Solitons and Fractals (Elsevier), págs. 270-283.
7. Beer, Jhonston y Cornwell. *Mecanica Vectorial Para Ingenieros*. s.l. : Mc Graw Hill, 2010.
8. www.isuzumex.com.mx. [En línea]
9. <http://tecamex.com/>. [En línea]
10. AASHTO. A Policy on Geometric Design of Highways and Streets. 2011.
11. *Influence of combined highway grade and horizontal alignment on skidding*. Dunlap, Duane F, y otros. 1974.
12. Secretaria de Comunicaciones y Transportes, Servicios Técnicos. *Manual de Proyecto Geométrico de Carreteras*. 2016.
13. *Role of centrifugal force in vehicle roll*. Cross, Rod. Sudney : University of Sydney, 1998.
14. *Vehicle rollover*. Swinson, Derek. s.l. : The physics teacher, 1195, Vol. 33.
15. *Heavy dty vehicle roll over detection and active roll control*. Yu, H., Güvenc, L. y Özgüner, Ü. 2008.
16. *Design and evaluation of a unified chassis control system for rollover prevention and vehicle stability improvement on a virtual test track*. Yoon, Jangyeol, Cho, Wanki y Kang , Juyong. 2010, Contro Engineering Practice.
17. *Robust online roll dynamics identification of a vehicle using sliding concepts*. Tafner, Robert, Reichhartinger, Markus y Horn , Martin. 2014.
18. *Anallysis of vehicle rollover using multybody dynamics*. Byoungkee, Han y Jung, Huang Seo. 2015.

19. *Evaluating the Rollover Propensity of Trucks*. Tarko , Andrew, Romero , Mario y Hall , Thomas. 2016, Accident Analysis and Prevention.